Solución de un problema de contorno de gran complejidad para ecuaciones de tipo hiperbólico: caso índice cero

Solution of a boundary problem Very Complex for hyperbolic equations: Case Zero Index

Dr. Lorgio F. Batard Martínez
MSc. Yanelis Estrada Hernández
Departamento de Matemática, Universidad Central Marta Abreu, Santa Clara, Villa Clara, Cuba

Resumen

En el presente trabajo se aborda un problema hiperbólico con condiciones de contorno de gran complejidad que es reducido, mediante el operador de Fourier, a un problema de contorno de Riemann con solución conocida. A partir de la solución del problema de Riemann se obtiene la solución en cuadraturas del problema hiperbólico inicialmente planteado para los casos de índice cero, los cuales son de suma importancia en las aplicaciones.

Abstract

In this paper a hyperbolic problem with complex boundary conditions has been transformed into a Riemann boundary problem of known solution with the help of the Fourier operator. By means of the Riemann problem solutions, the solution of the boundary problem is obtained in quadratures, in the case of index cero, which is very important for the aplications.

Introducción

En el presente artículo se establecen definiciones y resultados auxiliares, así como clases de funciones que son de suma relevancia para el estudio realizado. Además, hacemos el planteamiento del problema en cuestión, consistente en encontrar la solución a una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico con condiciones de fronteras muy generales. La misma se buscará en una cierta clase de funciones de amplia aplicación práctica. Con el apoyo del operador de Fourier reducimos nuestro problema original a un Problema de Contorno de Riemann que resolvemos mediante la técnica de Chersky [ver 3].

Luego estudiamos las condiciones de solubilidad del Problema de Riemann mediante condiciones necesarias y suficientes para que el coeficiente y el término independiente de dicho problema estén en las clases de funciones adecuadas. Es interesante el estudio realizado sobre el valor del índice y los diferentes valores de acuerdo a los coeficientes del problema. Por último se determina la solución del problema en cuadraturas para el caso de índice cero. Todo esto se recoge en una serie de teoremas que resumen los resultados.

1.1 Planteamiento del problema de contorno general de tipo hiperbólico

En el presente epígrafe hacemos el planteamiento del objeto centrado de nuestra investigación: el estudio de un problema hiperbólico con condiciones de contorno complejas, definidas por semiejes. Su solución la encontramos en la banda infinita trabajando con clases de funciones adecuadas (ver [8]).

En el epígrafe se utiliza la técnica de Chersky para reducir el problema de la física-matemática estudiado a un problema de Riemann, cuya solución general ha sido estudiada anteriormente en [2] y [3].

Los resultados se pueden generalizar a otros tipos de regiones, incluso acotadas, trabajando con transformaciones conformes.

Dada la ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + a_0 u(x,y) = g(x,y), a_0 \neq 0 \quad (1.1.1)$$

en la banda

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < +1\} \quad (1.1.2)$$

y las condiciones de contorno

$$\alpha_0 u(x,1^-) + \alpha_1 u_y(x,1^-) + \alpha_2 u_x(x,1^-) = g_{10}(x) \quad (1.1.3)$$

$$\beta_0 u(x,0^+) + \beta_1 u_y(x,0^+) + \beta_2 u_x(x,0^+) = g_{11}(x),\ x < 0 \quad (1.1.4)$$

$$\gamma_0 u(x,0^+) + \gamma_1 u_y(x,0^+) + \gamma_2 u_x(x,0^+) = g_{12}(x),\ x > 0 \quad (1.1.5)$$

donde α_i, β_i y γ_i; i=0,1,2 son números reales $g(x,y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$,$g_{10}(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$,$g_{11}(x) \in L_{2x}(-\infty,0)$ y $g_{12}(x) \in L_{2x}(0,+\infty)$.

Se desea encontrar condiciones sobre los elementos conocidos de (1.1.1), (1.1.3) - (1.1.5) para que la ecuación (1.1.1) tenga solución única en la región (1.1.2), que satisfagan las condiciones (1.1.3)- (1.1.5) y que pertenezcan a la clase

$$\begin{aligned} S = \{u \in F(D) &: u_{xx} \in L_{2x}(\mathbb{R}), \\ u_{yy}(\mathbb{R}) u &\in L_{2x}(\mathbb{R}), 0 < \text{y} < +1\} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

donde $F(D)$ es la clase de funciones que están definidas sobre la banda infinita D y $L_{2x}(\mathbb{R})$ es la clase $L_{2x}(\mathbb{R})$ con respecto a la variable x (ver [8]).

El problema está bien planteado, porque el número de condiciones de contorno (3) es igual al orden de la ecuación diferencial con respecto a (2), por el número de regiones (1), más uno (ver [3]).

1.2 Reducción a un problema de Riemann

A continuación se aplica la técnica de Chersky para reducir el problema planteado en 1.1 a un problema de Riemann para la banda.

1.2.1 Aplicación de la Transformada de Fourier a la ecuación (1.1.1)

Realizando esta operación se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$-\frac{d^2U(x,y)}{dy^2} + (a_0 - x^2)U(x,y) = G(x,y) \quad (1.2.1)$$

Obtención de la solución de la ecuación diferencial (1.2.1).

Las raíces de la ecuación característica

$$-z^2 + (a_0 - x^2) = 0 \quad (1.2.2)$$

correspondiente a (1.2.1) son

$$z_{1,2}(x) = \pm\sqrt{(a_0 - x^2)} \quad (1.2.3)$$

Luego la solución general de (1.2.1) es:

$$U(x,y) = C_1(x) e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x) e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x,y) \quad (1.2.4)$$

donde

$$V(x,y) = -\frac{1}{2} e^{-\sqrt{a_0-x^2}y} \int \frac{G(x,y)}{\sqrt{a_0-x^2}} e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} dy +$$

$$+\frac{1}{2} e^{\sqrt{a_0-x^2}y} \int \frac{G(x,y)}{\sqrt{a_0-x^2}} e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} dy$$

es una solución particular de (1.2.4) y $C_1(x)$, $C_2(x)$, funciones arbitrarias que debemos determinar.

1.2.2 Adaptación de las condiciones de contorno (1.1.4) y (1.1.5) para la aplicación de la Transformada de Fourier

Con ese objetivo se introducen las funciones f_+ y f_-

$$f_+(x) = \begin{Bmatrix} \text{función desconocida de } L_{2x}(\Re),\ x \geq 0 \\ 0 \qquad ,\ x < 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_-(x) = \begin{Bmatrix} 0 \qquad ,\ x > 0 \\ \text{función desconocida de } L_{2x}(\Re),\ x \leq 0 \end{Bmatrix}$$

Estas funciones permiten escribir (1.1.3) y (1.1.4) en la forma

$$\begin{aligned} &\beta_0 u(x,0^+) + \beta_1 u_y(x,0^+) + \beta_2 u_x(x,0^+) = \\ &= g_{11-}(x) + f_+(x), \quad |x| < +\infty \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} &\gamma_0 u(x,0^+) + \gamma_1 u_y(x,0^+) + \gamma_2 u_x(x,0^+) == \\ &== g_{12-}(x) + f_-(x), \quad |x| < +\infty \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

donde

$$g_{11-}(x) = \begin{Bmatrix} g_{11}, x < 0 \\ 0 \ \ , x \geq 0 \end{Bmatrix}$$

$$g_{12+}(x) = \begin{Bmatrix} g_{12}, x > 0 \\ 0 \ \ , x \leq 0 \end{Bmatrix}$$

1.2.3 Aplicación de la Transformada de Fourier a las nuevas condiciones de contorno y a la condición (1.1.3).

Realizando esta operación en (1.1.3), (1.2.5) y (1.2.6) se obtiene:

$$\alpha_0 U(x1_-) + \alpha_1 \frac{dU}{dy}(x,1^-) - ixa_2 U(x,1^-) = G_{10}(x) \quad (1.1.3)$$

$$\beta_0 U(x,0^+) + \beta_1 \frac{dU}{dy}(x,0^+) - ix\beta_2 u_x(x,0^+) = \\ = G_{11}^-(x) + F + (x), \quad |x| < 0 \tag{1.2.7}$$

$$\gamma_0 U(x,0^+) + \gamma_1 \frac{dU}{dy}(x,0^+) - ix\gamma_2 u_x(x,0^+) = \\ = G_{12}^-(x) + F + (x), \quad |x| > 0 \tag{1.2.8}$$

De acuerdo a la definición de f_+ y f_- las funciones $F^-(x)$ y $F^+(x)$ se pueden considerar (ver [4]) como los valores límites de las funciones $F^-(z)$ y $F^+(z)$, analíticas en el semiplano inferior y superior respectivamente, que satisfacen las condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x+iy)|^2 dx < M, \text{si } y < 0 \quad \text{y}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x+iy)|^2 dx < M, \text{si } y > 0$$

Respectivamente, donde M es el mismo para todas las y.

1.2.4 Obtención de una ecuación funcional en la cual las únicas funciones desconocidas son F^+ y F^-:

A partir de (1.2.4) se obtiene fácilmente

$$\frac{dU}{dy}(x,y) = -C_1(x)\sqrt{(a_0-x^2)}\, e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + \\ + C_2(x)\sqrt{(a_0-x^2)}\, e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + \frac{dV}{dy}(x,y) \tag{1.2.9}$$

Sustituyendo (1.2.4) y (1.2.9) en (1.2.7) y (1.2.8), y efectuando las operaciones necesarias se obtienen La expresiones de y:

$$C_1(x) = \begin{vmatrix} H_2(x) + F^+(x) & P_2(x) \\ H_1(x) & e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)} \tag{1.2.10}$$

$$C_2(x) = \begin{vmatrix} H_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} \overline{P_1}(x) \\ H_2(x) + F^+(x) & \overline{P_2}(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)} \tag{1.2.11}$$

donde

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} \overline{P_1}(x) \\ P_2(x) & \overline{P_2}(x) \end{vmatrix},$$

$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ixa_2,$

$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1\sqrt{a_0-x^2} - ixa_2,$

$P_2(x) = \beta_0 + \beta_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\beta_2,$

$\overline{P_2}(x) = \beta_0 - \beta_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\beta_2,$

$H_1(x) = G_{10}(x) - \alpha_0 V(x,1^-) - \alpha_1 \frac{dV}{dy}(x,1^-) + ixa_2 V(x,1^-)$ y

$H_2(x) = G_{11}^-(x) - \beta_0 V(x,0^+) - \beta_1 \frac{dV}{dy}(x,0^+) + ix\beta_2 V(x,0^+)$

Si $V(x,1-)$, $xV(x,1^-)$, $\frac{dV}{dy}(x,1^-)$, $V(x,0^+)$, $xV(x,0^+)$ y $\frac{dV}{dy}(x,0^+)$, pertenecen a $L_{2x}(\Re)$, es evidente que $H_1(x)$ y $H_2(X)$ pertenecen a $L_{2x}(\Re)$.

Luego sustituyendo (1.2.4), (1.2.9), (1.2.10) y (1.2.11) en (1.2.8) obtenemos una expresión en función de $F^+(x)$ y $F^-(x)$, dada de la siguiente forma:

$$F^-(x) = D(x)F^-(x) + H(x) \tag{1.1.11}$$

el cual es el Problema de Riemann (ver [8]) correspondiente al caso hiperbólico, en cuyo caso $D(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}$ es el coeficiente del problema Rieman y siendo el término independiente

$$H(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)} H_3(x) \tag{1.1.12}$$

Siendo

$H_3(x) = G_{12}^+(x) - \gamma_0 V(x,0^+) - \gamma_1 \frac{dV}{dy}(x,0^+) + ix\gamma_2 V(x,0^+),$

si $V(x,0^+)$, $xV(x,0^+)$ y $\frac{dV}{dy}(x,0^+)$ pertenecen a $L_{2x}(\Re)$, es evidente que $H_3(x)$ pertenece a $L_{2x}(\Re)$ y $\Delta_1(x)$ viene dada por la expresión:

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0-x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0-x^2}} P_3(x) \\ \overline{P_1}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix},$$

donde $P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2$ y

$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1\sqrt{a_0-x^2} - ix\gamma_2$, además el término $\Delta_2(x)$ viene dado por:

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} P_2(x) & P_3(x) \\ \overline{P_2}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix} = 2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)} H_3(x)$$

Si desarrollamos $D(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}$, nos queda:

$$\frac{e^{2\sqrt{a_0-x^2}}[A(a_0-x^2) + B\sqrt{a_0-x^2} + Cx^2 + D +}{e^{2\sqrt{a_0-x^2}}[A_1(a_0-x^2) + B_1\sqrt{a_0-x^2} + C_1x^2 + D_1 +}$$

$$D = \frac{+ix(E\sqrt{a_0-x^2} + F)] - A(a_0-x^2) + B\sqrt{a_0-x^2} -}{+ix(E_1\sqrt{a_0-x^2} + F_1)] - A_1(a_0-x^2) + B_1\sqrt{a_0-x^2}} \tag{1.2.13}$$

$$\frac{-Cx^2 - D - ix(-E\sqrt{a_0-x^2})}{-C_1x^2 - D_1 - ix(-E_1\sqrt{a_0-x^2} + F_1)}$$

donde

$A = \alpha_1\beta_1$	$A_1 = \alpha_1\gamma_1$
$B = -\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0$	$B_1 = -\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0$
$C = -\alpha_2\beta_2$	$C_1 = -\alpha_2\gamma_2$
$D = \alpha_0\beta_0$	$D_1 = \alpha_0\gamma_0$
$E = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$	$E_1 = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2$
$F = -\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_2$	$F_1 = -\alpha_0\gamma_2 - \alpha_2\gamma_0$

1.3 Condiciones de solubilidad del problema de Riemann obtenido a partir de un problema hiperbólico complejo

En este epígrafe se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de (1.1.3), (1.1.4) y (1.1.5), para que el coeficiente y el término independiente de (1.2.11) satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann.

De acuerdo con [2], para obtener la solución de (1.2.11) en la clase $L_{2x}^{\lambda\pm}(\mathbb{R})\,(L_{2x}^{\lambda\pm}(\mathbb{R}))$, se requiere que $D(x)$ pertenezca a la clase $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}}+1)$ y el término independiente pertenezca a $L_{2x}^{\lambda}(\mathbb{R})\,(L_{2x}(\mathbb{R}))$; siendo $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}}+1)$ la clase de las funciones f que satisfacen las condiciones siguientes:

i. f no tiene ceros, ni polos sobre $\mathbb{R}$

ii. $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=1$

iii. $(f-1)\in L_{2x}^{\lambda}(\mathbb{R})$

donde $L_{2x}^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})$, $L_{2x}^{\pm}(\mathbb{R})$ y $L_{2x}(\mathbb{R})$ es la clase $L_{2}^{\lambda\pm}(\overline{\mathbb{R}})$, $L_{2}^{\pm}(\mathbb{R})$y $L_2(\mathbb{R})$con respecto a la variable x.

También se requiere según [2], que supongamos $a_0 \leq 0$ para que el índice del problema de Riemann tenga una expresión análoga en toda la región.

1.3.1 Determinación de las condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición i

Para que pertenezca a la clase $L_{2x}^{\lambda}(\overline{\mathbb{R}}+1)$ tiene que cumplirse en primer lugar que $D(x)$ no tenga ni ceros ni polos sobre $\mathbb{R}$, lo cual se recoge en el siguiente teorema

Teorema 1:

La expresión de $D(x)$, no tiene ni ceros ni polos si se cumplen las condiciones:

$B^2-4(A-C)(Ca_0+D)<0, A\neq C$ y $E\neq 0$

$B_1^2-4(A_1-C_1)(C_1a_0+D_1)<0, A_1\neq C_1\ y\ E\neq 0$

Demostración del Teorema 1:

Para demostrar estos teoremas primero trabajaremos con la parte real, que no acompaña a la parte que tiene exponencial en el numerador, o sea:

$$\sqrt{a_0-x^2}=y\Rightarrow a_0-x^2=y^2 \tag{1.3.1}$$

Como tenemos que la parte real que no acompaña al exponencial tiene la forma

$$-A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}-Cx^2-D \tag{1.3.2}$$

sustituyendo (1.3.1) en (1.3.2), obtenemos

$$-Ay^2+By+Cy^2-Ca_0-D=0 \tag{1.3.3}$$

pues $x^2=a_0-x^2$, e igualamos a cero para poder encontrar las posibles raíces reales que pudieran anular la expresión (1.3.3). Trabajando algebraicamente en (1.3.3), obtenemos la ecuación algebraica de segundo orden y las dos raíces respectivamente, es decir

$$(A-C)y^2-By+(Ca_0+D)=0\Rightarrow y= \\ =\frac{B\pm\sqrt{B^2-4(A-C)(Ca_0+D)}}{2(A-C)},\ \text{con } A\neq C \tag{1.3.5}$$

por lo tanto si se cumple que

$$B^2-4(A-C)(Ca_0+D)<0 \tag{1.3.6}$$

no existen ceros, es decir, no existen raíces reales, solo serían raíces complejas conjugadas en el caso que $B\neq 0$ o raíces imaginarias conjugadas si $B=0$, en este último caso la relación $B^2-4(A-C)(Ca_0+D)<0$ se convertiría en $4(A-C)(Ca_0+D)>0$, el cual sería un caso particular de (1.3.6). Luego si se cumple (1.3.6) y (1.3.5) nos quedan las raíces complejas conjugadas en caso o imaginarias conjugadas si $B=0$.

$$y=\frac{B}{A-C}\pm i\frac{\sqrt{4(A-C)(Ca_0+D)-B^2}}{A-C}$$

Luego como $x^2=a_0-y^2$ e $y\in\mathbb{C}\Rightarrow x^2\in\mathbb{C}\Rightarrow x\in\mathbb{C}$, por lo tanto, la ecuación (1.3.2) no tiene raíces reales, cumpliéndose que $B^2-4(A-C)(Ca_0+D)<0$ con $A\neq C$.

Veamos ahora la parte imaginaria del numerador que tiene la forma:

$$-ix(-E\sqrt{a_0-x^2}+F) \tag{1.3.7}$$

Igualando (1.3.7) a cero nos queda la expresión:

$$-ix(-E\sqrt{a_0-x^2}+F)=0\Rightarrow x(-E\sqrt{a_0-x^2}+F)=0 \tag{1.3.8}$$

La expresión (1.3.8) tiene como raíces $x=0$ y $\pm\sqrt{a_0-\frac{F^2}{E^2}}$, como $a_0\leq 0$ y $\frac{F^2}{E^2}>0$, esto implica que la relación $a_0-\frac{F^2}{E^2}<0$, por lo tanto x serían raíces imaginarias conjugadas y entonces la única raíz posible es $x=0$, cumpliéndose que:

$$E\neq 0 \tag{1.3.9}$$

Veamos ahora la parte real del coeficiente del problema de Riemann que acompaña a la exponencial en el numerador, la cual tiene la forma:

$$\begin{aligned}&(D^2+\alpha^2)x(t)=\varepsilon\cdot f(t,x(t),x'(t)),\\&x(0)=x_0\ \ y\ \ x'(0)=x'_0\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

Haciendo igual que en la expresión (1.3.2),

$\sqrt{a_0-x^2}=y\Rightarrow a_0-x^2=y^2\Rightarrow x^2=a_0-y^2$

nos queda la relación:

$$\begin{aligned}&(A-C)y^2+By+(Ca+D)=\\&=0\Rightarrow y=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4(A-C)(Ca_0+D)}}{2(A-C)}\end{aligned}$$

Luego con la misma condición (1.3.6) y (1.3.5), la expresión anterior no tiene raíces reales.

Analicemos ahora la parte imaginaria del numerador que tiene la forma:

$$ix(E\sqrt{a_0-x^2})+F=0\Rightarrow x(E\sqrt{a_0-x^2}+F)=0\tag{1.3.11}$$

lo cual implica que $x=\pm\sqrt{a_0-\frac{F^2}{E^2}}$ y sucede lo mismo la única raíz posible es $x=0$, con $E\neq 0$.

Luego trasladando las mismas condiciones al denominador del coeficiente del problema de Riemann obtenemos un resultado parcial: los coeficientes de la exponencial y lo que no está afectado por la exponencial en el numerador y denominador respectivamente del coeficiente del problema de Riemann no se anulan simultáneamente si se cumple que:

$$\begin{aligned}&B^2-4(A-C)(Ca_0+D)<0,A\neq C\text{ y }E\neq 0\\&B_1^2-4(A_1-C_1)(C_1a_0+D_1)<0,A_1\neq C_1\text{ y }E_1\neq 0\end{aligned}\tag{1.3.12}$$

Solo falta ver si con la condición (1.3.12) sea posible que las ecuaciones:

$$\begin{aligned}&e^{2\sqrt{a_0-x^2}}[A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}+Cx^2+D+ix(E\sqrt{a_0-x^2}+F)]-\\&-A(a_0-x^2)+B\sqrt{a^0-x^2}-Cx_2-D-ix(E\sqrt{a_0-x^2}+F)=0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&e^{2\sqrt{a_0-x^2}}[A_1(a_0-x^2)+B_2\sqrt{a_0-x^2}+C_1x^2+D_1+\\&+ix(E_1\sqrt{a_0-x^2}+F_1)]-A_1(a_0-x^2)+B_1\sqrt{a_0-x^2}-\\&-C_1x^2-D_1-ix(-E_1\sqrt{a_0-x^2}+F_1)\end{aligned}$$

tengan ceros reales. Trabajemos primero en la primera ecuación, despejando nos queda:

$$\begin{aligned}e^{2\sqrt{a_0-x^2}}=&\frac{\dfrac{-[-A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}-Cx^2-D-}{[A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}+Cx^2+D+}}{\dfrac{-ix(-E\sqrt{a_0-x^2}+F)]}{+ix(-E\sqrt{a_0-x^2}+F)]}}\Rightarrow 2\sqrt{a0-x2}=\\&=\ln\frac{\dfrac{-[-A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}-Cx^2-D\cdot}{[A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}+Cx^2+D+}}{\dfrac{-ix(-E\sqrt{a_0-x^2}+F)]}{+ix(-E\sqrt{a_0-x^2}+F)]}}\end{aligned}\tag{1.3.13}$$

Las expresiones del numerador y denominador de la fracción que interviene en la ecuación (1.3.13) son números complejos, así mismo la división de dos números complejos es un número complejo y el logaritmo de un número complejo es un número complejo, por lo tanto el miembro derecho de la ecuación (1.3.13) es un número complejo. En el caso del miembro izquierdo de (1.3.13), el elemento $a_0\leq 0$ y $x^2\geq 0$, esto implica que $2\sqrt{a_0-x^2}$ es un número imaginario puro. Pero por las condiciones impuestas en (1.3.12), ni el numerador ni el denominador de (1.3.13) se anulan, y constituyen un número complejo con parte real e imaginaria $\forall x\in\mathbb{R}$. Por lo tanto, como el miembro derecho siempre es un número complejo y el izquierdo un número imaginario puro $\forall x\in\mathbb{R}$, entonces la igualdad (1.3.13) no puede ocurrir nunca para ningún $x\in\mathbb{R}$ y por tanto las ecuaciones

$$\begin{aligned}&e^{2\sqrt{a_0-x^2}}[A(a_0-x^2)+B\sqrt{a_0-x^2}+Cx^2+D+ix(E\sqrt{a_0-x^2}+F)]-\\&-A(a_0-x^2)+B\sqrt{a^0-x^2}-Cx_2-D-ix(E\sqrt{a_0-x^2}+F)=0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&e^{2\sqrt{a_0-x^2}}[A_1(a_0-x^2)+B_2\sqrt{a_0-x^2}+C_1x^2+D_1+\\&+ix(E_1\sqrt{a_0-x^2}+F_1)]-A_1(a_0-x^2)+B_1\sqrt{a_0-x^2}-\\&-C_1x^2-D_1-ix(-E_1\sqrt{a_0-x^2}+F_1)\end{aligned}$$

no tienen soluciones reales (se realiza el mismo procedimiento para la segunda ecuación).

1.3.2 Determinación de las condiciones para que satisfaga la condición ii

Teorema 2:

Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1**, entonces $\lim\limits_{|x|\to+\infty}D(x)=1$.

Demostración del Teorema 2:

Con las condiciones impuestas en el Teorema 1, y teniendo en cuenta que $e^{2\sqrt{a_0-x^2}}$ es un número complejo con módulo uno $(a_0-x^2<0),x\in\mathbb{R}$, entonces cuando $|x|\to+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} D(x) = \frac{C-A-E}{C_1-A_1-E_1}$

Entonces si $\frac{C-A-E}{C_1-A_1-E_1} = k; k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

Multiplicando el coeficiente del problema de Riemann por $\frac{1}{k}$ nos queda $\lim\limits_{|x|\to+\infty} D(x) = 1$.

1.3.3 Determinación de condiciones para que se *D(x)* satisfaga la condición iii

Teorema 3:

Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** y **Teorema 2** entonces $(D(x)-1) \in L_2^\lambda$.

Demostración del Teorema 3:

Es conocido que $D_A(\mathbb{R}) \subset H_1(\mathbb{R}) \subset H_{\lambda_2}(\mathbb{R}) \subset H\lambda$, $(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ para $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, donde por $D_A(\mathbb{R})$ se entiende las clases de funciones f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivadas acotadas sobre $\mathbb{R}$ que cumplan: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to-\infty} f(x)$

Como $L_2^\lambda = L_2(\mathbb{R}) \cap H_\lambda(\mathbb{R})$, probemos primero que $(D(x)-1) \in H_\lambda(\mathbb{R})$, para lo cual basta con probar que $(D(x)-1) \in D_A(\overline{\mathbb{R}})$. Por las condiciones impuestas $\lim\limits_{|x|\to+\infty} D(x) = 1$ (en caso de que el límite sea $k \neq 1$ se multiplica por $\frac{1}{k}$ como señalamos antes), y es fácil probar que $(D(x)-1)'$es una función acotada sobre $\mathbb{R}$, lo cual implica que $(D(x)-1) \in D_A(\overline{\mathbb{R}})$ y, por tanto, $(D(x)-1) \in H_\lambda(\mathbb{R})$. Falta solamente probar que $(D(x)-1) \in L_2^\lambda$. En efecto, como $[D(x)-1] = 0\left(\frac{1}{x}\right)$ y $D(x)$ y es continua en $\mathbb{R}$ por ser derivable por las condiciones de la hipótesis, se tiene que:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x)-1|^2 dx < +\infty$

Luego $(D(x)-1) \in L_2^\lambda$ y el teorema queda probado.

1.4.4 Determinación de las condiciones para que el término independiente de (1.2.12) sea elemento de $L_{2x}(\mathbb{R})$.

Teorema 4:

Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** y suponiendo que $V(x,1^-)$, $\frac{dV}{dy}(x,1^-)$, $V(x,0^+)$ y $\frac{dV}{dy}(x,0^+)$ pertenezcan a $L_{2x}(\mathbb{R})$ entonces se cumple que $H(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$.

Demostración del Teorema 4:

El término independiente del problema de Riemann tiene la forma:

$H(x) = \frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}$

donde

$H_1(x) = G_{10}(x) - \alpha_0 V(x,1^-) - \alpha_1 \frac{dV}{dy}(x,1^-) = ix\alpha_2 V(x,1^-)$

$H_2(x) = G_{11}^-(x) - \beta_0 V(x,0^+) - \beta_1 \frac{dV}{dy}(x,0^+) = ix\beta_2 V(x,0^+)$

$H_3(x) = G_{12}^+(x) - \gamma_0 V(x,0^+) - \gamma_1 \frac{dV}{dy}(x,0^+) = ix\gamma_2 V(x,0^+)$

Por las condiciones impuestas $G_{10}(x), G_{11}^+(x)$ y G_{12}^+ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$ y $\frac{2\beta_1\gamma_0\sqrt{a_0-x^2}}{\Delta_1(x)}$, $\frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}$ son funciones acotadas sobre $\mathbb{R}$.

Si el problema original es homogéneo $(g(x,y) \equiv 0)$ el **Teorema 4** quedaría en la siguiente forma:

Corolario del Teorema 4: Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** entonces se cumple que: $H(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$.

1.4 Cálculo del índice del coeficiente. Solución del problema de Riemann para los casos de índice cero

En este epígrafe buscaremos la solución en cuadraturas para los casos de índice cero.

Caso 1.4.1

$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ (Solamente $A \neq 0$ y $A_1 \neq 0$)

Por lo que nuestro problema de contorno se reduce a:

$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + a_0 u(x,y) = 0, a_0 \neq 0$

en la banda $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < +1\}$

y las condiciones de contorno

$a_1 u_y(x,1^-) = g_{10}(x)$

$\beta_1 u_y(x,0^+) = g_{11}(x), x < 0$

$\gamma_1 u_y(x,0^+) = g_{12}(x), x > 0.$

Además el coeficiente del Problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x)=\frac{e^{2\sqrt{a_0-x^2}}A(a_0-x^2)-A(a_0-x^2)}{e^{2\sqrt{a_0-x^2}}A_1(a_0-x^2)-A_1(a_0-x^2)}=$$
$$=\frac{A(e^{2\sqrt{a_0-x^2}}-1)}{A_1(e^{2\sqrt{a_0-x^2}}-1)}=\frac{A}{A_1}=\frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

En este caso como el coeficiente del problema de Riemann es una constante esto implica que no hay raíces ni en el numerador ni en el denominador por lo que el problema de Riemann correspondiente sería:

$$F^+(x)=\frac{\beta_1}{\gamma_1}F^-(x)-H_2(x)+\frac{\beta_1}{\gamma_1}H_3(x)$$

Pues $\Delta_2(x)=0$

haciendo

$$F_1^+(x)=F^+(x)\ \ F_1^-(x)=\frac{\beta_1}{\gamma_1}F^-(x)\ \text{ y}$$
$$H_4(x)=-H_2(x)+\frac{\beta_1}{\gamma_1}H_3(x)=\beta_1G_{12}^+$$

nos queda el Problema de Salto, donde utilizamos para cada caso el concepto de operador proyección para buscar la solución: $F_1^+(x)-F_1^-(x)=H_4(x)$

Luego podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5:

Si $a_0<0$ y $V(x,y),xV(x,0^+)$ y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces el problema para este caso tiene solución única en la clase (1.1.6) dada por $u(x,y)=V^{-1}[U(x,y)]$.

Donde

$$U(x,y)=C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y}+C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y}+V(x,y)\ \text{ y}$$
$$F^+(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_4(t)e^{ixt}dt,$$

siendo $h_4=V^{-1}[H_4]=V^{-1}[\beta_1G_{12}^+-G_{11}^-]$, y

$$C_1(x)=\begin{vmatrix}H_2(x)+F^+(x) & P_2(x)\\ H_1(x)\ e^{\sqrt{a_0-x^2}} & P_1(x)\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta(x)}$$
$$C_2(x)=\begin{vmatrix}H_1(x)\ e^{-\sqrt{a_0-x^2}} & \overline{P}_1(x)\\ H_2(x)+F^+(x) & \overline{P}_2(x)\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta(x)}$$

Para el caso homogéneo, es decir $V(x,y)\equiv 0$ tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5´:

Si $a_0<0$, entonces el problema para este caso tiene solución única en la clase (1.2.6) dada por $u(x,y)=V^{-1}[U(x,y)]$.

Caso 1.4.2

$$\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0\ \text{ y }\ \frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{\beta_0}{\beta_1}=\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$$

(Solamente $A\neq{}_0, A_1\neq 0, D\neq 0$ y $D_1\neq 0$), esto implicaría que $C=C_1=B=B_1=E=E_1=F=F_1=0, B=B_1$, por lo que nuestro problema de contorno se reduce a:

$u_{xx}(x,y)=-u_{yy}(x,y)+a_0u(x,y)=0, a_0\neq 0$

en la banda $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y<+1\}$

y las condiciones de contorno

$\alpha_0u(x,1^+)+a_1u_y(x,1^-)=g_{10}(x)$

$\beta_0u(x,0^+)+\beta_1u_y(x,0^+)=g_{11}(x), x<0$

$\gamma_0u(x,0^+)+\gamma_1u_y(x,0^+)=g_{12}(x), x>0$

Además el coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x)=\frac{-\alpha_1\beta_1(a_0-x^2)+a_0\beta_0}{-\alpha_1\gamma_1(a_0-x^2)+a_0\gamma_0}$$

Las raíces del numerador tienen la forma:

$$x=\pm i\sqrt{\frac{Aa_0+D}{A}}; \frac{D}{A}<-a_0\ ,$$

las cuales son raíces imaginarias conjugadas. Las raíces del denominador tienen la forma:

$$x=\pm i\sqrt{\frac{A_1a_0+D_1}{A_1}}; \frac{D_1}{A_1}<-a_0,$$

las cuales son raíces imaginarias conjugadas. Por lo tanto, como por definición $IndD(x)=Z-P$, esto implica que el índice es cero y el problema de Riemann queda de la forma:

$$F(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^-(x)+$$
$$+H_1(x)\frac{2\sqrt{a_0-x^2}(\beta_1\gamma_0-\beta_0\gamma 1)}{(e^{2\sqrt{a_0-x2}}-1)\alpha_1\gamma_1(a_0-x^2)+\alpha_0\gamma_0}-$$
$$-H_2(x)+\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_3(x)$$

donde $a>0$, $b>0$, $c>0$ y $d<0$.

Como estamos buscando funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ prolongables analíticas al semiplano superior e inferior obtenemos:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x)=\frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^-(x)+$$
$$H_1(x)\frac{2\sqrt{a_0-x^2}(\beta_1\gamma_0-\beta_0\gamma_1)}{(e^{2\sqrt{a0-x2}}-1)\alpha_1\gamma_1(a_0-x^2)+\alpha_0\gamma_0}\frac{(x-di)}{(x-ci)}-$$
$$-H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)$$

haciendo:

$$F_1^+=\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x)\ \ F_1^-(x)=\frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^-(x)\ \text{ y}$$

nos queda el Problema de Salto:

$F_1^+(x)-F_1^-(x)=H_5(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_5(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

donde

$U(x,y) = C_1(x)e^{-\sqrt{(a_0-x^2)}y} + C_2(x)e^{\sqrt{(a_0-x^2)}y} + V(x,y)$ y

$$F^+(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(x-bi)}{(x-di)}\int_0^{+\infty} h_5(t)e^{ixt}dt$$

siendo

$$h_5 = V^{-1}[H_5] = V^{-1}\begin{bmatrix} H_1(x)\dfrac{2\sqrt{a_0-x^2}(\beta_1\gamma_0-\beta_0\gamma_1)}{(e^{2\sqrt{a_0-x2}}-1)}\dfrac{(x-di)}{(x-bi)} - \\ -H_2(x)+\dfrac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x) \end{bmatrix}$$

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_5(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3

$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$

(Solamente $C \neq o, C_1 \neq 0, D \neq 0, D_1 \neq 0, F \neq 0 \;\; y \;\; F_1 \neq 0$)

Por lo que nuestro problema de contorno se reduce a:

$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + a_0 u(x,y) = 0, a_0 \neq 0$

en la banda $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < +1\}$

y las condiciones de contorno

$\alpha_0 u(x,1^+) + \alpha_2 u_x(x,1^-) = g_{10}(x)$

$\beta_0 u(x,0^+) + \beta_2 u_x(x,0^+) = g_{11}(x), x < 0$

$\gamma_0 u(x,0^+) + \gamma_2 u_x(x,0^+) = g_{12}(x), x > 0$

Además el coeficiente del problema de Riemann queda de la forma: $D(x) = \dfrac{[Cx^2 + D + ixF]}{[C_1x^2 + D_1 + ixF_1]}$

Por lo tanto, las raíces del numerador (denominador) serían:

$$x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2 - 4DC}}{2C}\left(x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F_1 - 4D_1C_1}}{2C_1}\right)$$

Tanto el numerador como el denominador de $D(x)$ son polinomios de segundo grado. La solución del problema de Riemann depende del índice del coeficiente $D(x)$ y para nuestro problema solo estudiaremos los casos de índice cero, para todos estos casos $\Delta_2(x) = 0$.

Caso 1.4.3.1

$F = 0\,(F_1 = 0) \Rightarrow -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_0}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_0}{\gamma_2}$, las raíces quedarían de la forma:

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4DC}}{2C} = \pm\alpha_2\beta_0 i\left(x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-4D_1C_1}}{2C_1} = \pm\alpha_2\gamma_0 i\right), |4DC| \geq 0$$

las cuales son raíces imaginarias conjugadas, dos ceros y dos polos: un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior. El coeficiente del problema de Riemann queda de la forma: $D(x) = \dfrac{Cx^2 + D}{C_1x^2 + D_1}$

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_3(x)$$

donde $a > 0, b > 0, c > 0$ y $d > 0$

de lo cual obtenemos:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) = \frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)$$

haciendo:

$F_1^+(x) = \dfrac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) \;\; F_1^-(x) = \dfrac{(x-ai)}{(x-ci)}F^-(x)$ y

$H_6(x) = -H_2(x) + \dfrac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)$

nos queda el Problema de Salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_6(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_6(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

donde

$U(x,y) = C_1(x)e^{-\sqrt{a_0-x^2}y} + C_2(x)e^{\sqrt{a_0-x^2}y} + V(x,y)$ y

$$F^+(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(x-bi)}{(x-di)}\int_0^{+\infty} h_6(t)e^{ixt}dt$$

donde $h_6 = V^{-1}[H_6] = V^{-1}\left[-H_2(x) + \dfrac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)\right]$

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_6(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.2

$D = 0\,(D_1 = 0) \Rightarrow \alpha_0 = 0$ o $\beta 0 = \gamma 0 = 0$, las raíces quedarían de la forma:

$$x1,2 = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2}}{2C} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F^2}}{2C} =$$

$$= \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{iF}{C} \end{cases} (x_{1,2} = \frac{-iF \pm \sqrt{-F2}}{2C_1}) \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{iF_1}{C_1} \end{cases}$$

las cuales son raíces imaginarias y la raíz cero que se simplifica la del numerador con la del denominador en el coeficiente del problema de Riemann. El coeficiente del problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x) = \frac{Cx^2 + ixF}{C_1x^2 + ixF_1}$$

Esto conduce a los siguientes subcasos:

Caso 1.4.3.2 a)

$sgF \neq sgC$, las raíces $x = -\dfrac{iF}{C}\left(x = -\dfrac{iF_1}{C_1}\right)$ son imaginarias en el semiplano superior.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)}{(x-bi)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-bi)}H_3(x)$$

donde $a>0$ y $b>0$, haciendo: $F_1^{+}(x)=F^{+}(x)$

$$F_1^{-}(x)=\frac{(x-ai)}{(x-bi)}F^{-}(x) \text{ y } H_7(x)=-H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-bi)}$$

y nos queda el Problema de Salto: $F_1^{+}(x)=-F_1^{-}(x)=H_7(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_7(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, $H_7(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.2 b)

$sgF\neq sgC$, las raíces $x=-\frac{iF}{C}\left(x=-\frac{iF_1}{C_1}\right)$ son imaginarias en el semiplano inferior.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)}{(x-bi)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-bi)}H_3(x)$$

donde $a<0$ y $b<0$ y obtenemos:

$$\frac{(x-bi)}{(x-ai)}F^{+}(x)=F^{-}(x)-\frac{(x-ai)}{(x-bi)}H_2(x)+H_3(x)$$

y haciendo:

$$F_1^{+}(x)=\frac{(x-bi)}{(x-ai)}F^{+}(x) \quad F_1^{-}(x)=F^{-}(x) \text{ y}$$

$$H_8(x)=-\frac{(x-bi)}{(x-ai)}H_2(x)+H_3(x)$$

y nos queda el Problema de Salto: $F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_8(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_8(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, $H_8(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.3

$$sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|>$$
$$>F^2(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|>F_1^2)$$

Dos ceros y dos polos en el semiplano superio complejos, donde Re$a>0$, Re$a=-$Reb, Re$c>0$, Re$c=-$Red y Im$a=$ Im$b>0$, Im$c=$ Imb.

Caso 1.4.3.4

$$sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|<F^2\sqrt{-F^2-4DC}>$$
$$>F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1=sgC_1, |4D_1C_1|<F_1^2\sqrt{-F_1^2-4D_1C_1}>F_1)$$

Dos ceros y dos polos imaginarios puros en el semiplano superior. donde $a>0$, $b>0$, $c>0$ y $d>0$.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

donde obtenemos:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

haciendo:

$$F_1^{+}(x)=F^{+}(x) \quad F_1^{-}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F-(x) \text{ y}$$

$$H_9(x)=-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

y nos queda el problema de Salto: $F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_9(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_9(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_9(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.5

$$sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|<F^2\sqrt{-F^2-4DC}>$$
$$>F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|<F_1^2\sqrt{-F_1^2-4D_1C_1}>F_1)$$

Un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior imaginarios puros, donde $a>0$, $b<0$, $c>0$ y $d<0$.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_3(x)$$

donde obtenemos:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^{+}(x)=\frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^{-}(x)-$$
$$-\frac{(x-di)}{(x-bi)}H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-ci)}+H_3(x)$$

y haciendo:

$$F_1^{+}(x)=\frac{(x-bi)}{(x-ai)}F^{+}(x) \quad F_1^{-}(x)=F^{-}(x) \text{ y}$$

$$H_8(x)=-\frac{(x-bi)}{(x-ai)}H_2(x)+H_3(x)$$

y nos queda el problema de Salto: $F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_{10}(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_{10}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_{10}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.6

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| >$$
$$> F^2 (sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$$

Dos ceros complejos y dos polos complejos en el semiplano inferior, donde Re$a > 0$, Re$a = -$Reb, Re$c > 0$, Re$c = -$Red y Ima = Im$b < 0$, Imc = Im$b < 0$.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

donde obtenemos:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} F^+(x) = F^-(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} H_2(x) + H_3(x)$$

y haciendo:

$$F_1^+(x) = \frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} F^+(x) \quad F_1^-(x) = F^-(x) \text{ y}$$

$$H_{11}(x) = -\frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)(x-b)} H_2(x) + H_3(x)$$

y nos queda el problema de Salto: $F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_{11}(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_{11}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_{11}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.7

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2 \sqrt{-F^2 - 4DC} >$$
$$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2 \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior *($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).*

Caso 1.4.3.8

$$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2 \sqrt{-F^2 - 4DC} <$$
$$< F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).

Caso 1.4.3.9

$$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2 \sqrt{-F^2 - 4DC} >$$
$$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).

Caso 1.4.3.10

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} >$$
$$> F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).

Caso 1.4.3.11

$$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} >$$
$$> F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).

Caso 1.4.3.12

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} <$$
$$< F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$$

Raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).

Caso 1.4.3.13

$$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} >$$
$$> F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Raíces imaginarias puras, un cero y un polo en el semiplano superior y un cero y un polo en el semiplano inferior ($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).

Caso 1.4.3.14

$$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F_1 - 4DC} >$$
$$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2 \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$$

Un cero y un polo en el semiplano superior imaginarios puros y un cero y un polo en el semiplano inferior imaginarios puros ($a > 0$, $b < 0$, $a = -b$, $c > 0$ y $d < 0$, $c = -d$).

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)} H_3(x)$$

por lo tanto obtenemos:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^{+}(x)=\frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^{-}(x)-$$
$$-\frac{(x-di)}{(x-bi)}H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)$$

y haciendo:

$$F_1^{+}(x)=\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^{+}\quad F_1^{-}(x)=\frac{(x-ai)}{(x-ci)}F^{-}(x)\ \text{ y}$$
$$H_{12}(x)=-\frac{(x-di)}{(x-bi)}H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-ci)}H_3(x)$$

y nos queda el problema de Salto: $F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_{12}(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_{12}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_{12}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.15

$$sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|>$$
$$>F^2(sgC_1=sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1}<F_1)$$

Raíces complejas en el numerador e imaginarias puras en el denominador, dos ceros y dos polos en el semiplano superior, donde Re$a>0$, Re$a=-$Reb, Im$a=$ Im$b>0$, $c>0$, $d>0$.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}H_3(x)$$

y $\Delta_2(x)=0$

por lo que obtenemos:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}F-(x)-$$
$$-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}H_3(x)$$

haciendo:

$$F_1^{+}(x)=F^{+}(x)\quad F_1^{-}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)\ \text{ y}$$
$$H_{13}(x)=-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}H_3(x)$$

nos queda el Problema de Salto: $F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_{13}(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_{13}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_{13}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.16

$$sgC=sgD, sgF=sgC, \sqrt{-F_1-4DC}<$$
$$<F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1=sgC_1, |4D_1C_1|>F_1^2)$$

Dos ceros en el semiplano inferior imaginarios y dos polos en el semiplano inferior complejos, donde $a<0$, $b<0$ y Re$c>0$, Re$c=-$Red, Im$c=$ Im$d<0$.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

donde obtenemos:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)}F^{+}(x)=F^{-}(x)-\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)}H_2(x)+H_3(x)$$

haciendo:

$$F_1^{+}(x)=\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)}F^{+}(x)\quad F_1^{-}(x)=F^{-}(x)\ \text{ y}$$
$$H_{14}(x)=-\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)}H_2(x)+H_3(x)$$

nos queda el Problema de Salto: $F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_{14}(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_{14}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_{14}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.17

$\alpha_1=\beta_0=\beta_2=\gamma_0=\gamma_2=0$ (Solamente B $\neq 0$ y E $\neq 0$)

Por lo que nuestro problema de contorno se reduce a:

$$u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)+a_0u(x,y)=0, a_0\neq 0$$

en la banda $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<+1\}$

y las condiciones de contorno

$$\alpha_0u(x,1^{-})+\alpha_2u_x(x,1^{-})=g_{10}(x)$$
$$\beta_1u_y(x,0^{+})=g_{11}(x), x<0$$
$$\gamma_1u_y(x,0^{+})=g_{12}(x), x>0$$

Además el coeficiente del Problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x)=\frac{[B\sqrt{(a_0-x^2)}+ixE\sqrt{(a_0-x^2)}]}{[B_1\sqrt{(a_0-x^2)}+ixE_1\sqrt{(a_0-x^2)}]}$$

haciendo $w=\sqrt{a_0-x^2}$

nos queda la ecuación $Bw+ixEw=0$ que tiene raíz en

$$x=-\frac{B}{iE}=-\frac{Bi}{i^2E}=\frac{Bi}{E}\left(x=-\frac{B_1}{iE_1}=-\frac{B_1i}{i^2E_1}=-\frac{B_1i}{E_1}\right)$$

Este es un caso de índice cero si

$\frac{B}{E}>0$ y $\frac{B_1}{E_1}>0$ o $\frac{B}{E}<0$ y $\frac{B_1}{E_1}<0$

El problema de Riemann quedaría de la forma:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)}{(x-bi)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-bi)}H_3(x)$$

donde

$\Delta_2(x)=0$ y $a>0, b>0$ si $\frac{B}{E}>0$ y $\frac{B_1}{E_1}>0$ y

$a<0, b<0$ si $\frac{B}{E}<0$ y $\frac{B_1}{E_1}<0$

donde tenemos que si:

$F_1^+(x)=F^+(x)$

$F_1^-(x)=\frac{(x-ai)}{(x-bi)}F^-(x)$ y

$H_{15}(x)=-H_2(x)+\frac{(x-ai)}{(x-bi)}H_3(x)$

nos queda el Problema de Salto: $F_1^+(x)-F_1^-(x)=H_{15}(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_{15}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_{15}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.18

$B=0$ y $E=0\,(B_1=0$ y $E_1=0)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{\beta_0}{\beta_1}=\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)\Rightarrow D(x)=\frac{\beta_1}{\gamma_1}$

El problema de Riemann quedaría de la forma:

$F^+(x)=\frac{\beta_1}{\gamma_1}F^-(x)-\frac{2\alpha_1\beta_0\sqrt{a_0-x^2}}{a_0-x^2+(\alpha_0-\alpha_2)^2}H_1(x)-$

$-H_2(x)+\frac{\beta_1}{\gamma_1}H_3(x)$

donde tenemos que si:

$F_1^+(x)=F^+(x)\;\; F_1^+(x)=\frac{\beta_1}{\gamma_1}F^-(x)$ y

$H_{16}(x)=-\frac{2\alpha_1\beta_0\sqrt{a_0-x^2}}{a_0-x^2+(\alpha_0-\alpha_2)}$

nos queda el Problema de Salto: $F_1^+(x)-F_1^-(x)=H_{16}(x)$

Luego podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5** con $H_{16}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Para el caso homogéneo, podemos enunciar un teorema similar al **Teorema 5´**, con $H_{16}(x)$ en lugar de $H_4(x)$.

Caso 1.4.3.19

$D(x)\neq 0$ y $D_1(x)\neq 0$ con todos los demás coeficientes iguales a cero. Esto implica $\alpha_0\neq 0,\ \beta_0\neq 0$ y $\lambda_0\neq 0$ es decir se reduce al problema de contorno siguiente:

$u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)+a_0u(x,y)=0, a_0\neq 0$

en la banda $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y<1\}$

y las condiciones de contorno

$\alpha_0u(x,1^-)=g_{10}(x)$

$\beta_0u(x,0^+)=g_{11}(x), x<0$

$\gamma_0u(x,0^+)=g_{12}(x) .x>0$

donde el coeficiente del Problema de Riemann queda de la forma:

$D(x)=\frac{D}{D_1}=\frac{\beta_0}{\gamma_0}$

Y se desarrolla de la misma manera que el Caso 1.4.1.

Conclusiones

A partir de las condiciones impuestas en cada caso estudiado, hemos encontrado la solución en cuadraturas de un problema hiperbólico con condiciones de contorno complejas, tanto para una ecuación homogénea como para una no homogénea. Es interesante la técnica utilizada consistente en reducir el problema original con el auxilio de la Transformada de Fourier.

Los resultados constituyen inobjetablemente un aporte teórico a la teoría de los Problemas de Contorno de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues no existen técnicas analíticas en la actualidad, que aborden problemas de esta naturaleza, donde las condiciones de contorno difieren en diferentes partes del eje.

La solución obtenida mediante integrales de tipo Fourier permite que los profesionales que utilizan modelos hiperbólicos puedan encontrar la solución con relativa facilidad y con la ayuda de un paquete matemático adecuado, sin que sea necesario que posean un dominio profundo de la teoría antes expuesta.

La solución para los casos de índice uno, dos, menos uno y menos dos serán analizados en próximos artículos.

Referencias bibliográficas

[1] MEDEROS, O. B. y BATARD, L. F. "El problema de Riemann con parámetro pequeño en el espacio ". Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[2] BATARD, L. F. "Las ecuaciones diferenciales y el Problema de Riemann con parámetro pequeño". Tesis de Doctorado. 1990.

[3] MEDEROS, O. B. y BATARD, L. F. "Reducción de una clase de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales con parámetro pequeño al Problema de Riemann". Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[5] GAJOV, F.D. y CHERSKY, YU.I. "Ecuaciones de tipo Convolución". Moscú. Ciencia.1978.

[6] TIJONOV. SAMARSKI. "Ecuaciones de la Física Matemática"

[7] GAJOV, F.D. "Problemas de Contorno"

[8] BUDAK. SAMARSKI. "Problemas de la Física Matemática"

2012 LORGIO F. BATARD MARTÍNEZ, YANELIS ESTRADA HERNÁNDEZ. "Solución de un problema de contorno de gran complejidad para ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico: caso índice cero". Revista Ciencias Matemáticas. Aceptado para su publicación

[9] 2012 LORGIO F. BATARD MARTÍNEZ, YANELIS ESTRADA HERNÁNDEZ. "Solución de un problema de contorno de gran complejidad para ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico: caso índices diferentes de cero". Revista Ciencias Matemáticas. Aceptado para su publicación

[10] R.A. ADAMS, Sobolev Spaces, Academic Press, 1976.

[11] S. AGMON, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, 1965.

[12] J.P. AUBIN, Approximation of Elliptic Boundary Value Problems, Wiley, 1972.

[13] H. BREZIS, Operateurs Maximaux Monotones, North-Holland Math. Studies 5, 1973.

[14] F.E. BROWDER, Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces, Proc. Symp. Pure Math., 18, part 2, Amer. Math. Soc., 1976.

[15] P. BUTZER y H. BERENS, Semi-groups of Operators and Approximations, Springer, 1967.

[16] A. CARASSO y A. STONE (editors), Improperly Posed Boundary Value Problems, Pitman, 1975.