ESTUDIO DE LAS APROXIMACIONES A LOS PROMEDIOS MÓVILES Y LAS VOLATILIDADES EXPONENCIALES*

Eduardo Piza Volio[1] y Javier Trejos[2], CIMPA, Universidad de Costa Rica

RESUMEN
En este artículo se estudian diversos enfoques para definir promedios móviles y volatilidades desde el punto de vista exponencial, es decir, dando mas ponderación a los datos mas recientes. Se ve que varios de los que enfoques usados en la literatura adolecen de varios problemas de definición. Se propone una manera de definir un sistema completo de pesos y de esta manera corregir algunos de los problemas que presentan esos enfoques. Además, se propone una fórmula recurrente que converge al promedio móvil y la volatilidad exponencial reales. Finalmente, se estudian las cotas para los errores de aproximación que se cometen cuando se usan las fórmulas estudiadas.

ABSTRACT:
In this paper different approaches are studied, for defining moving averages and volatiles from the exponential point of view that is, giving a larger weight to the more recent data. It is obtained that different approaches, appearing in the literature, have different definition problems. A method is proposed for defining a complete weighting system for correcting some of the problems present in these approaches. A recurrent formula that converges to the real moving average and the exponential volatile is proposed. Finally, upper bounds are studied for the approximation error appearing when the studied formulae are used.

KEY WORDS: approximation error, complete weighting system

MSC: 62P20

1. PROMEDIO Y VOLATILIDAD EXPONENCIAL

El promedio exponencial y la volatilidad exponencial de una colección infinita de datos(r_i), $i \in N$, basada en el parámetro $\lambda \in (0,1)$, se definen respectivamente a través de las formulas siguientes:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)\, r_i \qquad (1)$$

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)(r_i - \mu)^2 \right\}^{1/2} \qquad (2)$$

Las ponderaciones $\lambda^{i-1}(1-\lambda)$ empleadas en las fórmulas anteriores forman lo que se denomina como un sistema completo de pesos, esto es, una colección de pesos positivos cuya suma es la unidad:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda) r_i = 1 \qquad (3)$$

Una posible interpretación dentro del campo de las matemáticas financieras consiste en identificar los datos ri con tasas de retorno diarias, de manera que el subındice i en el dato r_i indica que tan reciente en el tiempo es la tasa de retorno considerada. Así, r1 corresponde a la tasa de retorno del dıa de hoy, r2 a la tasa de retorno

* Investigación desarrollada con el auspicio de la Universidad de Costa Rica y el Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD).
E-mail: [1]epiza@cariari.ucr.ac.cr
[2]jtrejos@cariari.ucr.ac.cr

de ayer, r_3 a la tasa de retorno de anteayer, y ası sucesivamente. La idea por detrás de las formulas (1) y (2) y el sistema completo de pesos en (3) estriba en ponderar los datos(r_i) I $\in$ N de forma tal que a aquellos datos que tengan subındices pequeños (esto es, los mas recientes) se les asocia un peso mayor, en comparación con el peso asociado a los datos que tienen subındices grandes (esto es, aquellos que corresponden a fechas más viejas).

El fundamento teórico que justifica el empleo de los pesos $\lambda^{i-1}(1-\lambda)$ en las formulas (1) y (2) proviene de la distribución de probabilidad geométrica o de Pascal , en la cual P[X = i] = p(1 - p) i - 1, donde X denota la variable aleatoria que sigue dicha ley con parámetro p. El evento [X = i] consiste en la repetición de i pruebas independientes de Bernoulli, para las cuales ocurren i - 1 “fracasos” antes de obtener el “primer éxito”. En nuestro contexto se toma p = 1 - λ.

Las formulas (1) y (2) para el calculo de μ y σ hacen referencia a un número infinito de tasas de retorno ri. En la práctica se dispone solamente de una cantidad finita r1, r2,..., rN de tales datos, de manera que μ y σ solo pueden ser calculados en forma aproximada. Mías aún, los datos son actualizados diariamente, disponiéndose cada dıa de un nuevo dato, digamos r0, y por tal razón las aproximaciones a μ y σ van variando con el tiempo. De allı el apelativo de “móvil” al promedio y volatilidad que se calculan.

En la sección 3 de este artículo se estudian diversos esquemas de aproximación a μ y σ y sus errores asociados. También se discuten formas de realizar selecciones apropiadas del parámetro λ (sección 2), así como la relación existente entre este parámetro y la cantidad n de datos a considerar en las aproximaciones a μ y σ. Finalmente en la sección 4 se explica como realizar eficientemente los cálculos de estas aproximaciones en hojas electrónicas tipo Excel.

2. SELECCIÓN DEL PARÁMETRO λ

Los pesos $\lambda^{i-1}(1-\lambda)$ en la fórmula (3) son siempre decrecientes conforme se avanza en el pasado, esto es, conforme aumenta el valor del subíndice i. La intensidad del decrecimiento depende de la selección del parámetro $\lambda \in (0,1)$. Al seleccionar valores de λ cercanos a 1 obtenemos tasas de decrecimiento pequeñas, mientras que valores de λ inferiores nos lleva a tasas de decrecimiento mayores. En otras palabras, valores de λ menores (por ejemplo, λ = 0,93 contra λ = 0,97) generan promedios y volatilidades exponenciales en donde las ponderaciones dan un mayor peso a los datos mías recientes y menos peso a los datos del pasado.

¿Cómo realizar una selección adecuada de λ? No existe una respuesta completa a esta pregunta. Depende del contexto en el cual se estén empleando los datos ri. Sin embargo, las siguientes recomendaciones son empleadas con frecuencia.

2.1. Selección cuando el número de perıodos n es fijo

Cuando se conoce la cantidad de perıodos n o dilas que abarca el instrumento que se está utilizando, siendo esta una cantidad prefijada, se recomienda seleccionar el parámetro λ de acuerdo a la fórmula

$$\lambda = 1 - \frac{1}{n} \tag{4}$$

Así por ejemplo, se aconseja seleccionar $\lambda = 1 - \frac{1}{21} \approx 0{,}9524$ para instrumentos a 1 mes (1 mes = 21 dilas hábiles en promedio), $\lambda = 1 - \frac{1}{46} \approx 0{,}9783$ para inversiones a 2 meses (2 meses = 46 dilas hábiles en promedio) dilas y $\lambda = 1 - \frac{1}{126} \approx 0{,}9921$ para inversiones a 6 meses (6 meses = 126 dilas hábiles en promedio).

En Piza y Trejos [8] se brinda una justificación teórica de este tipo de selección del parámetro λ, la cual es obtenida cuando modelamos el número de per1odos n como la esperanza matemática de una variable aleatoria X que sigue la distribución geométrica o de Pascal de parámetro p =1 −λ (probabilidad de “éxito” en pruebas independientes de Bernoulli). Entonces, al igualar la esperanza matemática de la variable aleatoria X con el número de per1odos n, obtenemos

$$N = EX = \frac{1}{p} = \frac{1}{1-\lambda},$$

que al despejar λ obtenemos la fórmula (4).

2.2. Importancia relativa del presente frente al pasado

Otro punto de vista diferente y quizás mías práctico en la selección del parámetro λ consiste en emplear la fórmula siguiente:

$$\lambda = \frac{1}{1+\phi}$$

donde ϕ indica la importancia relativa de mías (en porcentaje) del dato r1 de hoy frente al dato r2 de ayer. Por ejemplo, si deseamos que el dato de hoy tenga una importancia relativa 10% mayor que el dato de ayer (esto es, ϕ = 0,1), entonces se recomienda seleccionar $\lambda = \frac{1}{121} \approx 0{,}909$. Continuando el ejemplo, si mías bien deseamos que la importancia relativa del dato de hoy sea de un 5% respecto al de ayer, entonces se puede seleccionar $\lambda = \frac{1}{105} \approx 0{,}9523$. Se debe tomar en consideración que este tipo de selección para el parámetro λ (fórmula 5) se encuentra ligada a la anteriormente recomendada en la fórmula 4. En efecto, al igualar ambas formulas obtenemos $1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1+\phi}$, que al despejar nos lleva a la relación precisa entre n y ϕ:

$$\phi = \frac{1}{n-1}.$$

Por ejemplo, cuando n = 21 dilas (esto es, empleando un instrumento a1 mes), obtendríamos, que produce precisamente el valor λ ≈ 0,9523.

3. APROXIMACIONES A μ Y σ

Las formulas (1) y (2) para μ y σ hacen referencia a un número infinito de períodos, lo que en la práctica hace imposible el cálculo de estas cantidades en forma exacta.

En la práctica disponemos solamente de una cantidad finita N de datos r1, r2, ..., rN y debemos calcular aproximaciones para μ y σ. Esto puede hacerse a través de varios enfoques distintos: a) truncando las fórmulas usando solamente los datos disponibles; b) reescalando los pesos de los datos disponibles para que formen un sistema completo de pesos; c) usar un enfoque recursivo. Analizamos a continuación estas variantes, examinando el error de aproximación inducido en cada caso.

3.1. Enfoque de Risk-Metrics

Una de las aproximaciones más difundidas para aproximar μ y σ es la empleada por Risk-Metrics [Página Web http://www.riskmetrics.com/. Es el hostal principal de la empresa Risk-Metrics.], aunque quizás se trate de la metodologíıa más burda en cuanto al tratamiento de los errores de aproximación consiste en fijar un nivel de confianza o umbral positivo α cercano a 0 y cortar las fórmulas (1) y (2) considerando solamente los primeros n períodos (n ≤ N),detal forma que la suma de los pesos supere a la cantidad 1 - α, esto es, se selecciona el menor valor de n que satisfaga la desigualdad siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} (1-\lambda) \geq 1 - \alpha$$

De esta manera se desechan los datos más viejos, esto es, precisamente aquellos datos asociados a pesos cuya suma no supere el umbral α preseleccionado. Resolviendo la anterior desigualdad, obtenemos la cantidad de perıodos a considerar en los cálculos, que denominamos nrm para distinguirlo de otros enfoques:

$$n_{rm} = \mathrm{Int}\left(\frac{\ln(\alpha)}{\ln(\lambda)}\right) + 1 \qquad (6)$$

donde “Int” denota la función parte entera. Las aproximaciones obtenidas μrm y σrm correspondientes a μ y σ respectivamente mediante este criterio, quedan entonces como sigue:

$$\mu_{rn} = \sum_{i=1}^{n_{rm}} \lambda^{i-1}(1-\lambda)r_i \tag{7}$$

$$\sigma_{rn} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_{rm}} \lambda^{i-1}(1-\lambda)(r_i - \mu_{rm})^2 \right\}^{1/2} \tag{8}$$

Algunos ejemplos de la cantidad de períodos n_{rm} a considerar en estos cálculos se presentan en la Tabla 1. Este enfoque de Risk-Metrics presenta dos debilidades que deben ser tomadas en consideración:

λ	**0,001%**	**0,01%**	**0,1%**	**0.5%**	**1%**	**2%**	**5%**
0.90	109	87	66	50	44	37	28
0.91	122	98	73	56	49	41	32
0.92	138	110	83	64	55	47	36
0.93	159	127	95	73	63	54	41
0.94	186	149	112	86	74	63	48
0.95	224	180	135	103	90	76	58
0.96	282	226	169	130	113	96	73
0.97	378	302	227	174	151	158	98
0.98	570	456	342	262	228	194	148
0.99	11460	916	687	527	458	389	298

Cuadro 1. Tabla de valores de número de períodos n_{rm} en función de los valores del nivel de confianza α y el valor de λ, bajo el enfoque de Risk-Metrics.

a) Al cortar las fórmulas considerando solamente n períodos se está aproximando a μ y σ por defecto. Además las aproximaciones obtenidas μrm y σrm no corresponden a promedios ponderados, pues el sistema de ponderaciones en este caso es incompleto (no suma la unidad).

b) No se dispone de un control apropiado del error que se está cometiendo mediante esta aproximación, el cual puede ser más grande que lo esperado cuando los datos r_i tienen magnitudes grandes.

3.2. Aproximaciones empleando los ´n periodos últimos

En esta sección estudiaremos cuales son los verdaderos errores de aproximación que se cometen al truncar las fórmulas del promedio y volatilidad exponenciales considerando solamente los ´n períodos. Emplearemos las últimas aproximaciones

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}(1-\lambda)r_i, \qquad \sigma_n = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)(r_i - \mu_n)^2 \right\}^{1/2} \tag{9}$$

que conducen a los errores de aproximación $|\mu - \mu_n|$ y $|\sigma^2 - \sigma n^2|$ | respectivamente. En la práctica se desea tener control sobre estos errores, o sea, poder seleccionar n de forma tal que ambos errores sean pequeños, digamos inferiores a un cierto umbral de error ε preestablecido de antemano. Piza&Trejos [2003] estudiaron este problema y hallaron que mientras los datos de partida(ri)i∈N□ se encuentren acotados, estos errores de aproximación convergen exponencialmente a 0 cuando n tiende a infinito. Una ligera adaptación de este resultado al contexto actual se resume con el siguiente resultado.

Teorema 1. Supóngase que |ri| ≤ M, para todo i ≥ 1. Entonces, los errores de aproximación |μ - μn| y |σ2 - σn2| tienen las siguientes acotaciones:

$$|\mu - \mu_n| \leq M\lambda^n, \leq 4M^2\lambda^n . \qquad (10)$$

Además, para que ambos errores de aproximación sean inferiores a un umbral preestablecido ε, basta con seleccionar

$$n > \text{Max}\left\{\frac{\ln(\varepsilon/M)}{\ln(\lambda)}, \frac{\ln(\varepsilon/4M^2)}{\ln(\lambda)}\right\}$$

Demostración: Restando μ en (1) con μn en (9) y aplicando la desigualdad triangular y el hecho que |ri | ≤ M obtenemos:

$$\left|\mu - \mu_n\right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)\left|r_i\right| \leq M(1-\lambda)\lambda^n(1-\lambda) + \ldots) = M(1-\lambda)\lambda^n \frac{1}{1-\lambda} = M\lambda^n$$

lo que demuestra la acotación del error de aproximación $|\mu - \mu^n|$. Para el estudio del error de aproximación $|\sigma^2 - \sigma^2 n|$, primeramente considérese las descomposiciones

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)(r_i^2 + \mu^2 - 2r_i\mu) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)r_i^2\right] - \mu^2,$$

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)(r_i^2 + \mu_n^2 - 2r_i\mu_n) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)r_i^2\right] - \mu_n^2 - \lambda^n\mu_n^2$$

Luego, al calcular σ^2 - σ_n^2 obtenemos:

$$\sigma^2 - \sigma_n^2 = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)r_i^2\right] + \mu_n^2 - \mu^2 + \lambda^n\mu_n^2$$

Tomando valor absoluto y empleando sucesivamente las desigualdades $| r | \leq M$, $| \mu - \mu_n | \leq M\lambda^n$, $| \mu - \mu_n | \leq 2$ y $| \mu_n | \leq m$ obtenemos entonces:

$$\left|\sigma^2 - \sigma_n^2\right| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)\left|r_i\right|^2\right] + \left|\mu - \mu_n\right|\left|\mu + \mu_n\right| + \lambda^n\left|\mu_n\right|^2$$

$$\leq M^2\lambda^n + M\lambda^n 2M + M^2\lambda^n = 4M^2\lambda^n,$$

que es la desigualdad propuesta. Finalmente, al resolver en la variable n las desigualdades elementales Mλn < ε ,4M2λn < ε, obtenemos el menor valor de n que debe seleccionarse para que ambos errores de aproximación sean inferiores a ε:

$$n > \max\left\{\frac{\ln(\varepsilon/M)}{\ln(\lambda)}, \frac{\ln(\varepsilon/4M^2)}{\ln(\lambda)}\right\}$$

3.3. Enfoque de Risk-Metrics normalizando pesos

Como hemos visto, el enfoque de Risk-Metrics conduce a un sistema reducido de pesos λi - 1(1 - λ), para i = 1, 2,..., n. El adjetivo “reducido” se refiere al hecho que la suma de estos pesos no alcanza la unidad:

$$\sum_{i=1}^{n_{rm}} \lambda^{i-1}(1-\lambda) = 1-\lambda^{n_{rm}} < 1$$

Con el fin de mejorar este aspecto, los autores proponen estandarizar los pesos, dividiendo cada uno de ellos por la suma de los mismos. Obtenemos entonces un nuevo sistema de pesos que además de ser finito es completo,

$$\frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^{n_{rm}}}, \qquad i = 1,\dots,n_m \qquad (12)$$

cuya suma es la unidad. Esto nos lleva a mejores aproximaciones a μ y σ, que denominaremos mediante μ y σ respectivamente (de “Risk-Metrics Reescalado”), de acuerdo con las fórmulas siguientes:

$$\mu_{rmr} = \sum_{i=1}^{n_{rm}} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1=\lambda^{n_{rm}}} r_i \qquad (13)$$

$$\sigma_{rmr} = \left\{ \sum_{i=1}^{n_{rm}} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1=\lambda^{n_{rm}}} (r_i - \mu_{rmr})^2 \right\}^{1/2} \qquad (14)$$

La cantidad de períodos n_{rm} a considerar permanece igual que en el enfoque de Risk-Metrics. Estudiaremos en la siguiente sección los errores de aproximación que inducen estas aproximaciones μ_{rmr} y Arar.

3.4. Usando n períodos y normalizando pesos

Un enfoque muy popular consiste en aproximar el promedio y volatilidad exponenciales μ y σ empleando una cantidad fija n de períodos, mediante algún esquema que sea coherente con todo lo anterior. La cantidad de períodos generalmente se selecciona de forma tal que corresponda a 1 mes (n = 21), o 2 meses (n = 42), o tres meses (n = 63), etc.

Al prefijar el número de períodos n y proceder al cálculo de las aproximaciones tomando en cuenta en los cálculos solamente los primeros n períodos, previamente debemos realizar ajustes en los pesos, reescalándolos tal y como se explico en (12), con el fin de convertirlos en un sistema completo de pesos (cuya suma sea la unidad).

Para lograr esto, se dividen los pesos λ^i = 1(1 - λ) por la constante 1 - λ^n, que es la suma de los primeros n pesos. De esa manera obtenemos un sistema completo de pesos. En efecto:

$$\sum_{i=1}^{n_{rm}} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1=\lambda^{n_{rm}}} r_i$$

$$\sum_{i=n+1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}(1+\lambda+\lambda^2+..+\lambda^{n-1}) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = 1$$

Empleando estos nuevos pesos normalizados podemos calcular las aproximaciones a μ y σ, denotadas por ˆμn y ˆσn respectivamente, mediante:

$$\hat{\mu}_{nr} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1=\lambda^n} r_i \qquad (15)$$

$$\hat{\sigma}_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n_{rm}} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1=\lambda^n} (r_i - \hat{\mu}_n)^2 \right\}^{1/2} \qquad (16)$$

Bajo la hipótesis que los datos(ri)i∈N□ son acotados, las aproximaciones ˆµn y σˆn convergen a µ y σ respectivamente en forma exponencial, cuando n tiende a infinito. Esto se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 2. Supóngase que |ri | ≤ M, para todo i ≥ 1. Entonces, los errores de aproximación |µ- $\hat{\mu}$ n| y |σ2- $\hat{\sigma}$ n2 | tienen las siguientes acotaciones:

$$|\mu - \hat{\mu}_n| \leq \frac{2M\lambda^n}{1-\lambda^n} \qquad , \qquad |\sigma^2 - \hat{\sigma}^2{}_n| \leq \frac{4M^2\lambda^n}{1-\lambda^n} \qquad (17)$$

Para que ambos errores de aproximación sean inferiores a un umbral preestablecido ε,basta con seleccionar

$$\mathrm{n} > \mathrm{Max}\left\{\frac{\ln(\varepsilon/(\mathrm{M}+\varepsilon))}{\ln(\lambda)}, \frac{\ln(\varepsilon/(4\mathrm{M}^2+\varepsilon))}{\ln(\lambda)}\right\}$$

	Umbral de error ε						
λ	0,001%	0,01%	0,1%	0,5%	1%	2%	5%
0,90	88/94	66/73	44/51	29/36	22/29	16/23	7/16
0,91	98/106	74/81	49/57	32/40	25/33	18/26	8/18
0,92	111/119	83/92	56/64	36/45	28/37	20/29	9/20
0,93	127/137	96/105	64/74	42/52	32/42	23/34	10/23
0,94	149/161	112/123	75/86	49/61	38/50	27/39	12/27
0,95	180/194	135/149	90/104	59/73	45/60	32/47	14/32
0,96	226/243	170/187	113/130	74/91	57/75	40/59	17/40
0,97	306/326	227/250	152/175	99/122	76/100	53/79	23/53
0,98	456/491	342/377	228/263	149/184	114/151	80/119	35/80
0,99	917/986	688/757	459/528	299/370	230/303	161/239	69/161

Cuadro 2. Tabla de valores de número de períodos n en función de los valores del nivel de confianza α y el valor de ε,de acuerdo a los teoremas 1 y 2, para M = 0,1. El valor reportado a la izquierda corresponde al enfoque sin normalizar los pesos, mientras que el valor de la derecha corresponde al enfoque normalizando los pesos.

Demostración: Primeramente estudiemos la acotación del error $|\mu - \hat{\mu}_n|$. Realizamos la descomposición siguiente:

$$\mu - \hat{\mu}_n = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^n}\mu - \hat{\mu}_n = (1-\lambda^n)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i - \lambda^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i$$

Tomando valor absoluto, obtenemos:

$$|\mu - \hat{\mu}_n| \leq = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^n}\mu - \hat{\mu}_n = (1-\lambda^n)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i - \lambda^n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i$$

A continuación estudiamos la acotación del error |σ2 - $\hat{\sigma}_n^2$ |,.Para ello empleamos la siguiente descomposición de $\hat{\sigma}_n^2$:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n}(r_i^2 + \hat{\mu}_n{}^2 - 2r_i\hat{\mu}_n) =$$

$$= \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} \hat{\mu}_n{}^2 - 2\hat{\mu}_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i - \mu_n^2 - \lambda^n \mu_n^2$$

$$= \quad \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i^2 \right] - \hat{\mu}_n{}^2$$

Luego,

$$\sigma^2 - \hat{\sigma}_n{}^2 = \hat{\mu}_n{}^2 - \mu^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}(1-\lambda) r_i^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda) r_i^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^n} r_i^2 \quad n$$

Tomando valor absoluto y empleando sucesivamente las desigualdades |ri|≤M,| μ- $\hat{\mu}_n$ |≤Mλn/(1-λn), ,| μ+ $\hat{\mu}_n$ |≤2M ,y , | $\hat{\mu}_n$ |≤M, obtenemos entonces:

$$| \sigma^2 - \hat{\sigma}_n{}^2 | \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda^n} \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}(1-\lambda) | r_i |^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda) | r_i |^2 + | \mu - \hat{\mu}_n || \mu + \hat{\mu}_n |$$

$$\leq M^2\lambda^n + M^2\lambda^n + \frac{M\lambda^n}{1-\lambda^n} 2M \leq 2M^2\lambda^n + \frac{2M\lambda^n}{1-\lambda^n} \leq \frac{4M^2\lambda^n}{1-\lambda^n}$$

que es la desigualdad propuesta. Finalmente, al resolver en la variable n las desigualdades elementales $\frac{2M\lambda^n}{1-\lambda^n} < \varepsilon, \frac{4M^2\lambda^n}{1-\lambda^n} < \varepsilon$ obtenemos el menor valor de n que debe seleccionarse para que ambos errores de aproximación sean inferiores a ε:

$$n > \max\left\{ \frac{\ln(\varepsilon/(2M+\varepsilon))}{\ln(\lambda)}, \frac{\ln(\varepsilon/4M^2+\varepsilon))}{\ln(\lambda)} \right\}$$

3.5. Enfoque recursivo

Planteamos en esta sección un esquema de recursión simultánea para el calculo aproximado de μ y σ, muy apropiado en la práctica si se desean actualizar los cálculos de cada nuevo dıa (o perıodo) aprovechando los valores ya calculados el dıa anterior.

El esquema consiste en lo siguiente: supongamos que ya hemos calculado las aproximaciones μold y σold a μ y σ, y para el siguiente dıa (o perıodo) contamos con un nuevo dato r. Entonces, procedemos a calcular las nuevas aproximaciones μ y σ mediante la recursión simultanea siguiente:

μnew = λμold+(1−λ)rnw, (19)
σnew = {λ(σolf 2 +μolf2)+(1-λ)rnew 2 μnew }1/2. (20)

Al principio se debe procederá inicializar las cantidades μold y σold de la siguiente manera:

μold = r1, σold = 0.

La convergencia exponencial de estas aproximaciones quedan garantizadas por el siguiente teorema.

Teorema 3. Supóngase que |r| ≤ M, para todo i ≥ 1. Entonces, luego de aplicar el esquema recursivo n + 1 veces, los errores de aproximación |μ - μnew| y |σ2 – σnew 2 | tienen las siguientes acotaciones:

|μ-μnew|≤2Mλn , y |σ2 –σnew 2 |≤6M2λn . (21)

Para que ambos errores de aproximación sean inferiores a un umbral preestablecido ε, basta con seleccionar

$$n > \max\left\{\frac{\ln(\varepsilon/(2M)}{\ln(\lambda)}, \frac{\ln(\varepsilon/6M^2)}{\ln(\lambda)}\right\},. \qquad (22)$$

Demostración: Los n+1 datos sobre los cuales aplicamos el esquema recursivo son rn+1, rn,..., r1. Inductivamente hallamos las siguientes fórmulas:

$$\mu_{new} = \lambda^n r_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}(1-\lambda)\ r_i$$

$$\sigma_{new}^2 = \lambda^n r^2{}_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}(1-\lambda)\ r^2{}_i - \mu^2{}_{new}.$$

Luego,

$$|\mu - \mu_{new}| \le \lambda^n |r_{n+1}| + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)|r_i| \le M\lambda^n + M\lambda^n \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda) = 2M\lambda^n$$

Por otra parte,

$$\sigma^2 - \sigma_{new}{}^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda) r_i^2 - \mu^2 - \lambda^n r_{n\_1}^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}(1-\lambda) r_i^2 + \mu_{new}$$

$$= (\mu - \mu_{new})(\mu + \mu_{new}) - \lambda^n r_{n+1}^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda) r_i^2$$

+μ

de donde,

$$|\sigma^2 - \sigma_{new}{}^2| \le |\mu - \mu_{new}||\mu + \mu_{new}| + \lambda^n |r_{n+1}^2| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda)|r_i^2|$$

$$\le 2M\lambda^n 2M + M^2\lambda^n + M^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(1-\lambda) = 6M^2\lambda^n$$

Finalmente, al resolver en la variable n las desigualdades elementales 2Mλn <ε , 6M2λn <ε, obtenemos los valores de n que deben seleccionarse para que ambos errores de aproximación sean inferiores a ε:

$$n > \max\left\{\frac{\ln(\varepsilon/(2M)}{\ln(\lambda)}, \frac{\ln(\varepsilon/6M^2)}{\ln(\lambda)}\right\}$$

El método recursivo es el más preciso de los discutidos en este artículo, debido a que utiliza todos los datos disponibles, a diferencia de los otros enfoques. Además, posee las ventajas que se trata de un método simple, de rápido cálculo y fácil implementación en hojas Excel. Por tales ventajas, es el método recomendado por los autores para el calculo aproximado de μ y σ2.

4. PROGRAMACIÓN EN HOJAS ELECTRÓNICAS EXCEL

En la Tabla 3 se ilustra una hoja tıpica de Excel, conteniendo información concerniente al Fondo de Capitalización Laboral en Colones. La tabla contiene las siguientes columnas:

En la columna A viene una numeración de los datos. Esta numeración es utilizada por las funciones VolExp y PromExp de Visual Basic, explicadas mas adelante.

En la columna B viene la fecha de cada dato.

En la columna C viene los datos brutos de Activo Neto.

En la columna D vienen la tasa de retorno ri, calculadas a partir de los

Activos Netos mediante la formula Activo Netoi−1

$$r_i = \frac{\text{Activo Neto}_{i-1}}{\text{Activo Neto}_i} \; .$$

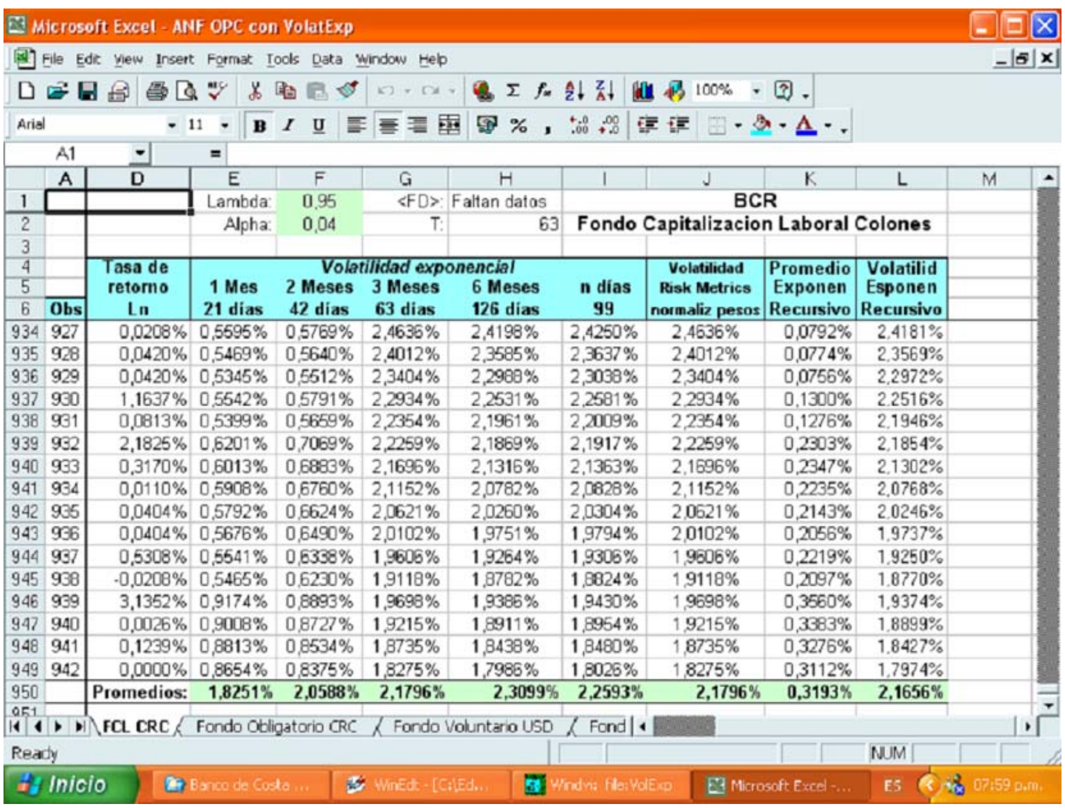
Es a estas tasas de retorno ri a las cuales se les calcula las volatilidades exponenciales. En la tabla aparecen los datos más recientes al final: por ejemplo r942es el dato más reciente, mientras que ries el más viejo.

- A partir de la columna E en adelante vienen los cálculos de las volatilidades exponenciales, siguiendo las aproximaciones descritas en el presente artículo. Se utilizan en los cálculos las funciones VolExp y PromExp pro-gramadas en Visual Basic.

5. LAS FUNCIONES VolExp y PromExp

La función PromExp calcula el promedio exponencial de una serie de datos. Utiliza tres parámetros:

PromExp(celda, lambda, n).



	A	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1			Lambda:	0,95	<FD>:	Faltan datos		BCR			
2			Alpha:	0,04	T:	63		Fondo Capitalizacion Laboral Colones			
3											
4		Tasa de	Volatilidad exponencial					Volatilidad	Promedio	Volatilid	
5		retorno	1 Mes	2 Meses	3 Meses	6 Meses	n días	Risk Metrics	Exponen	Esponen	
6	Obs	Ln	21 días	42 días	63 días	126 días	99	normaliz pesos	Recursivo	Recursivo	
934	927	0,0208%	0,5595%	0,5769%	2,4636%	2,4198%	2,4250%	2,4636%	0,0792%	2,4181%	
935	928	0,0420%	0,5469%	0,5640%	2,4012%	2,3585%	2,3637%	2,4012%	0,0774%	2,3569%	
936	929	0,0420%	0,5345%	0,5512%	2,3404%	2,2988%	2,3038%	2,3404%	0,0756%	2,2972%	
937	930	1,1637%	0,5542%	0,5791%	2,2934%	2,2531%	2,2581%	2,2934%	0,1300%	2,2516%	
938	931	0,0813%	0,5399%	0,5659%	2,2354%	2,1961%	2,2009%	2,2354%	0,1276%	2,1946%	
939	932	2,1825%	0,6201%	0,7069%	2,2259%	2,1869%	2,1917%	2,2259%	0,2303%	2,1854%	
940	933	0,3170%	0,6013%	0,6883%	2,1696%	2,1316%	2,1363%	2,1696%	0,2347%	2,1302%	
941	934	0,0110%	0,5908%	0,6760%	2,1152%	2,0782%	2,0828%	2,1152%	0,2235%	2,0768%	
942	935	0,0404%	0,5792%	0,6624%	2,0621%	2,0260%	2,0304%	2,0621%	0,2143%	2,0246%	
943	936	0,0404%	0,5676%	0,6490%	2,0102%	1,9751%	1,9794%	2,0102%	0,2056%	1,9737%	
944	937	0,5308%	0,5541%	0,6338%	1,9606%	1,9264%	1,9306%	1,9606%	0,2219%	1,9250%	
945	938	-0,0208%	0,5465%	0,6230%	1,9118%	1,8782%	1,8824%	1,9118%	0,2097%	1,8770%	
946	939	3,1352%	0,9174%	0,8893%	1,9698%	1,9386%	1,9430%	1,9698%	0,3560%	1,9374%	
947	940	0,0026%	0,9008%	0,8727%	1,9215%	1,8911%	1,8954%	1,9215%	0,3383%	1,8899%	
948	941	0,1239%	0,8813%	0,8534%	1,8735%	1,8438%	1,8480%	1,8735%	0,3276%	1,8427%	
949	942	0,0000%	0,8654%	0,8375%	1,8275%	1,7986%	1,8026%	1,8275%	0,3112%	1,7974%	
950		Promedios:	1,8251%	2,0588%	2,1796%	2,3099%	2,2593%	2,1796%	0,3193%	2,1656%	

Cuadro 3. Ejemplo de una tabla Excel, con datos reales del Fondo de Capitalización Laboral en Colones.

La función calcula el promedio exponencial de los n datos ubicados hacia arriba de la casilla “celda” en la hoja Excel, usando el parámetro λ = lambda. El código de PromExp en Visual Basic es el siguiente:

Function PromExp(Rng As Range, Lambda As Single, n As Integer)

As Variant

```
Dim sum As Double

Dim i As Integer

If n > Cells(Rng.Row, 1) Then

PromExp = "<FD>"

ElseIf n <= 0 Then

PromExp = "<n Neg>"

Else

sum=0Fori=1Tonsum=sum+Lambda^(i-1)*(1-Lambda)*
Rng.Item(2-i)Nextisum=sum/(1-Lambda^n)PromExp=sum
End If
End Function
```

Es importante explicar que esta función utiliza la numeración existente en la columna A de la hoja Excel, por lo cual el usuario debe mantener esta numeración, como se ilustra en la Tabla 3.

Por otra parte, la función VolExp también utiliza los mismos tres parámetros, con el mismo significado:

VolExp(celda, lambda, n). El código en Visual Basic de esta función es el siguiente:

```
Function VolExp(Rng As Range, Lambda As Single, n As Integer)

As Variant
Dim sum As Double
Dim i As Integer
Dim mu As Double

If n > Cells(Rng.Row, 1) Then
VolExp = "<FD>"
ElseIf n <= 0 Then
VolExp = "<n Neg>"

Else
mu = PromExp(Rng, Lambda, n)
sum = 0
Fori=1Ton

sum=sum+Lambda^(i-1)*(1-Lambda)*
(Rng.Item(2-i))^2Nextisum=Sqr((sum/(1-Lambda^n))-mu^2)VolExp=sum
End If
End Function
```

También esta función utiliza la numeración de los datos en la hoja Excel, ubicada en la columna A.

REFERENCIAS

BAXTER, M. and A. RENNIE (1996): **Financial Calculus**, Cambridge University Press, Cambridge.

BENIGNA, S. (2000): **Financial Modeling**, The MIT Press, Second Edition, Massachusetts.

DUFFIE, D.(1992): **Dynamic Asset Pricing Theory**, Princeton University Press, Princeton.

KARATZAS, I. and S.E. SHREVE (2001): **Methods of Mathematical Finance**. Springer Verlag, Berlın.

LUENBERGER, D.G. (1998): **Investment Science**, Oxford University Press, New York.

MEYER, P. (1992): **Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas**. Addison Wesley Iberoamérica, México.

PLISKA, S.R. (1997): **Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models**. Blackwell Publishers, Oxford.

PIZA,E.and J. TREJOS (2003): "Promedios móvil y volatilidad exponencial". Publicación de Pre Prints del CIMPA, No. 2, 2004, San José. ISSN 1409-3820.