Ciencias Matemáticas, Vol. 29, No. 1, Pag. 69-73, 2015
Recibido 05-2015

Empleo del sistema algebraico computacional SymPy en el proceso de aprendizaje del cálculo infinitesimal (diferenciación)
Use of the computer algebra system SymPy in the learning process of infinitesimal calculus (differentiation)

Carlos Segura Vidal[1]*, Ricardo Abreu Blaya[1], Julio Cruz Cruz[1]

Resumen El cálculo infinitesimal constituye una rama importante del análisis matemático y dentro del mismo el cálculo diferencial. En el presente trabajo se propone profundizar en el estudio del concepto de derivada y la resolución de problemas mediante la utilización del CAS SymPy, brindando así un nuevo criterio para la comprensión de su contenido y su aplicación. Con esto se facilitan numerosos cálculos que admiten plantear problemas más complejos y más cercanos a la realidad, propiciando así mayor vinculación con la práctica. SymPy se puede utilizar de manera interactiva como los CAS a los que se está acostumbrado y también se puede integrar con el código Python como una biblioteca más.

Abstract The calculus is an important branch of mathematical analysis and within the differential calculus. In the present work aims to deepen the study of the concept of derivative and problem solving using CAS: Sympy, providing and a new approach to understanding its content and application. With this many calculations are provided that allow problematic more complex and closer to reality, thus promoting greater link with practice. Sympy can be used interactively as the CAS to which it is being used and can be integrated the Python code as a library.

Palabras Clave
Cálculo diferencial, SymPy, CAS, resolución de problemas, generación de gráficos

[1] *Departamento de Licenciatura en Matemática, Universidad de Holguín, Cuba, csegurav@facinf.uho.edu.cu, rabreu@facinf.uho.edu.cu, jcruzc@facinf.uho.edu.cu*
***Autor para Correspondencia**

1. Introducción

Las Matemáticas constituyen la puerta y la llave de las ciencias; estas ocupan un lugar primordial en el avance de la cultura de cada sociedad. Ayudan a modelar disímiles problemáticas de la realidad, potencian el desarrollo del pensamiento haciendo este mucho más abstracto, lógico, analítico y deductivo. Aún no existe una rama de las matemáticas por muy abstracta que sea, que en algún momento, que no pueda aplicarse a los fenómenos del mundo.

La sociedad de hoy no podría funcionar sin matemáticas. Prácticamente todo lo que actualmente nos parece natural, desde la televisión hasta los teléfonos móviles, desde los grandes aviones de pasajeros hasta los sistemas de navegación por satélite en los automóviles, desde los programas de los trenes hasta los escáneres médicos, se basa en ideas y métodos matemáticos (Stewart, [4])

La Matemática es el resultado de una larga evolución histórica, que posee lenguaje propio y una estructura conceptual compleja en su contenido por lo que entraña serias dificultades en su enseñanza y su aprendizaje a lo largo de la historia. (De Guzmán, [1]).

Su desarrollo ha hecho posible el gran avance científico y tecnológico con el que se cuenta en nuestros días, ya que en gran medida estos resultados dependen directa o indirectamente de esta ciencia, tal es su importancia que es la disciplina básica de cualquier currículo.

La Didáctica de la Matemática abarca desde el análisis del conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje, hasta los marcos teóricos y metodológicos que permiten interpretar, predecir y actuar sobre los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pasando por los conocimientos profesionales necesarios para transmitir y valorar dichos fenómenos (Rico, Sierra y Castro, [3]).

En la enseñanza y aprendizaje de la Matemática el desarrollo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) adquieren un papel primordial. Para su estudio se cuenta con diferentes lenguajes de programación (Logo, HyperCard), software educativos (objetos virtuales de aprendizaje, simuladores, enciclopedias, multimedias), los sistemas algebraicos computacionales (CAS del inglés computer algebra system) entre los que se destacan GAP, Maxima, Singular para el Álgebra, entre otros, todos ellos posibilitan su empleo en función del desarrollo de la Matemática y su enseñanza.

Los CAS son capaces de realizar operaciones simbólicas; SymPy es una biblioteca escrita en Python, entre sus principales funciones se encuentran: el manejo de números enteros de precisión arbitraria y de números racionales; simplificación básica; expansión; sustitución básica, manejo de funciones sobre el cuerpo de los complejos; divisibilidad y factorización de polinomios; resolución de ecuaciones algebraicas, diferenciales y sistemas; operaciones con matrices simbólicas; límites; derivación; integración y generación de gráficos 2D y 3D a partir de conjunto de datos.

El cálculo infinitesimal constituye una rama importante del análisis matemático y dentro del mismo el cálculo diferencial. Consiste en el estudio del cambio de las variables dependientes cuando cambian las variables independientes de las funciones o campos objetos del análisis. El principal objeto de estudio en el cálculo diferencial es la derivada (Edwards, Hostetler y Larson, [2]).

2. Surgimiento del concepto

Uno de los avances más importante en la historia de las matemáticas fue el cálculo infinitesimal. Fue inventado alrededor de 1680 por Isaac Newton y Gottfried Leibniz de forma independiente. Leibniz lo publicó primero, pero Newton - incitado por amigos ultra patriotas - reclamó la prioridad y describió a Leibniz como un plagiario (Stewart, [4]).

2.1 Cálculo infinitesimal

¿Qué es el cálculo infinitesimal? Los métodos de Newton y Leibniz son más fáciles de entender si presentamos previamente las ideas principales. El cálculo infinitesimal es la matemática de las tasas de cambio instantáneas: ¿con qué rapidez está cambiando una magnitud concreta en este preciso instante? El cálculo infinitesimal tiene dos ramas principales. El *cálculo diferencial* proporciona métodos para calcular tasas de cambio, y tiene muchas aplicaciones geométricas, en particular encontrar tangentes a curvas. El *cálculo integral* hace lo contrario: dada la tase de cambio de una magnitud, determina la propia magnitud. Las aplicaciones geométricas del cálculo integral incluyen los cálculos de áreas y volúmenes (Stewart, [4]).

2.1.1 Diferenciación

La primera idea clave del cálculo infinitesimal es la diferenciación, que obtiene la derivada de una función. La derivada es la tasa a la que está cambiando $f(x)$, comparada con cómo está cambiando x: la tasa de cambio de $f(x)$ con respecto a x. Desde el punto de vista geométrico, la tasa de cambio es la pendiente a la tangente a la gráfica de f en el valor x. Puede aproximarse encontrando la pendiente a la secante: una línea que corta a la gráfica de f en dos puntos próximos, correspondientes a x y $x+h$, respectivamente, donde h es pequeño. La pendiente de la secante es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Supongamos ahora que h se hace muy pequeño. Entonces la secante se aproxima a la tangente a la gráfica en x. De modo que, en cierto sentido, la pendiente requerida - la derivada de f en x - es el límite de esta expresión cuando h se hace arbitrariamente pequeño.

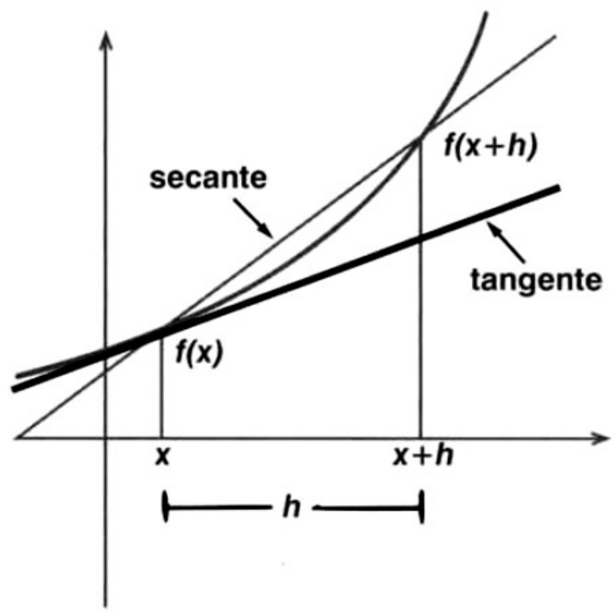

Figura 1. Interpretación gráfica.

Formalmente, la derivada de una función f en un número x, denotada con $f'(x)$, es

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

si este límite existe.

Reglas de derivación En la práctica se tornaría tedioso si siempre se tuviera que calcular la derivada de una función aplicando la definición, de modo tal, que para ello, se desarrollan las reglas para hallar las derivadas sin tener que usar directamente dicha definición. Estas reglas permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, algebraicas, exponenciales y logarítmicas, trigonométricas, y trigonométricas inversas. Estas reglas se utilizan para la resolución de problemas en que intervienen razones de cambio, y la aproximación de funciones.

2.1.2 Aplicaciones de la derivación

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se pide la manera óptima de hacer algo, por ejemplo, ¿Cuál es la forma de una lata que minimice sus costo de fabricación?, ¿Cuál es la aceleración máxima de un trasbordador espacial?, ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre? Estos primeros problemas se reducen a encontrar los *valores máximo o mínimo* de una función.

Numerosas aplicaciones del cálculo dependen de la capacidad para deducir hechos referentes a la función f a partir de la información concerniente de sus derivadas. Como $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, nos dice cuál es la dirección en que avanza la curva en cada punto. Resulta entonces razonable esperar que lo que se sepa de $f'(x)$ ayudará a saber más de $f(x)$. (Stewart, [5]).

Para la resolución de cualquiera de estos problemas de la vida real tenemos en común: el cálculo de la derivada, y en ello también pudiera ser concerniente el cómputo para encontrar los ceros de la función obtenida, evaluarla en algún punto, la elaboración de su gráfico entre otras operaciones. El uso de la tecnología es significativa pues ayuda a la comprensión de estos importantes conceptos; el alumno debe conocer con profundidad el contenido, los sistemas algebraicos computacionales le ayudarán a encontrar los resultados de una forma más eficiente y rápida.

3. Cálculo simbólico

SymPy está escrito en Python lenguaje de programación de muy alto nivel, por lo cual al utilizarse como una librería se pueden implementar algoritmos empleando las funcionalidades de cálculo simbólico que brinda; al estar escrito en dicho lenguaje es fácil de entender y de modificar; se puede establecer con otras librerías como SciPy , NumPy, todas incluidas en el IDE Python(x,y). Se asume que el lector conoce aspectos básicos del lenguaje.

3.1 Primeros pasos en SymPy

Lo primero es añadir la biblioteca para importar todas las funcionalidades y operar con ellas a través de la siguiente sintaxis:

```
>>> import sympy
>>> sympy.sqrt(8)
2*sqrt(2)
```

Si se quiere declarar la expresión simbólica para trabajar con la expresión matemática $x-2y$

```
>>> from sympy import symbols
>>> x,y = symbols(''x y'')
>>> exp = x-2*y
```

En SymPy las expresiones se pueden factorizar o expandir indistintamente según como se vayan a utilizar, por ejemplo:

```
>>> x*exp
>>> x*(x-2*x*y)
>>> from sympy import expand, factor
>>> expanded_expr = expand(x*expr)
>>> expanded_expr
x**2 - 2*x*y
>>> factor(expanded_expr)
x*(x - 2*y)
```

Para tener acceso a todos los métodos de la biblioteca y no tener la necesidad de ir importándolos de uno en uno o por grupos y también para iniciar la impresión en caracteres Unicode se puede hacer con las siguientes instrucciones:

```
>>> from sympy import *
>>> init_printing(use_unicode=True)
```

3.2 Cálculo de límites, derivadas y gráfico de funciones

Para obtener el límite de una expresión se hace por medio del método limit, SymPy puede obtener el límite de casi cualquier función de una o varias variables por la derecha o por la izquierda para ello utiliza el algoritmo de Gruntz.

La sintaxis de limit es limit(func, x, x_0, dir="+"), calcula el límite de la función func cuando func(x) tiende a x_0, por la derecha (se obtiene por defecto $x \to x_{0+}$) o por la izquierda dir="-" ($x \to x_{0-}$); x_0 del mismo modo puede ser infinito $(-\infty, \infty)$.

```
>>> from sympy import *
>>> x=symbols(``x'')
>>> func=(3*x**2-x-2)/(5*x**2+4*x+1)
>>> limit(func, x, oo)
3/5
>>> func2=(sqrt(x**2+9)-3)/x**2
>>>limit(func2,x,0)
1/6
>>> limit(sin(x)/x, x, 0)
1
```

A continuación se muestra un ejemplo del cálculo de la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ utilizando (1) tomado de Stewart [5].

```
>>> from sympy import *
>>> def func(x) :
        return x**2-8*x+9
>>> limit((func(x+h)-func(x))/h, h, 0)
2*x - 8
```

La derivada de una expresión exp se calcula utilizando el método diff, a continuación un ejemplo:

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4-x) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}(4-x) + x^{\frac{3}{5}}(-1) \\ &= \frac{3(4-x)-5x}{5x^{2/5}} \\ &= \frac{12-8x}{5x^{2/5}} \end{aligned}$$

```
>>> from sympy import *
>>> init_printing(use_unicode=True)
>>> exp = x**Rational(3,5)*(4-x)
>>> diff(exp,x)
```

$-x^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{5x^{\frac{2}{5}}}(-3x+12)$

```
>>> dff = diff(exp,x)
>>> factor(dff)
```

$-\frac{(8x-12)}{5x^{\frac{2}{5}}}$

En el ejemplo se puede ver, primero para declarar un número racional, se utiliza el método Rational(n, d); en diff(exp, x,[n]) el segundo parámetro es la variable con respecto a la que se va a derivar ya que SymPy trabaja también derivadas con varias variables, y n es opcional por defecto es la primera derivada si se específica calcula la derivada n-ésima, se puede utilizar factor(exp) para obtener la expresión más simplificada.

Para graficar funciones se utiliza el método plot(exp, (x, r1, r2)) donde exp es la función, x es el rango de la variable libre, r1y r2 el intervalo.

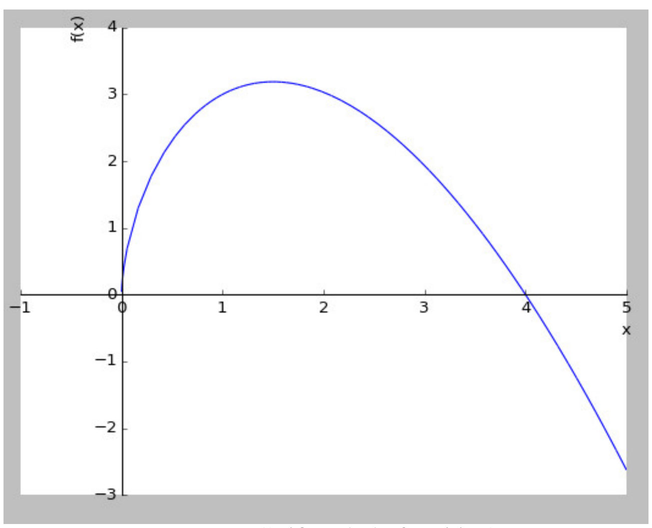

Figura 2. Gráfica de la función 2.

```
>>> from sympy import *
>>> exp = x**Rational(3,5)*(4-x)
>>> plot(exp, (x,-1,5))
```

Otra forma de usarse es plot es para representar varias funciones con rangos específicos cada una plot((expr1, r), (expr2, r),....(exprN,rN)).

Se han brindado algunas de las funcionalidades para el límite, la derivación y gráfica de funciones. Para más información consultar el manual de SymPy (Team, 2014).

Código donde se calcula la derivada de $f(x)$ y se muestra el gráfico de $f(x)$ y $f'(x)$:

```
from sympy import *
def main():
  x=symbols(x)
  exp = x**Rational(3,5)*(4-x)
  print(\n\n Expression:)
  pprint(exp, use_unicode=False)
  print(\n\n Diff:)
  pprint(diff(exp,x), use_unicode=False)
  print(\n\n Factor:)
  dff=factor(diff(exp,x))
  pprint(dff, use_unicode=False)
  print(\n\n Graphic Represetation: )
  plot((exp,(x,-5,8)),(dff,(x,-10,10)))
if __name__ == __main__:
main()
```

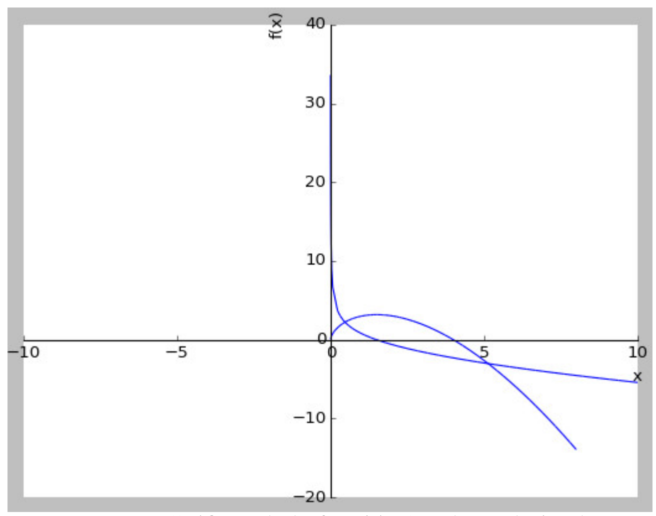

Figura 3. Gráficas de la función 2 y de su derivada.

En muchas ocasiones es importante evaluar el resultado de una expresión, por ejemplo calcular $f'(2)$. Para ello se utiliza la función evalf. Si en dff está la derivada de $f'(x)$, $f'(2)$ se calcula de la siguiente forma:

```
>>> dff.evalf(subs = {x : 2})
>>> -0.606286626604159
```

4. Conclusiones

El presente trabajo procura contribuir a la enseñanza y al aprendizaje del cálculo diferencial, en carreras como Licenciatura en Matemática y en algunas ingenierías que aplican estos contenidos al tributar a algunas de las necesidades existentes en dicho proceso. Con la utilización de SymPy el estudiante puede construir su propio conocimiento a través de la experimentación a la vez que se permite el proceso de modelación matemática de los contenidos en problemas reales utilizando la resolución de problemas.

Se logra además el enriquecimiento de conceptos matemáticos mediante aproximaciones gráficas y algebraicas de los conceptos y los problemas. La visualización permite adquirir la capacidad de establecer relaciones gráficas y algebraicas entre los diferentes conceptos.

Referencias

[1] De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones. OEI (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura).* Editorial Popular.

[2] Edwards, B., Hostetler, R., & Larson, R. (2003). *Calculus of a Single Variable: Early Transcendental Functions (3a edición).*

[3] Rico, L., Sierra, M., & Castro, E. (2000). *Didáctica de la Matemática. Fundamentos didácticos de las áreas curriculares.* Madrid: Síntesis.

[4] Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años.* Barcelona: Crítica.

[5] Stewart, J. (2002). *Cálculo con trascendentes tempranas, 4a. edición.* México: International Thomson Editores.

[6] Team, S. D. (2014). SymPy Documentation. Release 0.7.6.