

Resolución de problemas con GeoGebra, utilización en las fases interpretativa y de construcción del modelo

Problem solving with GeoGebra, used in the interpretive and model creation phases

Antonio Rey Roque ^{1*}. <https://orcid.org/0000-0003-1205-4981>

Niurys Lázaro Álvarez ¹. <https://orcid.org/0000-0003-1414-5211>

nlazaro@uci.cu

Ana Nelía Domínguez López¹. <https://orcid.org/0009-0009-1538-5672>

anandl@uci.cu

¹Universidad de las Ciencias Informáticas. Carretera a San Antonio de los Baños, Km 2 ½, reparto Torrens, municipio Boyeros, La Habana, Cuba. CP: 19370.

*Autor para la correspondencia. antrey@uci.cu

RESUMEN

Contribuir a mejorar los resultados en la resolución de problemas y en particular las fases interpretativas y de construcción del modelo en los problemas de optimización del Cálculo diferencial en los estudiantes de ingeniería en ciencias informáticas de la universidad homónima es el propósito del presente trabajo, para lo cual se escogió el software de geometría dinámica GeoGebra que cuenta con todos los elementos para efectuar y visualizar cálculos simbólicos, numéricos y gráficos además de esquemas imprescindibles para la interpretación y la modelación de problemas. Para cumplimentar este objetivo se realizó un estudio profundo del software y de la didáctica de la enseñanza-aprendizaje basada en la resolución de problemas, se logró crear un número de objetos con GeoGebra insertados en un sistema mucho más amplio para toda la disciplina y utilizarlos en el proceso docente con un impacto significativo en el rendimiento de los estudiantes y la aceptación de los docentes de matemática.

Palabras clave: Objetos de aprendizaje; GeoGebra; Resolución de problemas; Problemas de optimización; Aplicaciones del Cálculo diferencial

ABSTRACT

Contributing to improving the results in problem solving and in particular the interpretive and model building phases in optimization problems of Differential Calculus in computer science engineering students at the homonymous university is the purpose of this work, for which the dynamic geometry software GeoGebra was chosen, which has all the elements to perform and visualize symbolic, numerical and graphic calculations in addition to essential diagrams for the interpretation and modeling of problems. To fulfill this objective, an in-depth study of the software and the teaching-learning didactics based on problem solving was carried out, it was possible to create a number of objects with GeoGebra inserted into a much broader system for the entire discipline and use them in the teaching process with a significant impact on student performance and the acceptance of mathematics teachers.

Keywords: Learning Objects; GeoGebra; Problem Solving; Optimization Problems; Applications of Differential Calculus

Recibido: 25/11/2025

Aceptado: 15/12/2025

INTRODUCCIÓN

Enseñar matemática mediante la realización de ejercicios con procedimientos algorítmicos repetitivos y fórmulas no permite desarrollar el pensamiento lógico (Leal y Bong, 2015), George Polya, paradigma de la resolución de problemas considera esta práctica como una receta, sin juicio ni imaginación (Polya, 1979). Un aprendizaje significativo de la matemática es posible si en su enseñanza se utiliza la resolución de problemas como vía principal ya que permite al estudiante explorar, reflexionar, representar gráfica y numéricamente los datos para encontrar patrones, conjeturar, comprobar, justificar y llegar a una propuesta de solución utilizando un lenguaje matemático adecuado (Piñeiro, Pinto y Diaz-Levicoy, 2015).

El surgimiento y vertiginoso desarrollo de la computación y dispositivos como las computadoras personales, laptops y móviles junto al desarrollo de software de geometría dinámica como GeoGebra, que a la vez es un sistema de cálculo algebraico

que da la capacidad para las manipulaciones simbólicas, numéricas y gráficas que permiten a profesores y estudiantes interactuar dinámicamente con números, puntos, segmentos, curvas, ecuaciones, funciones y sus gráficas, y de esta forma facilitar el proceso de interpretación y modelación en la resolución de problemas (Preiner, 2008). GeoGebra es un software que favorece la interacción y la visualización dinámica permitiendo el establecimiento de conjeturas y estrategias de resolución de problemas mediante el ensayo, muy útiles en las fases de comprensión del problema y construcción del modelo matemático (Morales et al. (2021). Arbain et al. (2015) y Carballo et al. (2022) citados por Mendoza et al (2024), reconocen las ventajas y facilidades de GeoGebra al ser utilizado en el proceso de enseñanza aprendizaje mediante la resolución de problemas a través de la presentación de los atributos de los entes matemáticos involucrados que permite la formulación de conjeturas las cuales pueden verificarse vía objetos creados con este software.

El aprendizaje del Cálculo es esencialmente importante para los estudiantes de ingeniería, no solo lo referente a los conceptos de límite, derivada e integral, también su concreción en problemas de aplicación como son los que implican al concepto de derivada para optimizar diversos tipos de situaciones geométricas, físicas, económicas, etc. Los softwares de geometría dinámica como GeoGebra que permiten además interactuar con objetos numéricos, geométricos y simbólicos constituyen una efectiva vía si se desea contribuir al aprendizaje basado en la resolución de problemas pues facilita y mejora los procesos de interpretación mediante la visualización y la experimentación al construir el modelo matemático (Morales et al., 2022, Portillo et al., 2019), fases en la que se centra la investigación que se presenta en el presente trabajo.

Trabajar el concepto de derivada en el proceso de resolución de un problema de optimización, coloca al estudiante en un contexto dinámico que requiere una consolidada comprensión del concepto de función y la relación entre variable independiente y variable dependiente mientras imagina la variación en la razón de cambio (Martínez-Miraval, 2019), este es un factor motivador para iniciar una investigación sobre cómo reaccionan los estudiantes a situaciones de este tipo y el efecto que tiene la utilización de herramientas digitales como GeoGebra. El objetivo es explorar cómo el uso de GeoGebra influye en la comprensión y desempeño de los estudiantes al resolver problemas de optimización geométricos y de geometría analítica,

considerando aspectos como la visualización, el razonamiento matemático y la construcción de modelos.

MATERIALES Y MÉTODOS

Se desarrolló una investigación cualitativa exploratoria combinando métodos teóricos y métodos empíricos:

Del nivel teórico:

- Histórico-lógico: para conocer los antecedentes y las tendencias actuales del proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial en la formación de ingenieros del área informática, en particular su aplicación a la resolución de problemas de optimización utilizando GeoGebra, así como de los criterios sobre el tema de investigación por parte de diferentes autores.

Del nivel empírico:

- Observación: del desempeño de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas de optimización con y sin la utilización de GeoGebra.

- Análisis documental:

- Para el estudio de resultados de investigaciones y de documentos relacionados con la enseñanza del Cálculo mediado por asistentes matemáticos, en particular GeoGebra.

- Para el estudio de applets de GeoGebra sobre resolución de problemas de optimización y las posibilidades de reutilizarlos con personalización y adecuación al programa de la disciplina.

- Pre-experimento: para la validación de la propuesta en la práctica pedagógica mediante la comparación del rendimiento de los estudiantes al enfrentar problemas de optimización con y sin la utilización de GeoGebra.

El marco teórico de la investigación realizada se asienta en la teoría la Teoría de las representaciones semióticas del filósofo y psicólogo francés Raymond Duval. Afirma en Duval (2004, p. 35) que la evidencia de tales representaciones se evidencia en los “esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, entre otras”, todas presentes en las fases de interpretación de problema y construcción del modelo matemático.

Para el pre-experimento se seleccionaron los problemas de optimización y se dividió cada grupo de estudiantes en dos partes, una de ellas utilizó los applets de GeoGebra diseñados y elaborados ad hoc y el otro solo pudo emplear lápiz y papel. Este procedimiento se aplicó sucesivamente a cuatro grupos de 29, 25, 30 y 28 estudiantes

respectivamente, los cuales ya estaban familiarizados con el uso de GeoGebra y se siguió la metodología siguiente:

- Observar y registrar el proceso de resolución de problemas en ambas partes de cada grupo documentando el comportamiento, las estrategias utilizadas y cómo fueron solucionando las dificultades que fueron apareciendo. Posteriormente se analizaron las soluciones obtenidas con el objetivo de identificar patrones en el razonamiento y la precisión de las respuestas obtenidas.
- Identificar temas recurrentes en las observaciones, como la influencia de la visualización dinámica en la comprensión de los problemas.
- Evaluar la calidad de las soluciones proporcionadas por ambos grupos, considerando factores como la exactitud, la creatividad en la resolución y la capacidad para generalizar resultados.
- Contrastar las observaciones, entrevistas y producciones escritas para obtener una visión integral de los efectos del uso de GeoGebra

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Selección de los problemas de optimización

La selección se centró en los problemas de optimización que involucran funciones reales de una variable real que se estudian en la asignatura Matemática II de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas que con situaciones geométricas: área, perímetro, volumen; distancia entre puntos; figuras inscriptas y de recorridos mínimos entre puntos. Las temáticas escogidas se entraron en situaciones típicas relacionadas con conocimientos ya establecidos en los estudiantes sobre geometría y geometría analítica, los cuales permiten generalizar a otros tipos de problemas de la misma área o de otras relacionadas con la Física y la Economía, la descripción más específica es:

Problema 1: Volumen máximo de un prisma recto rectangular con área lateral fija.

Problema 2: Área máxima con perímetro fijo de un rectángulo.

Problema 3: Perímetro mínimo con área fija de un rectángulo.

Problema 4: Área máxima de rectángulo inscrito.

Problema 5: Distancia mínima de una curva a un punto del plano.

Problema 6: Camino de recorrido mínimo entre tres puntos no alineados.

Diseño y elaboración con GeoGebra de los applets

Una vez seleccionados los problemas a trabajar se realizó una búsqueda en la comunidad GeoGebra para escoger applets que pudieran ser reutilizados personalizándolos según los objetivos propuestos. Ese proceso tuvo como resultado otros applets cualitativamente superiores que incluyeron varios elementos más para la interacción de los estudiantes con el objeto.

Se muestra y explica en esta sección la secuencia didáctica para el uso del applet correspondiente en los problemas 1, 4 y 5. Los problemas 2 y 3 son similares al 1 y el 6 eleva el nivel de los anteriores:

Problema 1: A partir de una lámina cuadrada de 20cm de lado se desea construir una caja de base cuadrada recortando las esquinas como se muestra en la figura.

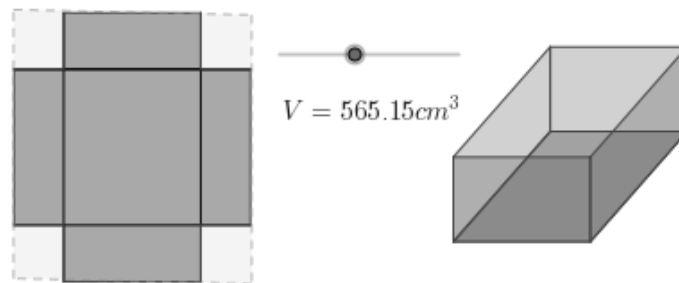


Figura 1: Ilustrativa del problema 1 (Elaborado en el applet de GeoGebra)

El objeto creado permite en primera instancia, de manera interactiva utilizando el deslizador (figura 1) que el estudiante experimente con las dimensiones del corte que debe realizar para conformar la caja a vez que observa el valor del volumen de manera que puede apreciar que primero crece y después decrece, indicativo de la existencia de un máximo. En la siguiente fase (figura 2) define las variables dependientes V (volumen) e independiente x (dimensión del corte en la lámina), y construye la función objetivo incluyendo la definición de su dominio. De nuevo interactúa con el deslizador, pero esta vez puede observar la gráfica de la función volumen, su dominio y de la existencia de un valor máximo absoluto.

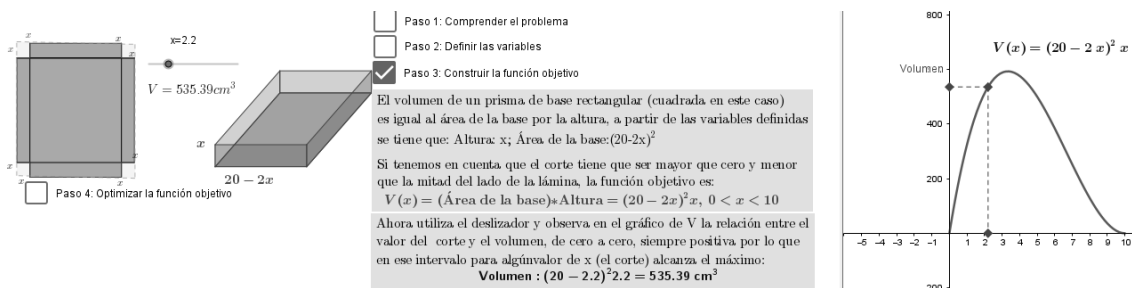


Figura 2: Facsímil del applet para el problema 1 (Elaborado en el applet de GeoGebra)

Problema 4: Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una parábola de ecuación $y = -ax^2 + b$, $a, b > 0$ y el eje de las abscisas.

Este problema vincula la geometría *tradicional* del plano con la geometría analítica al involucrar una parábola y su ecuación directamente. A partir de la representación gráfica del contexto planteado en el problema (figura 3), el estudiante interactúa deslizando uno de los vértices para modificar las dimensiones del rectángulo, de esta forma aprecia la existencia de un valor máximo (área del rectángulo).

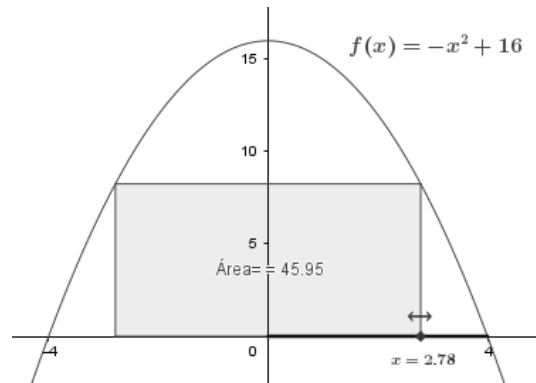


Figura 3: Facsímil del applet para el problema 4 (Elaborado en el applet de GeoGebra)

Una vez comprendida la situación que plantea el problema pasa (figura 4) a la definición de variables A (área del rectángulo) y x (medida de la mitad del lado sobre el eje de las abscisas), y a la construcción del modelo a partir de la fórmula para el área de un rectángulo. Interactúa con el deslizador, pero esta vez puede observar la gráfica de la función volumen, su dominio y de la existencia de un valor máximo absoluto.

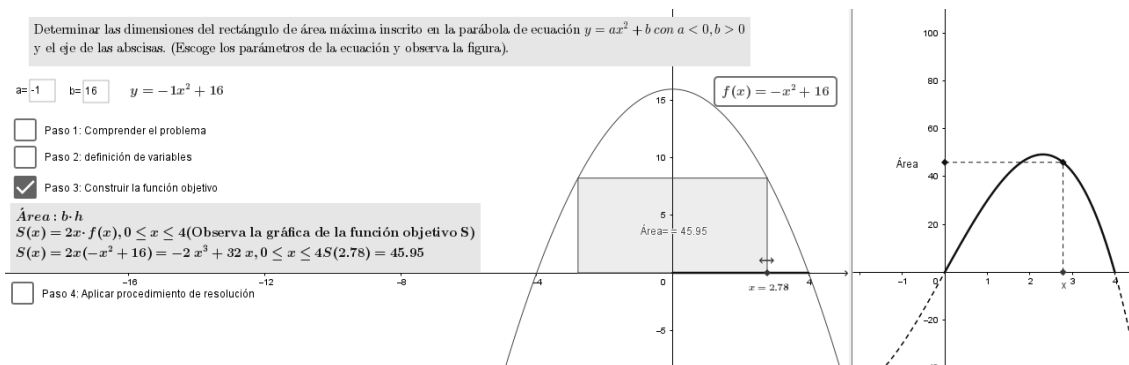


Figura 4: Facsímil del applet para el problema 4 (Elaborado en el applet de GeoGebra)

Problema 5: Determinar las coordenadas del punto (x, y) de la curva con ecuación $y = f(x)$ más cercano al punto $P(a, b)$.

Se trata de un problema de geometría analítica, de distancias entre puntos. GeoGebra permite interactuar (figura 5) con el gráfico de la función $y = f(x)$ (en el ejemplo

$f(x) = x^3 + 1$), el punto $P(x,y)$ y la longitud del segmento que lo une a puntos de la curva f . El estudiante al mover el punto sobre la curva puede observar cómo cambia su longitud y apreciar la existencia de un valor mínimo.

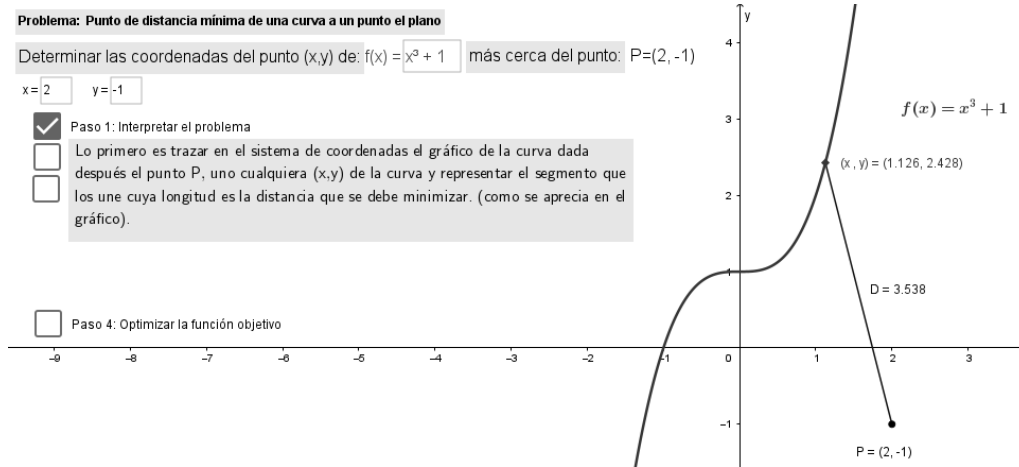


Figura 5: Facsímil del applet para el problema 5 (Elaborado en el applet de GeoGebra)

Posteriormente se pasa a la construcción del modelo matemático utilizando la fórmula de distancia (figura 6). Ya en este paso el estudiante interactúa con el segmento distancia observando el gráfico de la función objetivo donde se aprecia su dominio y extremos.

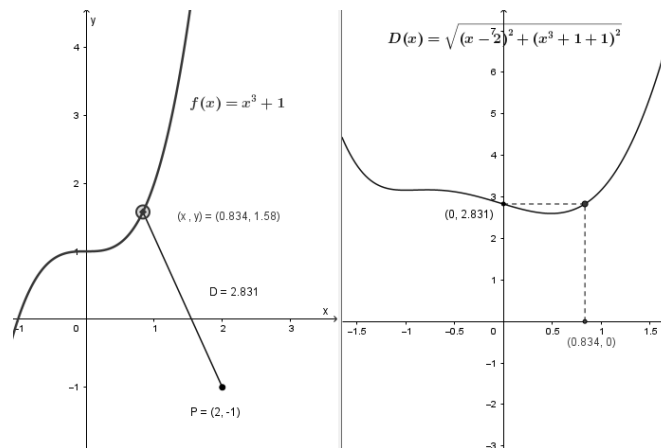


Figura 6: Facsímil del applet para el problema 5 (Elaborado en el applet de GeoGebra)

Implementación de los objetos en el proceso docente-educativo

Los objetos creados para esta temática de la resolución de problemas de optimización se insertan en un sistema de objetos de GeoGebra, casi un centenar, creados y utilizados para las cuatro asignaturas de la disciplina Matemática de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas. Aunque fueron organizados por asignatura lo están también por

temas, de manera que pueden adaptarse con facilidad ante cambios de organización docente y ser utilizados por profesores y estudiantes de otras carreras que incluyen los temas en su plan de estudios, además de manera independiente en el aprendizaje autónomo.

Específicamente, los problemas de optimización con aplicación del cálculo diferencial se estudian en la asignatura Matemática II, no solo para funciones de una variable, también para los problemas que involucran funciones de dos variables independientes. En este sistema de objetos dinámicos e interactivos elaborados con GeoGebra se distinguen tres grupos clasificados de acuerdo a su funcionalidad didáctica: para la comprensión de los conceptos; para resolver problemas genéricos y específicos (como los que se presentan en este trabajo) y como herramientas de cálculo numérico, simbólico y gráfico.

Resultados del pre-experimento

El sistema de objetos creado, en el que se insertan los que corresponden a la resolución de problemas de optimización se ha utilizado en el proceso docente de cuatro versiones de la signatura Matemática II, desde 2022. La resolución de problemas y en particular los problemas de optimización constituyen sin dudas una materia con dificultades en su asimilación, sobre todo en las fases de interpretación del problema y la de construcción del modelo matemático, lo que se constató en la revisión de respuestas en exámenes aplicados en las últimas tres versiones de la asignatura Matemática II.

El pre-experimento se diseñó para ser aplicado en los cuatro grupos de una facultad dividiendo cada grupo de dos subgrupos durante una de dos clases prácticas sobre resolución de problemas de optimización que involucraran funciones objetivo de una variable independiente. Ya en la segunda clase práctica se involucraron a todos los estudiantes en la utilización de los objetos para no crear una diferencia entre unos y otros estudiantes. Posteriormente, los problemas de optimización multivariables fueron todos trabajados con la utilización de estos objetos de GeoGebra.

Para obtener los porcentajes comparativos se aplicó al final de la clase una evaluación escrita, en la tabla 1 se muestran resultados de estudiantes que resolvieron correctamente las fases interpretativas y de construcción del modelo con lápiz y papel solamente (subgrupos A) y los que utilizaron el applet de GeoGebra (subgrupos B):

Grupo	Sub-grupos	% respuestas correctas por fases	
		Interpretativa	Construcción del
1	A (14)	20%	15%
	B (15)	60%	73%
2	A (13)	15%	15%
	B (12)	64%	70%
3	A (15)	33%	30%
	B (15)	55%	60%
4	A (14)	10%	15%
	B (14)	47%	50%
Total	A	19.6%	17.8%
	B	57.1%	62.5

Tabla 1: Resultados del pre-experimento.

La diferencia en los resultados fue significativa en todos los casos y se correspondieron con lo esperado sin necesidad de aplicar alguna de las pruebas estadísticas. Sirvió como fundamentación para el diseño y aplicación de experimentos más profundos y más fundamentados estadísticamente y que no establezcan diferencias entre los estudiantes en cuanto al tratamiento didáctico de este tema.

CONCLUSIONES

Se constató mediante la observación y registro del proceso que la influencia de la utilización de los applets de GeoGebra diseñados ad hoc para los problemas de optimización que se presentan en la asignatura Matemática II (Cálculo diferencial) conllevó a un mayor rendimiento de los estudiantes al ser significativamente superior el porcentaje de respuestas correctas. Se demuestra que la utilización de este tipo de representaciones semióticas contribuye al mejor desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas y por consiguiente una mejor comprensión de la temática en estudio.

RECOMENDACIONES

- Escalar la utilización de los applets (Objetos de enseñanza aprendizaje) elaborados con GeoGebra, en primer lugar, a los problemas de optimización que involucran funciones de varias variables, en segundo lugar, al resto del contenido de Matemática II y finalmente al resto de las asignaturas de la disciplina.
- Diseñar y aplicar un experimento para validar los resultados que no afecten o favorezcan a solo una parte de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arbain, N., y Shukor, N. A., (2015). The Effects of GeoGebra on Students Achievement, <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.356>, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 172, 208–214
- Carballo, A. M., Mojica, A. D., (2022). Uso de GeoGebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato, *Revista Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, ISSN-e 18871984, 111, 71-89
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (Segunda edición)*. Universidad del Vale, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali: Peter Lang, Colombia.
- Leal Huise, S., y Bong Anderson, S. (2015). La resolución de problemas matemáticos en el contexto de los proyectos de aprendizaje. *Revista de Investigación*, 39(84), 71-93.
- Martínez-Miraval, M.A., García-Cuéllar, D.J. y García Rodríguez, M.L.(2023). Razonamiento Covariacional y Técnicas Instrumentadas en la Resolución de un Problema de Optimización Mediado por GeoGebra. *REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education*, 12(1), 56-81. doi: 10.17583/redimat.11419.
- Mendoza-Carlos, Mariano & Lozano-Reátegui, Ronald & Asencios Tarazona, Vitelio & Romero-Cahuana, Ángel. (2024). Mediation of the software GeoGebra in the application of strategies for the mathematization of problems by engineering students in Perú. *Formación universitaria*. 17. 21-34. 10.4067/s0718-50062024000300021.
- Morales C., A., Damián M., A., Locia, E. y Contreras, M.G. (2022). Uso de Geogebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato. *Números*, 111, 71-89.
- Morales, A., Damián, A., Balbuena, A., Marmolejo, J.E. (2021). Trayectoria hipotética de aprendizaje de las transformaciones isométricas durante el cálculo del área de polígonos a través del uso de GeoGebra. *NÚMEROS*, 108(3), 179-193.
- Piñeiro, J., Pinto, E., y Díaz-Levicoy, D. (2015). ¿Qué es la Resolución de Problemas? *Boletín REDIPE*, 4(2), 6-14

- Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Portillo-Lara, H.J., Ávila-Sandoval, M.S., Cruz-Quiñones, M.A. y López-Ruvalcaba, C. (2019). Geogebra y problemas de optimización. *Cultura Científica y Tecnológica*, 16(1), 5-11.
- Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: The Case of GeoGebra*. Dissertation in Mathematics Education Faculty of Natural Sciences. Salzburg.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses. Los tres autores del artículo declaramos que estamos de total acuerdo con lo escrito en este informe y aprobamos la versión final.

Contribución de autoría

Antonio Rey Roque: concepción y redacción del artículo, diseño y elaboración de los applets

Niurys Lázaro Álvarez: diseño y aplicación del pre-experimento.

Ana Nelía Domínguez López: aplicó el pre-experimento en clase y contribuyó a la recopilación de datos.