Ciencias Matemáticas, Vol. 35, No. 2, 2021, Pag. 73-79
Recibido 11-2020, Aceptado 09-2021

Álgebras triangulares l-hereditarias de tipo de representación manso
Triangular l-hereditary algebras of tame representation

MSc. Beatriz Pérez López[1], Dr.C. José Fidel Hernández Advíncula[2]*

Resumen En este trabajo se realiza un estudio de las álgebras localmente hereditarias a través de sus relaciones con los posets y sus álgebras de incidencia con el fin de reescribir a detalle la demostración del teorema que establece condiciones para que el álgebra l-hereditaria $T_2(\Lambda)$ sea de tipo representación manso.

Abstract In this work we study locally hereditary algebras through their relations with the posets and their incident algebras in order to rewrite in detail the proof of the theorem that establishes conditions for the locally hereditary algebra $T_2(\Lambda)$ to be of the tame representation type.

Palabras Clave
Álgebras de incidencia — álgebra l-hereditaria — tipo de representación

[1] *Departamento de Matemática-Física, Universidad "José Martí" de Sancti Spíritus, Sancti Spíritus, Cuba, beatrizpl@uniss.edu.cu*
[2] *Departamento de Matemática, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba, fidel@matcom.uh.cu*
***Autor para Correspondencia**

Introducción

A partir del desarrollo de la teoría de representaciones de álgebras surgieron nuevos métodos y herramientas para clasificar las álgebras de acuerdo a la cantidad de objetos indescomponibles de estas; siendo las representaciones de los conjuntos parcialmente ordenados (posets), problemas matriciales algunas de las más utilizadas, así como los métodos diagramáticos que son esenciales para su estudio y comprensión.

El objetivo de este artículo es mostrar un caso particular de las álgebras localmente hereditarias que constituyen álgebras de incidencia de algún poset y cuya extensión por si misma posee tipo de representación manso, apoyándonos en los métodos diagramáticos y para lo cual se darán algunos aspectos importantes de la demostración del teorema principal.

1. Álgebras de incidencia de un conjunto parcialmente ordenado.

Sea K un cuerpo e $I=\{1,\dots,n\}$ un poset finito, con la relación de orden $\preceq$.

Definición 1.1. *Sea el poset I, se denomina K-álgebra de incidencia de I, KI, a la subalgebra de $\mathbb{M}_n(K)$ generada por las matrices unitarias $e_{ij}\in\mathbb{M}_n(K)$ tal que $i\preceq j$. Se puede describir como*

$$KI=\{A=[a_{ij}]\in\mathbb{M}_n(K)\quad:\quad a_{ij}=0\quad si\quad i\npreceq j\}.$$

O sea KI es el álgebra generada por todos las matrices e_{ij} con $i\preceq j$, con la siguiente relación:

$$e_{ij}e_{rq}=\begin{cases}0 & \text{si}\quad j\neq r\\ e_{iq} & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Se nota que el conjunto formado por las matrices $\{e_j\}_{j\in I}$ es un conjunto completo de idempotente primitivo ortogonales de KI[4].

Definición 1.2. *Sea el poset finito $(I,\preceq)$ se llama poset I-extendido (coextendido) y se denota por $I^*=I\cup\{*\}$ ($I_\emptyset=\{\emptyset\}\cup I$) a una extensión de I por un elemento maximal (minimal) $*=n+1$ ($\emptyset=0$).*

De igual forma el álgebra de incidencia del poset extendido KI^* se define como una subálgebra de $\mathbb{M}_{n+1}(K)$ tal que se puede escribir de la forma

$$KI^*=\begin{pmatrix} K & {}_1K_2 & {}_1K_3 & \dots & {}_1K_n & {}_1K_{n+1}\\ 0 & K & {}_2K_3 & \dots & {}_2K_n & {}_2K_{n+1}\\ 0 & 0 & K & \dots & {}_3K_n & {}_3K_{n+1}\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & {}_nK_n & {}_nK_{n+1}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & {}_{n+1}K_{n+1}\end{pmatrix}$$

donde ${}_iK_j=K$ si $i\preceq j$ en I y ${}_iK_j=0$ en otro caso.

Análogamente se describe el álgebra de incidencia del poset extendido $KI_\emptyset$ como una subálgebra de $\mathbb{M}_{n+1}(K)$.

El álgebra KI^* puede ser expresada en forma triangular como

$$KI^* = \begin{pmatrix} T & M_{TK} \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

Donde $T = KI$ es el álgebra de incidencia del poset $\mathscr{I}$ y

$$M_{TK} = \left.\begin{pmatrix} K \\ \vdots \\ K \end{pmatrix}\right\} n$$

es considerado como un $T-K$- bimódulo.

1.1 Descripción de los módulos sobre álgebras de incidencias.

Se denotará por $Mod(KI^*)$ a la categoría de todo los módulos derechos sobre KI^* y por $mod(KI^*)$ a la subcategoría plena formada por todos los módulos de KI^* que son finitamente generados, a estos último se dirigirá nuestra atención.

El álgebra KI^* es de dimensión finita sobre K [12],[4].

Definición 1.3. *Un módulo X de $mod(KI^*)$ puede ser identificado por el sistema*

$$X = (X_i;\varphi_{j,i})_{i\preceq j\preceq *},$$

donde X_i es un espacio de dimensión finita a la derecha sobre K y $\varphi_{j,i} : X_i \to X_j$ para $i \preceq j$ son aplicaciones lineales tal que $\varphi_{j,j} = id$ para todo $j \in \mathscr{I}^*$ y $\varphi_{j,i}.\varphi_{i,s} = \varphi_{j,s}$ para $s \prec i \prec j$.

Cada $X_j = Xe_j$ y $\varphi_{j,i}(xe_i) = xe_ie_{j,i} = xe_{ji} = xe_{j,i}e_j$ para $i \prec j$. Cualquier KI^*-homomorfismo f entre X e Y está definido por el sistema

$$f = (f_i) = (f_1,\ldots,f_n,f_*)$$

de aplicaciones lineales $f_i : X_i \to Y_i$ y satisface la condición de conmutatividad $\varphi'_{t,j}f_j = f_t\varphi_{t,j}$ para todo $1 \prec j \prec t \prec n+1$ donde cada $f_j(xe_j) = f(xe_j)$.

Cada módulo proyectivo indescomponible es isomorfo a algún módulo de la forma $P_j = e_jKI^*$ para algún $j \in KI^*$; en donde $P_{n+1} = P_* = e_*KI^*$, [12]. De igual manera podemos identificar a los módulos P_j de la forma del par (Y_i,φ_{ti}) donde $Y_i = K$ si $j \preceq i$ y es 0 de otra manera, $\varphi_{ti} : Y_i \to Y_t$ es la identidad para $j \preceq i \prec t \preceq n+1$ y es 0 en caso contrario. Por tanto el módulo puede ser descrito como

$$P_j = \left(0,\ldots,0,K,K_{j,j+1},\ldots,K_{j,n+1};\varphi_{t,i}\right)_{i\prec t}$$

Los módulos simples se pueden describir de la forma

$$S^{(j)} = \left(S_i^{(j)};0\right)_{i\in\mathscr{I}^*}, \qquad j \in \mathscr{I}^*$$

donde $S_j^{(j)} = K$ y $S_i^{(j)} = 0$ para $i \neq j$.

Sea el módulo $X = (X_i;\varphi_{j,i})_{i\preceq j}$. El radical de X es el submódulo $J(X) = XJ(KI^*)$ que puede ser descrito también como

$$J(X) = \left(\overline{X}_i,\varphi_{j,i}\right)_{i\preceq j}$$

donde $\overline{X}_j = \sum_{i\prec j} Im(\varphi_{j,i})$. Mientras que

$$\mathbf{top}(X) = X/J(X) = \left(X_j/\overline{X}_j;0\right)$$

Como todo módulo posee cubierta proyectiva, se puede describir esta de la forma

$$P(X) = P_1^{r_1} \oplus P_2^{r_2} \oplus \ldots \oplus P_{n+1}^{r_{n+1}}$$

donde cada $r_j = \dim\left(X_j/\overline{X}_j\right)_K$. En particular se tiene que $P\left(S^{(j)}\right) \cong P_j$.

Utilizando el funtor contravariante $D = \mathrm{Hom}(-,K)$, el cuál proporciona una dualidad entra las categorías $mod(KI^*)$ y $mod(KI^{*op})$, se tiene que los módulos inyectivos indescomponibles de KI^* son de la forma

$$\mathrm{E}^{(j)} = \left(E_i^{(j)};\varphi_{j,i}\right)_{i\prec j}$$

donde $E_i^{(j)} = K$ para $i \preceq j$, $E_i^{(j)} = 0$ si no y $\varphi_{j,i} = id$ para $i \prec j$ y 0 de otra forma.

1.2 Álgebras localmente hereditarias y álgebras de incidencia.

Definición 1.4 (Álgebras l-hereditarias.)**.** *Sea Λ una K-álgebra, se dice que Λ es localmente hereditaria (l-hereditaria) si cumple que todo morfismo no nulo entre proyectivos indescomponible es un monomorfismo.*

Algunas caracterizaciones de las álgebras localmente hereditarias determinan sus principales características se muestran a continuación y sus demostraciones aparecen en [11], [2].

Proposición 1.1. *Λ es un álgebra l-hereditaria si y solo si todo submódulo local de un proyectivo inescindible es proyectivo.*

Proposición 1.2. *Si Λ es un álgebra l-hereditaria entonces $\mathscr{R}$ no posee relaciones cero.*

Con el siguiente lema, que se encuentra en [12], se observa la relación entre las álgebras de incidencia de un poset y las álgebras l-hereditarias.

Lema 1.1. a) *Las álgebras KI, KI^* y $KI_\emptyset$ son localmente hereditaria.*

b) *$P_* = P_{n+1}$ es el único simple proyectivo (salvo isomorfismo) de KI^* y el soc $(P_j) = P_*$ para todo $j \in \mathscr{I}$. El módulo $E_{KI^*}(P_*)$ es isomorfo al $\mathscr{I}$-espacio $M = (M_0;M_i)_{i\in\mathscr{I}}$ con $M_0 = M_i = K$ para toda $i \in \mathscr{I}$.*

2. Extensión por un punto.

Sea A una K-álgebra de dimensión finita, básica y conexa y sea M un A-módulo a la izquierda, considerado también como un A-K-bimódulo.

Definición 2.1. *Se llama extension por un punto de A en M al álgebra matricial definida por*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & K \end{pmatrix} := A\,[M]$$

Los idempotentes de Λ son la unidad de A, 1_A, formada por los idempotentes de A, $e_1, e_2, \ldots, e_n$, y un nuevo idempotente al que se denotará por e_{n+1}. Los cuales definen las inmersiones de $modK$ y $modA$ en $mod\Lambda$ [8].

De igual forma se puede hablar de coextensión por un punto definido por $[M]A := \begin{pmatrix} K & M \\ 0 & A \end{pmatrix}$ el cual es el dual de lo anterior [9].

El carcaj de $A\,[M]$ contiene al carcaj asociado A como un un subcarcaj pleno y existe un vértice adicional, llamado vértice de extensión de $A\,[M]$ y siempre en un fuente. De forma análoga, el carcaj de la coextensión contiene al carcaj asociado a A con un vértice adicional que siempre es pozo.

Un ejemplo de extensión por un punto es el álgebra de incidencia del poset $I^* = I \cup \{*\}$, donde I es un poset de n elementos; pues como se definió en la sección 2.1 del capítulo 2, esta se puede escribir como $KI^* = \begin{pmatrix} KI & M \\ 0 & K \end{pmatrix}$ donde $M = \left.\begin{pmatrix} K \\ K \\ \vdots \\ K \end{pmatrix}\right\} n$. O sea KI^* es la extensión del álgebra KI por un punto máximo. Dualmente una coextensión sería el álgebra $KI_{\emptyset}$, coextensión de KI por un punto mínimo.

3. Tipos de representaciones de álgebras.

La teoría de representaciones, como ya se abordó anteriormente, se enfoca en clasificar las álgebras de acuerdo a la cantidad de módulos indescomponibles que posee, es por ello que en esta sección se brindarán aspectos esenciales para realizar esta clasificación, haciendo énfasis en aquellas que son de tipo manso.

Definición 3.1. *Se dice que un álgebra Λ es de tipo de representación finito, si la categoría de los módulos sobre el álgebra $mod\Lambda$ tiene una cantidad finita de elementos, tales que todo módulo indescomponible de Λ es isomorfo a algunos de estos elementos. En caso contrario se dice que Λ es de tipo de representación infinito.*

En otras palabras, el álgebra es de tipo de representación finita si tiene una cantidad finita de módulos indescomponibles, salvo isomorfismos.

Si el álgebra es tipo de representación infinito entonces se puede diferenciar en dos clases distintas:

Definición 3.2. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, se dice que Λ es de tipo de representación salvaje si existe M un Λ-$K\langle x,y\rangle$-bimódulo libre y finitamente generado sobre $K\langle x,y\rangle$, tal que el funtor:*

$$F = M \otimes_{K\langle x,y\rangle} (-) : modK\langle x,y\rangle \to mod\Lambda$$

conserva indescomponibles y refleja clases de isomorfismos. En ese caso se dice que M realiza el salvajismo de Λ.

Esta definición incluye la clasificación de módulos de dimensión finita indescomponibles en el problema matricial clásico de reducir a la forma canónica, pares de matrices que sean simultáneamente conjugadas.

Definición 3.3. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita, se dice que Λ es de tipo de representación mansa si para todo natural d existen $N_1, \ldots, N_n$ de Λ-$K[x]$-bimódulos tales que si M es un módulo indescomponible de Λ de dimensión d, entonces existe un módulo simple S de forma que M es sumando directo del módulo $N_j \otimes_{K[x]} S$ para algún $j = 1, \ldots, n$.*

Al conjunto de los $\{N_j\}_{j=\overline{1,n}}$ se le denomina familia parametrizada de dimensión d.

La disyunción entre estas tres clases está dada por el siguiente teorema expuesto por Y. Drozd en [3].

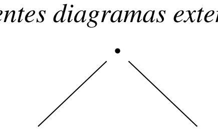
Teorema 3.1. *Toda álgebra Λ sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado es de tipo de representación finita, de tipo de representación manso o de tipo de representación salvaje y estos tipos son mutuamente excluyentes.*

En las álgebras de tipo de representación finita y manso, sobresalen los resultados obtenidos por P.Gabriel [5] y Nazarova [10] en la clasificación de estas, a partir de ciertos carcajes. Resultado que se enuncia en los siguientes teoremas:

Teorema 3.2. *Un carcaj finito Q es de tipo de representación finita si y solo si Q es la unión disjunta de los diagramas de Dynkin: A_n, D_n, E_6, E_7 y E_8.*

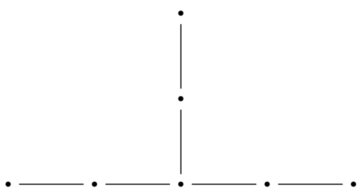
Teorema 3.3. *Sea Q un carcaj orientado sin ciclos y sea K un campo algebraicamente cerrado. Entonces el álgebra KQ es de tipo de representación manso si y solo si Q es uno de los siguientes diagramas extendidos de Dynkin*

$\tilde{A}_n$:

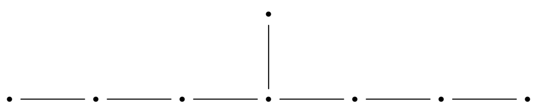


$\tilde{D}_n$:

$\tilde{E}_6$:



$\tilde{E}_7$:



$\tilde{E}_8$:

donde $\bullet \longrightarrow\!\!\!\!\!\!-\; \bullet$ *significa cualquiera de estas dos relaciones* $\bullet \longrightarrow \bullet$ *o* $\bullet \longleftarrow \bullet$.

4. Álgebras $T_2(A)$.

Se trabajará en esta sección con las álgebras triangulares superiores del tipo $\begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$. Las que se denotarán por $T_2(\Lambda)$ siguiendo la notación definida en [1],[6].

Algunos trabajos se refieren a los tipos de representaciones de dichas álgebras del tipo $T_n(A)$ como en [1] y [8].

A partir de métodos diagramáticos se puede también construir dicha álgebra como se muestra a continuación [7].

Definición 4.1. *Sea Λ el álgebra asociada al carcaj Q finito, sin ciclos y sean Q_0 el conjunto de n vértices de Q y Q_1 el conjunto de flechas de Q. Se define el carcaj $T_2(Q)$ que posee $2n$ vértices tal que $(T_2(Q))_0 = Q_0 \cup Q'_0 = \{1,\dots,n\} \cup \{1',\dots,n'\}$ y cuyo conjunto de flechas es $(T_2(Q))_1 = Q_1 \cup Q'_1 \cup \{i \to i' : i \in Q_0\}$.*

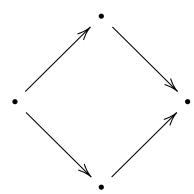
El siguiente lema muestra la relación entre ambas construcciones.

Lema 4.1. *Sea Λ el álgebra de incidencia de un poset con carcaj Q entonces el álgebra $T_2(\Lambda)$ es el álgebra de incidencia del poset con carcaj $T_2(Q)$.*

Por lo tanto si Λ es l-hereditaria entonces $T_2(\Lambda)$ también lo es. La demostración de este lema se puede encontrar en [7].

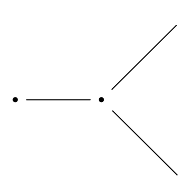
Teorema 4.1 (Teorema Principal)**.** *Sea Λ el álgebra de incidencia de un poset finito con carcaj Q. Entonces $T_2(\Lambda)$ es de tipo de representación manso si y solo si Q es de la forma:*

i)



o el diagrama no orientado del carcaj tiene una de estas formas:

ii) D_4 :



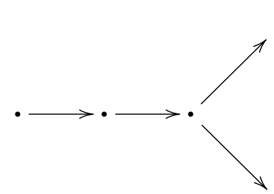
iii) A_5 :

Nuevamente se toma que $\bullet \!-\!\!-\!\!-\! \bullet$ significa cualquiera de estas dos relaciones $\bullet \longrightarrow \bullet$ o $\bullet \longleftarrow \bullet$.

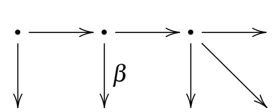
Demostración. Como mod Λ es una subcategoría de mod $T_2(\Lambda)$ si Λ es de tipo de representación salvaje entonces $T_2(\Lambda)$ también lo es; por lo tanto se analizarán los casos donde Λ no sea de tipo de representación salvaje, o sea, los casos donde Λ sea de tipo de representación finito y manso y para esto basta analizar aquellas cuyo carcaj asociado se corresponda a los diagramas de Dinkyn: A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 para el caso finito y a los Euclidianos: $\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ y $\tilde{E}_8$ para el caso de las mansas, recogidos en las proposiciones (3.2) y (3.3) respectivamente.

Se asume que $T_2(\Lambda)$ es de tipo de representación manso.

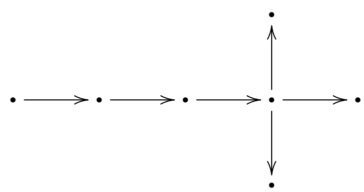
Se analizará primeramente los D_n con $n \geq 4$. Supongamos que Q contiene a D_4 y además es un carcaj del tipo D_5 orientado (D_5^*) de la siguiente forma



Entonces al construir el carcaj $T_2(D_5^*)$ este contiene a un subcarcaj de la forma



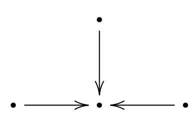
La categoría de representaciones de este subcaracaj con todas las relaciones de conmutatividad posee una subcategoría $\mathscr{C}$ cuando $\beta = id$. Por su parte, la categoría $\mathscr{C}$ es isomorfa a la categoría de representaciones del carcaj



que es de tipo de representación salvaje. Por lo tanto $T_2\left(D_5^*\right)$ es también de tipo de representación salvaje, lo cual contradice la hipótesis y Q no puede ser del tipo D_5^*. Análogamente se prueba que para cualquier otra orientación de D_5^*, $T_2\left(D_5^*\right)$ es de tipo de representación salvaje, lo cual indica que Q no puede ser D_5.

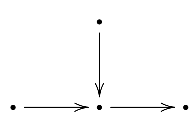
Como D_5 es un subcarcaj de D_n y $\tilde{D_n}$ para $n \geq 5$, E_6, E_7, E_8, $\tilde{E_6}$, $\tilde{E_7}$ y $\tilde{E_8}$ entonces es suficiente para afirmar que si Q es de alguna de esas formas entonces $T_2\,(Q)$ es de tipo salvaje.

Queda por comprobar que $Q = D_4$, asumiendo que Q es el carcaj orientado D_4^* de la forma:

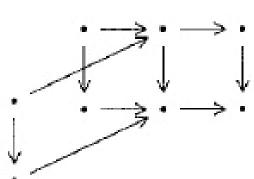


Entonces el carcaj $T_2(D_4^*)$ es una extensión por un punto de un caracaj de tipo $\tilde{E_6}$ y por lo tanto manso.

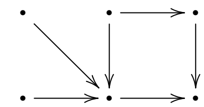
Si Q fuera el siguiente carcaj



Entonces el caracaj $T_2(Q)$ es de la forma

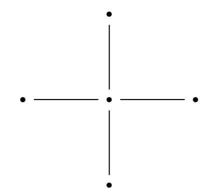


que constituye una doble extensión del álgebra asociada al carcaj



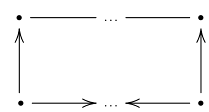
la cual contiene un $\tilde{D_5}$ y por tanto $T_2(Q)$ es manso. El resto de las orientaciones son carcajes duales. Por lo tanto $Q = D_4$.

Si $Q = \tilde{D_4}$, de la forma

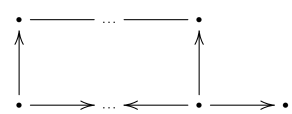


se comprueba muy facilmente que $T_2\left(\tilde{D_4}\right)$ no es de tipo manso pues contiene un subcarcaj de tipo de representación salvaje.

Por otra parte, suponiendo que Q es un carcaj del tipo $\tilde{A_n}$, con dos vértices fuentes de la forma

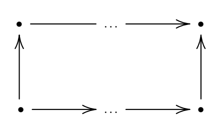


Entonces $T_2\,(Q)$ contiene a un subcarcaj Q' de tipo de representación salvaje de la forma



Por lo tanto Q es de tipo de representación salvaje.

Si se supone que Q es del tipo $\tilde{A_n}$ con relación de conmutatividad tal que es de la forma



Entonces para $n \geq 5$ se puede encontrar un subcarcaj en $T_2(Q)$ que es de tipo de representación salvaje. Luego Q no puede ser $\tilde{A_n}$

Se analizará a continuación que cuando Q es lineal o sea un A_n. En [7] los autores prueban que $T_2(Q)$ es de tipo de representación finito si $Q = A_n$ para $n \leq 4$, por lo tanto solo se examinará A_n para $n \geq 5$.

Si se considera que Q tiene la forma del carcaj A_6^* orientado

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Entonces $T_2(A_6^*)$ tiene la forma:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta la subcategoría $\mathscr{D}$ de representaciones tal que $\gamma = id$, se tiene que esta es isomorfa a la categoría de representaciones del carcaj

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & & & \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ & & & & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Y este contiene la categoría de representaciones del carcaj:

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[d] & & \bullet & \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[u] & \bullet \end{tikzcd}$$

El cual es de tipo salvaje y por tanto $T_2(A_6^*)$ es de tipo salvaje. Debido a que A_6 esta incluido en A_n para $n \geq 6$ entonces para esos valores de n, $T_2(A_n)$ es de tipo salvaje.

Si suponemos que Q es el grafo orientado A_5^* de la forma:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Entonces $T_2(Q)$ tiene la forma

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Sea Λ el álgebra asociada a Q entonces $T_2(\Lambda)$ es una extensión por un punto de un álgebra localmente hereditaria cuyo carcaj es de la forma

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Con inyectivo $Y =$
$$\begin{tikzcd} & K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \arrow[r] & K \end{tikzcd}.$$

Se puede ver que el álgebra resultante es una coextensión de $\mathbf{top}(Y)$, la cuál resulta ser un álgebra del tipo $\tilde{E}_7$

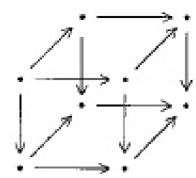
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet & \end{tikzcd}$$

y como tal es de tipo de representación manso. Para cualquier otra orientación de A_5^*, $T_2(A_5^*)$ también es producto de extensiones de álgebras del tipo $\tilde{E}_6$ o $\tilde{E}_7$.

Finalmente, si se supone que Q es de la forma

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

entonces el carcaj $T_2(Q)$ tiene la forma



que resulta ser una extensión y coextensión del módulo

$$\begin{tikzcd} X = K \arrow[r] \arrow[d] & K & K \arrow[l] \arrow[d] \\ K & K \arrow[l] \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

que es de tipo manso $\square$

La siguiente proposición muestra la existencia de algún poset para el cual el álgebra $T_2(\Lambda)$ es de tipo de representación manso

Proposición 4.1. *Sea Λ un álgebra básica localmente hereditaria tal que $T_2(\Lambda)$ es de tipo de representación manso, entonces Λ es el álgebra de incidencia de algún poset.*

Referencias

[1] M Auslander and I. Reiten. On the representation type of triangular matrix rings. *Journal of London Mathematics Society*, 2(12):371–382, 1976.

[2] C Cibilis, F Larrión, and L. Salmeron. *Métodos Diagramaticos de la Teoría de Representaciones*. Universidad Autónoma de México, 1981.

[3] J Drozd. *Tame and wild matrix problems*. Springer L. M. N, 1980.

[4] G. Drozdowski and D. Simson. Remarks on posets of finite representation type. *Preprint Torún*, pages 1–23, 1978.

[5] P Gabriel and R.V. Roiter. *Algebra VIII. Representations of Finite Dimensional Algebras*. Springer-Verlag, 1992.

[6] Z. Leszczyński. l-hereditary triangular matrix algebras of tame type. *Archiv der Mathematik*, 54(1):25–31, 1990.

[7] Z. Leszczyński and D. Simson. On triangular matrix rings of finite representation type. *Journal of London Mathematics Society*, 20(2):396–402, 1979.

[8] H. Merklen. Representaciones de conjuntos ordenados y aplicaciones. 1997.

[9] B. Montero. Descripción de la categoría de los módulos prinyectivos sobre el álgebra de matrices triángulares, 2016.

[10] L.A. Nazarova and A.V. Rojter. Categorical matrix problems and the brauer-thrall conjecture. *Math. Sem. Giessen*, 115, 1975.

[11] B. Pérez-Lopez. Métodos diagramáticos en teoría de representaciones. álgebras localmente hereditarias., 2014.

[12] D. Simson. *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*. Gordon and Breanch Science Publishers, 1992.