Ciencias Matemáticas, Vol. 31, No. 1, Pag. 83-88, 2017
Recibido 02-2017

Sobre la Estructura del Álgebra de Wiener-Walsh
On Wiener-Walsh Algebra Structure

Claudia Fonte Sánchez[1], Carlos Sánchez Fernández[1]*

Resumen En 1922, Walsh introdujo un sistema ortogonal y completo que sería posteriormente conocido por su nombre. En la actualidad muchas son las aplicaciones que se han encontrado a las funciones representables por series de Walsh, que hacen importante el estudio de tal sistema. En el presente trabajo se demuestran propiedades estructurales del álgebra de las funciones con series de Walsh absolutamente convergente. En particular, se muestra que el espectro del álgebra es un espacio métrico regular, homeomorfo al grupo diádico, y se aborda el problema abierto de la síntesis espectral.

Abstract In 1922, Walsh introduced an orthogonal and complete system, later known by his name. Nowadays, many applications to the functions which can be represented as Walsh series have been found, making the study of such system very important. In this article, several structural properties of the algebra of functions with absolutely convergent Walsh series are proved. In particular, is argued that the spectrum of this algebra is a regular metric space homeomorphe to the dyadic group. Also is presented the difficult problem of spectral synthesis.

Palabras Clave
Álgebra de Wiener — Grupo Diádico — Elementos Idempotentes — Síntesis Espectral

[1] *Departamento de Matemática, Universidad de La Habana, Cuba, c.fonte@estudiantes.matcom.uh.cu,csanchez@matcom.uh.cu*
***Autor para Correspondencia**

Introducción

Bajo el título *Un Conjunto Cerrado de Funciones Ortonormales*, Walsh publicó en 1922 un estudio sobre un sistema ortonormal completo con la particularidad de que las funciones del mismo solo toman los valores 1 y -1. En las últimas décadas se han encontrado numerosas aplicaciones de este a problemas como procesamiento digital y compresión de la información; detección de patrones faciales y el estudio de biomarcadores para el diagnóstico de enfermedades, sustituyendo en ocasiones a las más conocidas y estudiadas series de Fourier por sus características más simples y manipulables. Esto se constata p.e. en Golubov [1], primera exposición sistemática sobre el tema, y en recientes artículos como Juefei-Xu [5], Hassan [4] y Fan [3].

El sistema de Walsh ha sido ampliamente estudiado desde un punto de vista clásico. Al sistema ortonormal y a la transformación asociada, a veces, se le llama sistema de Walsh-Hadamard y transformación de Hadamard o Walsh-Hadamard, indistintamente, en homenaje a los dos matemáticos que primero la estudiaron. Durante una primera etapa se demostraron propiedades análogas a la representación de Fourier con el sistema trigonométrico, encontrándose condiciones para su convergencia puntual, uniforme y absoluta. En el presente artículo se analiza desde un punto de vista estructural: se considera el álgebra topológica constituída por las funciones con series de Walsh absolutamente convergentes, conocida como álgebra de Wiener-Walsh, y se estudian sus características tanto algebraico-topológicas como espectrales. En particular, se demuestra que el espacio de los ideales maximales del álgebra es homeomorfo al grupo diádico, $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, se prueba que existe una métrica que genera la topología de Gelfand sobre el mismo y se identifica una cantidad numerable de conjuntos de síntesis espectral.

El trabajo está dividido en dos partes, en una primera sección se estudia la teoría de Gelfand aplicada al álgebra mencionada y en la segunda sección se aborda el problema de la síntesis espectral.

1. Teoría de Gelfand del Álgebra de Wiener-Walsh $W(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})$

El sistema ortonormal de Walsh está constituido por los caracteres del grupo diádico $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$. Por este motivo el primer acápite se dedica al estudio de este grupo y su grupo dual. Con los caracteres se construye el álgebra de Wiener-Walsh, esto es:

$$W(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}) = \{f \in C(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}) : f = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\delta_n; \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty\}, \tag{1}$$

donde δ_n son los caracteres del grupo diádico y los coeficientes $\hat{f}(n)$ vienen dados por

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}} f(x)\delta_n(x)d\mu, \tag{2}$$

siendo μ la medida de Haar sobre el grupo, normalizada para que $\mu(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}) = 1$. Su estructura algebraica y topológica es estudiada a continuación.

1.1 Representaciones del Grupo Diádico

Con la topología producto el grupo diádico es un grupo topológico. Los miembros de este grupo pueden expresarse como una sucesión de elementos de $\mathbb{Z}_2$, esto es, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots)$, tal que $b_i \in \mathbb{Z}_2$, donde la operación del grupo $(+)$, está dada por la suma módulo dos componente a componente, es decir,

$$a+b = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \ldots) : a_i \oplus b_i = \begin{cases} 0 & si\ a_i = b_i \\ 1 & si\ a_i \neq b_i \end{cases}. \tag{3}$$

De aquí se deduce que $-b = b$ y $a - b = a + b = b + a$ para todo $a, b \in G$.

Se denota E_i a los subconjuntos de $\mathbb{Z}_2$ dados por $E_i = \{i\};\ i = 0, 1$. La colección de todos los subconjunto de G:

$$B(i,m) = (\prod_{z=1}^{m} \mathbb{Z}_2) \times E_i \times \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}, \tag{4}$$

con $i = 1, 2$ y $m \in \mathbb{N}$, unión $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, es una subbase de la topología producto T. Luego, las intersecciones finitas de los elementos de dicha colección conforman una base $\mathfrak{B}$ de T. La forma de tales conjuntos conduce a que, para todo $B \in \mathfrak{B}$, existe un conjunto de índices finito $I \subset \mathbb{N}$, tal que los elementos de B tienen exactamente el mismo valor (0 o 1) en las posiciones correspondiente a esos índices, y puede encontrarse cualquier combinación de ceros y unos para las restantes posiciones.

Como $\mathbb{Z}_2$ con la topología discreta es compacto, por el teorema de Tikhonov, G es compacto. Así mismo, sea $a \neq b$, existe una posición j tal que sus valores en esta difieren. Tomando los abiertos $E_i = E(j-1, i) \in \mathfrak{B}$, se demuestra que es un espacio de Hausdorff.

Otra forma de representar este grupo lo vincula con los racionales diádicos, números entre 0 y 1 que se escriben como la suma finita de potencias de $\frac{1}{2}$. Sea $b \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, J el conjunto de índices de las posiciones donde b toma valor 1. Entonces b puede expresarse como,

$$b = \sum_{j \in J} (\frac{1}{2})^j. \tag{5}$$

Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^j = 1$, cada b que aparece en $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ puede representarse como un número entre 0 y 1. Nótese que para conjuntos de índices finitos J se obtienen los racionales diádicos $\mathbb{Q}_d$. Cada número real que no sea un racional diádico tiene exactamente una representación de la forma 5, y, por tanto, está en correspondencia con un único elemento de G. En cambio, los racionales diádicos, poseen dos maneras de escribirse: como una suma finita, o como una suma infinita.

Se considera entonces el intervalo $[0,1]^*$, de los números del $[0,1]$, donde se han duplicado los racionales diádicos, los cuales aparecen repetidos como d^- y d^+. Es posible ahora hacer una biyección λ entre el conjunto G y $[0,1]^*$ dada por la expresión 5, donde a d^- se le hace corresponder la suma infinita y a d^+ la suma finita.

$[0,1]^*$ con la operación $\oplus$: $x \oplus y = \lambda(\lambda^{-1}(x) + \lambda^{-1}(y))$ es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$. Igualmente, por la biyección λ es posible traspasar la topología producto T al $[0,1]^*$. En lo adelante, usaremos la letra G para referirnos indistintamente a uno u otro grupo topológico.

En el próximo acápite, se identifican los caracteres de este grupo.

1.2 Caracteres de $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$

Sea $d \in G$, como se ha visto arriba, $d + d = 0$, de aquí que, todo caracter δ deba cumplir que $\delta(2d) = \delta^2(d) = \delta(0) = 1$, por lo cual $\delta(d) \in \{1, -1\}$, $\forall d \in G$.

Se denota por $e_k,\ k \in \mathbb{N}$ al elemento de G que tiene un uno en la posición k y cero en todas las demás. Sea $K = \{k : \delta(e_k) = -1\}$, el conjunto K debe ser finito. En efecto, se puede demostrar, a partir de la forma de los elementos de la base $\mathfrak{B}$ que la serie,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \tag{6}$$

donde $a_k = 1$ si $k \in K$ y cero en otro caso, converge al elemento que tiene un uno en todas las posiciones de K y cero en las restantes, d_K, según la topología T.

De aquí que, por ser δ continua, $\delta(s_n) \to \delta(d_K)$, pero eso implica que:

$$\text{lím}\, \delta(s_{2n}) = \text{lím}(-1)^{2n} = \text{lím}\, \delta(s_{2n+1}) = (-1)^{2n+1}. \tag{7}$$

Lo cual, evidentemente, es una contradicción.

Por otra parte, sea $d \in G$, K_d el conjunto de índices de las posiciones donde d es uno, la serie definida por 6 donde K_d hace el papel de K, converge a d. En consecuencia, δ queda totalmente determinado por el valor que tome en los elementos e_k, dicho de otra manera, por el conjunto K.

Además, sea M un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, la aplicación determinada por,

$$\delta_M(e_k) = \begin{cases} -1 & si\ k \in M \\ 1 & si\ k \notin M \end{cases}, \tag{8}$$

es un homomorfismo continuo. En efecto, sean $d \in G$, $\delta_M(d) = (-1)^{card(M \bigcap K_d)}$. Luego para todo $a, b \in G$ como consecuencia de las propiedades de la suma vistas antes, se tiene que,

$$card(M \bigcap K_{a+b}) = card(M \bigcap K_a) + card(M \bigcap K_b) - 2L, \tag{9}$$

donde L es el número de índices de J tales que en las posiciones correspondientes ambos elementos tienen un uno. Entonces,

$$\delta_M(a+b) = \delta_M(a) \cdot \delta_M(b) \cdot (-1)^{-2L}, \tag{10}$$

de donde se concluye que δ_M es un homomorfismo.

Por otra parte, $\delta_M^{-1}(-1)$ es el conjunto de los elementos que tienen un número total impar de unos contando todos los que aparecen en alguna de las posiciones de M. Como M es finito, el número de forma de colocar ceros y unos en las posiciones de M tal que el total sea impar es finita. Entonces, $\delta_M^{-1}(-1)$ se escribe como la unión de los miembros de la base que precisamente tienen fijos las posiciones de J en cada una de esas combinaciones. Análogamente se demuestra que $\delta_M^{-1}(1)$ (total par) pertenece a la topología. Por lo cual se concluye que δ_M es continuo.

En resumen, se obtiene que los caracteres del grupo diádico son exactamente los homomorfismos δ_M, donde M es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Más aun, como todo número natural n se puede expresar de forma única como

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^k,\ a_k = 1_M(k), \tag{11}$$

existe una biyección entre los caracteres de G y los números naturales. Los caracteres $w_n = \delta_M : [0,1]^* \to \mathbb{C}$ ($w_0 = \delta_\emptyset = 1$) son precisamente las funciones de Walsh. De estos, los caracteres $r_j = w_{2^j} = \delta_{\{j\}}$, son las funciones de Rademacher [1].

Nótese que

$$w_n \cdot w_m = \prod_{j\in J_n} r_j \prod_{j\in J_m} r_j = \prod_{j\in J_k} r_j = w_k, \tag{12}$$

donde $J_k = (J_n \bigcup J_m) \setminus (J_n \bigcap J_m)$.

1.3 $A(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})$, $\Phi_{A(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})}$, Elementos y Propiedades

Conocidos los caracteres el álgebra de Wiener-Walsh se construye como:

$$A(G) = \{f \in C(G) : f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n, \sum |a_n| < \infty\} \tag{13}$$

$A(G)$ constituye un álgebra y con la norma $\sum |a_n|$, un álgebra de Banach.

Teorema Los homomorfismos continuos de $A(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})$ en $\mathbb{C}$ son exactamente los puntuales.

No es difícil demostrar que los homomorfismos puntuales son realmente homomorfismos continuos. A continuación se verifica que, además, son los únicos.

Sea φ que pertenece al espacio de los homomorfismos continuos de $A(G)$ en $\mathbb{C}$, $\Phi_{A(G)}$, dado que $r_j \cdot r_j = 1$ se tiene $\varphi(r_j) = 1, -1$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Esto justifica que se pueda construir el siguiente elemento, el cual pertenece a G:

$$d_\varphi = (\frac{1-\varphi(r_1)}{2}, \frac{1-\varphi(r_2)}{2}, \ldots, \frac{1-\varphi(r_i)}{2}, \ldots). \tag{14}$$

Nótese que $\varphi(r_j) = r_j(d_\varphi)$. Pero para toda w_n, función de Walsh, se cumple que $w_n = \prod_{j\in J_n} r_j$, de lo cual deriva que:

$$\varphi(w_n) = \prod_{j\in J_n} \varphi(r_j) = \prod_{j\in J_n} r_j(d_\varphi) = w_n(d_\varphi). \tag{15}$$

Véase que el producto tiene sentido por ser J_n finito.

Como $(A(G), \|\cdot\|_{A(G)})$ es completo, se cumple que, si $\sum \|f_n\|$ converge, entonces existe f tal que $\sum f_n$ converge en norma a f. En consecuencia, si f se expresa de la forma 13 se tiene:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \varphi(\text{lím}_{k\to\infty} \textstyle\sum_{n=0}^{k} a_n w_n) = \lim_{k\to\infty} \varphi(\textstyle\sum_{n=0}^{k} a_n w_n) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(d_\varphi) = f(d_\varphi).\end{aligned} \tag{16}$$

De esa forma se obtiene que sea $d = d_\varphi$, $\varphi(f) = \varphi_d = f(d)$ para toda $f \in A(G)$, con lo cual se concluye la demostración.

Como consecuencia de este teorema se obtiene que, los núcleos de los homomorfismos, los cuales coinciden con los ideales maximales, son de la forma $M_x = \{f \in A(G) : f(x) = 0\}$. Lo cual implica que el radical del álgebra está constituido únicamente por el elemento nulo y el único elemento nilpotente es el cero.

Así mismo, los elementos invertibles son exactamente las funciones f tales que $\varphi_x(f) = f(x) \neq 0$, $\forall x \in G$ y el espectro de f, del que se conoce su coincidencia con $\{\varphi(f) : \varphi \in \Phi_{A(G)}\}$, es igual a su imagen.

1.4 $\Phi_{A(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})}$ como Espacio Topológico. Representación de Gelfand.

A continuación, indagaremos acerca de la topología de Gelfand, hallaremos la representación de Gelfand del álgebra $W(G)$ y analizaremos la regularidad de esta álgebra de funciones.

Teorema Existe una métrica en G tal que la topología inducida por dicha métrica coincide con la topología producto.

Sea x la representación de un elemento de G como miembro del $[0,1]^*$, se construye la función $g(x)$ que toma su correspondiente valor en el intervalo $[0,1]$. Entonces, $\rho(x,y) = g(x \oplus y)$ es una distancia.

En efecto, como $x \oplus x = 0$, $\forall x \in G$, se tiene que $\rho(x,x) = g(0) = 0$. Así mismo, al ser G un grupo abeliano, $x \oplus y = y \oplus x$, luego $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Para verificar la desigualdad triangular se razona de la siguiente manera: $x \oplus y$ es, en la representación de $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, la colección ordenada de ceros y unos que posee un uno en las posiciones donde exactamente uno de ambos elementos posea un uno, y cero en las restantes. De aquí que, si $x \oplus y$ tiene un uno en la posición j, al menos uno de los elementos $x \oplus z$ o $z \oplus y$, posea un uno en dicha posición. Así pues, todo término $(\frac{1}{2})^j$ que aparezca en la representación de $x \oplus y$ en $[0,1]^*$, aparecerá en la de $x \oplus z$ o en la de $z \oplus y$.

A continuación se demuestra que las bases correspondientes a la métrica y a la topología producto, inducen la misma topología.

Sea $y \in B(x,\varepsilon)$, para $\varepsilon < 1$. Tomemos $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x,y) < 1$, entonces, existe k tal que,

$$\frac{1}{2^k} < \varepsilon_1 < \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{17}$$

Para todo $z = (y_1, y_2, \ldots, y_k, !, \ldots)$, con las primeras k posiciones idénticas a las de y, y cualquier combinación de ceros y unos a partir de la interrogante, se cumple que, $\rho(y,z) = g(0,0,\ldots,0_k,!,...) \leq g(0,0,\ldots,0_k,1,1,\ldots) = \sum_{j=k+1}^{\infty}(\frac{1}{2})^j = 2^{-k}$.

En consecuencia,

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \leq \rho(x,y) + 2^{-k} \leq \rho(x,y) + \varepsilon_1 = \varepsilon. \quad (18)$$

Es decir, todas las z de la forma dada arriba pertenecen a $B(x,\varepsilon)$; pero el conjunto de las z descritas conforman un elemento de la base $\mathfrak{B}$. Luego, se ha encontrado un abierto B tal que $y \in B \subset B(x,\varepsilon)$.

Véase que, dado $y \in B \subset \mathfrak{B}$ y k el mayor de lo índices de las posiciones fijadas, $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, $y \in B(y,\varepsilon)$ y, cualquiera sea $x \in B(y,\varepsilon)$, se cumple que x coincide con y al menos en todas las posiciones hasta la k, por lo que pertenece a B. Es decir, $y \in B(y,\varepsilon) \subset B$. Con lo que se concluye la demostración.

Como corolario se obtiene que $\mathfrak{B}_x = \{B(x,2^{-j}), j = 1,2,\ldots\}$, es un sistema fundamental de vecindades de x para la topología producto T.

Es interesante observar la forma que toman estas bolas en $[0,1]^*$, lo cual depende del tipo de elemento del cual se trate:

$$B(x,2^{-j}) = \begin{cases} (x-2^{-j}, x+2^{-j}) & si\ x \notin \mathbb{Q}_d \\ \left[(x-2^{-j})^+, x\right] & si\ x \in \mathbb{Q}_d,\ x = x^- \\ \left[x, (x+2^{-j})^-\right] & si\ x \in \mathbb{Q}_d,\ x = x^+ \end{cases}, \quad (19)$$

donde los intervalos están dado según el orden usual de $\mathbb{R}$ sobre $g(x)$, agregando $x^- < x^+$, $\forall x \in \mathbb{Q}_d$. Notar que $\rho(x^-,x^+) = 2^{-(k-1)}$, donde k es el mayor exponente de la representación finita.

Estas características de las bolas en dependencia de como sea el elemento estudiado también se observa en la representación por sucesiones de $\mathbb{Z}_2$:

1. Si x no pertenece a RD, entonces tiene infinitos ceros y unos en su representación, de ahí que existan sucesiones que se acerquen a él por ambos lados (si colocas un uno donde antes había un cero, te acercas por la derecha, y si cambias un uno por un cero te acercas por la izquierda, y, mientras más larga sea la secuencia inicial que dejes intacta, más próximo al número estarás).
2. Si $x = x^+$, entonces, a partir de una posición, las restantes son cero (y solo te puedes acercar a él por la derecha, cambiando ceros por unos).
3. Si $x = x^-$ a partir de cierta posición siempre es uno, (solo puedes acercarte por los menores que él, cambiando ceros por unos).

Teorema La biyección $\psi : x \to \varphi_x$, entre $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ y $\Phi_{A(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}})}$, es un homeomorfismo.

Para demostrar este teorema, se prueba que el sistema fundamental de vecindades inducido por la topología de Gelfand:

$$E(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon,\ \forall i = \overline{0,n}\} \quad (20)$$

genera el mismo sistema de vecindades que $\mathfrak{B}_{x_0}$

Como las $f_i \in A(G) \subset C(G)$ y la función $|x|$ es continua, la función $h_i(x) = |f_i(x) - f_i(x_0)|$ es una función continua de G en $\mathbb{R}^+ \bigcup\{0\}$. Luego, $h_i^{-1}(-1,\varepsilon) \in T$, por lo cual,

$$E(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} h_i^{-1}(-1,\varepsilon) \in T. \quad (21)$$

lo cual implica, por la caracterización de abierto por elementos de una base, que existe $B \in \mathfrak{B}_{x_0} : x_0 \in B \subset E(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)$.

Sea ahora, $B \in \mathfrak{B}_x$, como ya se ha visto, estas vecindades pueden ser de tres formas, en dependencia de x. Si $x \notin \mathbb{Q}_d$, entonces $B = (x-2^{-j}, x+2^{-j})$. Sea este el caso, es posible seleccionar un racional diádico r_1 del intervalo $(x-2^{-j}, x)$, y un racional diádico del intervalo $(x, x+2^{-j})$, r_2. La función $f = 1_{[r_1^+, r_2^-]}$ es continua. Más aún, para todo $k > max(-\log_2 \rho(r_1^-, r_1^+), -\log_2 \rho(r_2^-, r_2^+))$ se cumple que

$$w(\frac{1}{2^k}, f) = \sup_{\rho(x,t) < \frac{1}{2^k}} |f(x) - f(t)| = 0. \quad (22)$$

Pero se conoce que si $f \in C(G)$ es tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} w(\frac{1}{2^k}, f) < \infty, \quad (23)$$

entonces $f \in A(G)$, [1] pág. 63. En consecuencia, $x \in E(x, f, \frac{1}{2}) = [r_1^+, r_2^-] \subset B$.

Análogamente, se demuestra lo anterior para bolas con centro en x^- y x^+ y radio 2^{-j}, tomando las funciones indicadoras $f_1 = 1_{[(x-2^{-j})^+, x^-]}$ y $f_2 = 1_{[x^+, (x+2^{-j})^-]}$ respectivamente, y sustituyendo f por f_i.

Como ambas topologías poseen el mismo sistema de vecindades, entonces, coinciden. En particular esto muestra que $\Phi_{A(G)}$ es metrizable. Más aún, $\Phi_{A(G)}$ es normal, como todos los espacios métricos. En tal caso, la topología de Gelfand coincide con la topología de Zariski.

Nótese que existe un isomorfismo de álgebra entre la representación de Gelfand, $\hat{A}(G)$ y el propio $A(G)$. Además se cumple que:

$$\hat{f}(\varphi_x) = \varphi_x(f) = f(x). \quad (24)$$

2. Problema de la Síntesis Espectral

El tema de la caracterización de los conjuntos de síntesis espectral es recurrente en el estudio de las álgebras de Wiener. Sin embargo, no se han obtenido más que resultados parciales, siendo uno de los más significativos problemas abiertos del análisis armónico. Su interés surgió a partir de los trabajos de Malliavin para el álgebra de Wiener clásica, álgebra de las funciones de serie de Fourier absolutamente convergente sobre el toro unidimensional. Es fácil comprobar que en el álgebra de todas las funciones continuas $C(\mathbb{T})$ todos los subconjuntos cerrados son de síntesis espectral, Malliavin demostró que en el álgebra de Wiener sobre $\mathbb{T}$ existen subconjuntos cerrados que no son de síntesis. De forma análoga al caso de $\mathbb{T}$ se demuestra que no todos los subconjuntos de $[0,1]^*$ son de síntesis, como puede verse en [[6], pag. 245]. No obstante, a continuación se encuentra una cantidad numerable de subconjuntos del grupo diádico que sí lo son. Concretamente se muestra que existe una estrecha relación entre los elementos idempotentes del álgebra y los conjuntos de síntesis espectral. Primeramente se identifican tales elementos.

Los conjuntos de la forma $[x_1^+, x_2^-]$ donde x_1, x_2 son racionales diádicos, son abiertos y cerrados. Igualmente, si tomamos la unión disjunta y finita de conjuntos de esta forma, resulta un conjunto que también es abierto y cerrado, luego, la indicadora del mismo será un elemento idempotente.

Nótese que el conjunto de los extremos de los intervalos anteriores, incluyendo al cero y al uno, determinan una partición del grupo $[0,1]^*$.

$$\{[0,x_1^-],[x_1^+,x_2^-],\ldots,[x_i^+,x_{i+1}^-],\ldots,[x_{n-1}^+,x_n^-],[x_n^+,1^-]\}, \tag{25}$$

con extremos en $\mathbb{Q}_d$. A su vez, por cada partición de esta forma, las funciones que se derivan de asignarles cualquier combinación de unos y ceros, a los elementos de tal partición, son elementos idempotentes de la forma antes descrita. ¿Serán los idempotentes cons-truidos de esta manera los únicos existentes?

La respuesta es afirmativa. Para su demostración, puede verse que la función $f : [0,1]^* \to \mathbb{C}$ es continua en x si y solo si:

- Para $x \notin \mathbb{Q}_d$ se cumple que para toda sucesión de números reales que converge a $g(x)$ en la norma euclideana, $\{g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$.
- Si x es de la forma y^-, deben converger la sucesión $\{f(x_n)\}$ para todas las sucesiones $\{g(x_n)\}$ que convergen a $g(x)$ en la norma euclideana por la izquierda.
- Para el caso de las x de la forma y^+ debe cumplirse lo anterior para las sucesiones que convergen a $g(x)$ por la derecha.

Sea entonces $f \in A(G)$ un elemento idempotente, f toma solo los valores 0 y 1 sobre G. Una consecuencia de la proposición anterior es que, si f toma ambos valores en un intervalo, entonces existe $x \in \mathbb{Q}_d$ tal que $f(x^-) \neq f(x^+)$. Sea,

$$E = \{x \in \mathbb{Q}_d : f(x^-) \neq f(x^+)\}, \tag{26}$$

véase que E es finito.

El conjunto E es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, suponiendo que sea infinito, entonces por el teorema de Weiestrass, tiene al menos un punto de acumulación y (según la topología euclideana). Esto implica que existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$: $x_n \to y$. A la subsucesión formada por todos los elementos de la misma menores que y la denotaremos por $\{x_{k_n}\}$ y a la formada por los elementos mayores que y por $\{x'_{k_n}\}$. Al menos una de estas subsucesiones es infinita. Sin pérdida de generalidad, supongamos que se trata de la primera de estas.

Sea $y_n = x_{k_n}$, si $y \notin \mathbb{Q}_d$, de que $y_n \to y$ en la topología euclideana, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n^-) = f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n^+). \tag{27}$$

De que el primero de estos límites exista se deriva que existe un N tal que, para todo $n > N$, $f(y_n^-)$ tiene valor constante. Pero esto implica que, como $y_n \in E$, $f(y_n^+)$ toma para toda esas n el otro posible valor, luego ambos límites toman valores diferentes, lo cual es una contradicción con la igualdad planteada.

Si $y \in \mathbb{Q}_d$, entonces las sucesiones y_n^+ y y_n^- convergen en la topología producto a y^- y, razonando análogamente, se llega a la contradicción.

Nota: en el caso en que la colección infinita fuera $x_{k_n}^+$ y $y \in \mathbb{Q}_d$, se tiene que dicha sucesión converge en la topología producto a y^+ y la contradicción sigue de la existencia de los límites en 27.

De lo anterior se deduce que E debe ser finito, ($E = \{x_i, i = 1,\ldots,n : x_1 < x_2 < \ldots < x_n\}$). Entonces f puede ser expresada por la partición determinada por E, de la forma 25.

Dada una función f, construyendo el conjunto E como en 26, obtenemos una partición tal que f cambia su valor de un intervalo al siguiente. Además, dada una partición, existen exactamente dos elementos idempotentes que cumplan con esta propiedad. Puesto que dadas dos particiones diferentes, las cuatro funciones determinadas son distintas, se obtiene que el número de funciones idempotentes existentes es dos veces el número de particiones que se pueden construir de la forma 25. Estas particiones están en correspondencia con los subconjuntos finitos de $\mathbb{Q}_d$. A su vez, los racionales diádicos estan en biyección con los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, luego, el cardinal del conjunto de los idempotentes es numerable.

Teorema Los conjuntos abiertos y cerrados, los cuales son de la forma $\bigcup_{i=1}^n [x_i^+, y_i^-]$, son conjuntos de síntesis.

Sea el conjunto $J(E)$ definido por:

$$\{f \in W(G) : \hat{f}\ \mathit{tiene\ soporte\ compacto\ y}\ (\mathit{supp}\hat{f}) \bigcap E = \emptyset\}, \tag{28}$$

se conoce que E es un conjunto de síntesis si y solo si, $\overline{J(E)} = k(E)$, donde $k(E)$ es el núcleo de E, es decir, el conjunto de las funciones de $A(G)$ que se anulan en los elementos de E. Esto puede verse, por ejemplo, en [[2], pág. 257].

Por la identificación de $\Phi_{A(G)}$ y G por un homeomorfismo, y de que $\hat{f}(\varphi_x) = f(x)$, tenemos que, como G es compacto, $\hat{f}$ tiene soporte compacto para toda $f \in A(G)$. Además como G es compacto de Hausdorff, que K sea un subconjunto compacto de G es equivalente a que sea un subconjunto cerrado. Luego $J(E)$ toma la forma,

$$J(E) = \{f \in A(G) : \exists F\ \mathit{cerrado} :\ f|_{G\setminus F} = 0\}. \tag{29}$$

Sea E abierto y cerrado, es claro que, $1_E \in J(E)$. Luego, como $\overline{J(E)}$ es un ideal cerrado de $A(G)$, para toda $g \in k(E)$, se tiene que $1_E \cdot g = g \in \overline{J(E)}$, por lo cual, $k(E) = \overline{J(E)}$, (La desigualdad $\overline{J(E)} \subset k(E)$ es evidente y se cumple para todo cerrado $E \subset G$).

3. Conclusiones

Hemos aplicado la teoría de Gelfand para hacer un análisis estructural del álgebra de Wiener asociada al grupo diádico. Se han demostrado propiedades que esperamos puedan relacionarse con aplicaciones ya encontradas o nuevas del sistema de Walsh.

El problema de la síntesis espectral ha sido abordado, sobre todo para el caso del álgebra de Wiener clásica, sin obtener una caracterización general de los conjuntos de síntesis. En el álgebra de Wiener-Walsh hemos encontrado una familia numerable de conjuntos de síntesis asociada al conjunto de los elementos idempotentes del álgebra. No existen elementos idempotentes no triviales en el caso clásico y por tanto, este resultado no puede extenderse al grupo continuo $\mathbb{T}$. Este atractivo problema de la síntesis espectral aún no ha sido cerrado, constituyendo una línea de investigación para futuros trabajos.

Referencias

[1] Golubov B.; Efimov A. and Skvortsov V. *Walsh Series and Transforms*. Springer-Science+Business Media, B. V., 1th edition, 1991.

[2] Kaniuth E. *A Course in Cummutative Banach Algebras*. Springer, 1th edition, 2009.

[3] Lin C-H. Chen C-C. Fan G-T., Yang C-L. and Shih C-H. Applications of hadamard transform-gas chromatography/mass spectrometry to the detection of acetone in healthy human and diabetes mellitus patient breath. *Elsevier B.V.*, 20:386–390, 2014.

[4] Osman I. Hassan M. and Yahia M. Walsh-hadamard transform for facial feature extraction in face recognition. *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, 23:194–198, 2007.

[5] IEEE Juefei-Xu F. and Savvides M. Subspace-based discrete transform encoded local binary patterns representations for robust periocular matching on nists face recognition grand challenge. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23:3490–3505, 2014.

[6] Katznelson Y. *An Introduccion to Harmonic Analysis*. Stanford University, 3rd edition, 2002.