SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO COMPLEJO PARA LAS ECUACIONES DE TIPO ELÍPTICO

Lorgio F. Batard[1] y Otilio B. Mederos[2], Departamento de Matemática, Universidad Central de Las Villas, Santa Clara, Villa Clara, Cuba
Andro Gonzáles[3], Universidad de Ciego de Ávila, Ciego de Ávila, Cuba

RESUMEN
En este trabajo se plantea un problema elíptico con condiciones de contorno complejas que es reducido, mediante el operador de Fourier, a un problema de contorno de Riemann cuya solución es conocida. A partir de la solución del problema de Riemann se obtiene la solución en cuadraturas de dos casos particulares bastante generales del problema elíptico planteado.

ABSTRACT
In this paper an elliptic problem with complex boundary conditions has been transformed into a Riemann boundary problem of known solution by means of the Fourier operator. This allows the quadrature solutions of two widely generalized particular cases of the original problem.

1. INTRODUCCIÓN

En [1] y [2] se hace un estudio de las solubilidad del problema de contorno de Riemann para el semiplano en las clases $L_2^{-\lambda}(\overline{\mathcal{R}}) \times L_2^{\lambda+}(\overline{\mathcal{R}})$ si el coeficiente pertenece a la clase $L_2^{\lambda+}(\overline{\mathcal{R}+1})$, tiene índice finito y el término independiente pertenece a $L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$.

En [3] se hace una descripción de una clase de problemas de la Física Matemática que se reducen a un problema de contorno de Riemann para el semiplano, mediante la transformación de Fourier. Se describe además en dicho artículo el método general de solución y se da un condición que permite determinar cuando el problema está correctamente planteado, en el sentido que su reducción al problema de Riemann sea factible.

En este trabajo, a partir de los resultados antes descritos, se establecen condiciones fácilmente probables sobre los coeficientes de la ecuación y las condiciones de contorno de los problemas que se plantean en el primer epígrafe, que garantizan la solubilidad de los mismos.

En el segundo epígrafe se ofrecen definiciones y se plantean resultados necesarios, que facilitan la lectura de los epígrafes siguientes. En el tercer epígrafe se hace el planteamiento del problema que se estudia. Utilizando la trasformada de Fourier, en el cuarto epígrafe se reduce el problema planteado en el epígrafe 2 a un problema de Riemann en el semiplano.

En el epígrafe quinto se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes y el término independiente del problema para que satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann que aquí se estudia.

En el epígrafe sexto se estudian dos casos particulares del problema planteado en el epígrafe 3, ambos con un alto nivel de generalidad, se concretan las condiciones para que se puedan aplicar los resultados del epígrafe 5 y se determina el índice del coeficiente. Finalmente en el epígrafe 7 se determina la solución del problema homogéneo en las clases de funciones requeridas, correspondientes a los casos estudiados en el epígrafe anterior.

E-mail: [1]logio@uclv.edu.cu
[2]otilio@mfc.uclv.edu.cu
[3]pfiandro@mfc.uclv.edu.cu

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS AUXILIARES

Dada una función f : $\mathcal{R} \rightarrow \mathrm{C}$ si existe la integral

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt \left(g(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)e^{-ixt}dt \right),$$

para algún x real, se denomina integral de Fourier de f(x) (integral de Fourier inversa de G(x)). Si se determina una clase de funciones f(t) (G(t)) para la cual existe F(x) (g(x)), entonces la función $V(V^{-1})$ definida por

$$f \xrightarrow{V} F = Vf \left(G \xrightarrow{V^{-1}} g = V^{-1}G \right)$$

se denomina transformada de Fourier de f (transformada inversa de Fourier de G). En el trabajo se denota siempre con la misma letra minúscula y mayúscula a la función y su integral de Fourier respectivamente.

Se indica por el símbolo $[\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty}$ el cambio de $\varphi(t)$ cuando t recorre el eje de las abscisas según el sentido positivo; o sea:

$$[\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty).$$

Se define el índice (ver [4]) de una función compleja continua y que no se anula sobre el eje real, $M(t) = m_1(t) + im_2(t)$, $t \in \mathbf{R}$, de la forma siguiente

$$\mathrm{Ind}M(t) = \frac{1}{2\pi}\,[\arg M(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln M(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} d\,[\ln M(t)].$$

Si M(t) no es diferenciable, pero es de variación acotada, la integral se entiende en el sentido de Stieltjes. Del teorema del resto logarítmico (Principio del Argumento) se tiene que si M es el valor de contorno de una función analítica en el semiplano superior (inferior), con la excepción quizás de un numero finito de polos en este semiplano, entonces se cumple la igualdad:

$$\mathrm{Ind}M(t) = N - P \quad (\mathrm{Ind}M(t) = P - N),$$

donde IndM(t) denota el índice de M, y por N y P se indica el número de ceros y polos en el semiplano superior (inferior) respectivamente, contado cada cero y polo tantas veces como su orden de multiplicidad.

En el trabajo se utilizan las siguientes notaciones: por $\mathcal{F}$(D) se indica la clase de las funciones complejas con dominio D y por $\mathcal{K}$ a $\mathcal{R}$ ó $\mathcal{C}$.

Sea f : $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{K}$, se dice que f satisface la condición de Hölder en $\mathcal{R}$ si existen las constantes A > 0 y λ, $0 < \lambda \leq 1$ tales que:

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ se tiene

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq A\,|x_2 - x_1|^{\lambda}$$

b) $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}$, $\exists N > 0$: sí $|x_1|, |x_2| > N$ se tiene

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq A \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|^{\lambda}$$

La clase de funciones que satisfacen las condiciones a) y b) para un determinado λ se denota por $C_\lambda(\overline{\mathcal{R}})$ de las condiciones anteriores $\lim_{|x|\to\infty} F(x) = b$ (constante) y F es continua y acotada en R. Además, si $\lambda > 1$ se tiene $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ es constante.

Se dice que $f : \mathcal{R} \to \mathcal{K}$ es continua, sobre $\overline{\mathcal{R}}$ si existen, son finitas e iguales $\lim_{|x|\to-\infty} F(x)$ y $\lim_{|x|\to+\infty} F(x)$. La clase de estas funciones se denota por $C(\overline{\mathcal{R}})$. Por $D_A(\overline{\mathcal{R}})$ se denota la clase de de funciones $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ que cumple.

i) f tiene derivadas acotadas sobre $\mathcal{R}$,

ii) $\lim_{|x|\to\infty} F(x) = l\,l$

Para $0 < \lambda_1 < \lambda_1 < 1$ se cumple que:

$$D_A(\overline{\mathcal{R}}) \subset C_1(\overline{\mathcal{R}}) \subset C_{\lambda_2}(\overline{\mathcal{R}}) \subset C_{\lambda_1}(\overline{\mathcal{R}}) \subset C(\overline{\mathcal{R}})$$

Proposición: Para todo $\lambda \in (0, 1]$ la clase $C_\lambda(\overline{\mathcal{R}})$ con la suma de funciones, el producto de funciones y el producto por un escalar, es un algebra asociativa. Con una norma adecuada $C_\lambda(\overline{\mathcal{R}})$ se convierte en un álgebra de Banach.

Decimos que $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ es el elemento de $L_2(\overline{\mathcal{R}})$ si $f_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$ es igual a un valor real finito. La clase de funciones de $L_2(\mathcal{R})$ que pertenece a una clase de funciones de Holder sobre $\mathcal{R}$ se denota por el símbolo {{0}}, o sea:

$$\{\{0\}\} = [U_{\lambda\in(0,1]} C_\lambda \mathcal{R}] \cap L_2(\mathcal{R}).$$

La intersección de $C_\lambda(\mathcal{R})$ y $L_2(\mathcal{R})$ se denota por $L_2^\lambda(\mathcal{R})$; luego $\{\{0\}\} = U_{\lambda\in(0,1]} L_2^\lambda(\overline{\mathcal{R}})$.

Se tiene la propiedad siguiente:

Proposición 3: La clase de funciones $L_2^\lambda(\overline{\mathcal{R}})$ es un espacio de Banach con la norma.

$$\| \;\|_2^\lambda = \| \;\|_\lambda + \| \;\|_2,$$

donde $\| \;\|_\lambda$ es cualquier norma definida sobre $C_\lambda(\overline{\mathcal{R}})$.

La clase de funciones cuya integral de Fourier pertenece a la $L_2^\lambda(\overline{\mathcal{R}})$ se denota por $\{0\}_\lambda$. Sobre esta clase la función $\| \;\|_{\{0\}\lambda}$ definida por $\|f\|_{\{0\}\lambda} = \|V f\|_2^\lambda$, es una norma que hace de $\{0\}_\lambda$ un espacio completo.

La clase de las funciones $f \in L_2(\mathcal{R})$ tales que $f(x) \equiv 0$ si $x < 0$ ($x > 0$) se denota por $L_{2+}(\mathcal{R})$ ($L_{2-}(\mathcal{R})$).

La clase de las funciones $f \in L_2(\mathcal{R})$ prolongables analíticamente al semiplano superior (inferior) y tales que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dx < M \quad \text{para } y > 0,$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dx < M \quad \text{para } y < 0 \right),$$

donde M es independiente de y se indica por $L_2^{+}(\overline{\mathcal{R}})$ ($L_2^{-}(\overline{\mathcal{R}})$).

Es conocido el siguiente teorema

Teorema 4: Una condición necesaria y suficiente para que f pertenezca a $L_{2+}(\mathcal{R})(L_{2-}(\mathcal{R}))$ es que su integral de Fourier F pertenezca a $L_{+2}(\mathcal{R})(L_{-2}(\mathcal{R}))$.

Cuando hablamos de la norma de $L_2^{\pm}(\overline{\mathcal{R}})$ nos referimos a la heredada de $L_2(\mathcal{R})$.

La clase de funciones $f \in \{0\}_\lambda$ tales que $f(x) \equiv 0$ si $x < 0$ ($x > 0$) se denota por $L_{2+}^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$ $L_{2-}^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$).

La clase de funciones $F \in L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$ que son prolongables analíticamente al semiplano superior (inferior) y que satisface:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dx < M \quad \text{para } y > 0,$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dx < M \quad \text{para } y < 0 \right),$$

donde M es independiente de y, se denota por $L_2^{\lambda+}(\overline{\mathcal{R}})$ ($L_2^{\lambda-}(\overline{\mathcal{R}})$).

La clase de las funciones f que no se anulan sobre $\mathcal{R}$ y tales que $f(\pm\infty) = 1$ y $(f - 1) \in L_2^{\lambda+}(\overline{\mathcal{R}})$ ($L_2^{\lambda-}(\overline{\mathcal{R}})$) se denota por $L_2^{\lambda+}(\overline{\mathcal{R}}+1)$ ($L_2^{\lambda-}(\overline{\mathcal{R}}+1)$).

De la definición de las clases anteriores y del teorema no.4 se tiene trivialmente el teorema siguiente:

Teorema 5: Una condición necesaria y suficiente para que f pertenezca a $L_{2+}^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$ ($L_{2-}^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$) es que su integral de Fourier pertenezca a $L_2^{\lambda+}(\overline{\mathcal{R}})$ ($L_2^{\lambda-}(\overline{\mathcal{R}})$).

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Dada la ecuación diferencial de tipo elíptico

$$u_{xx}(x, y) + u_{y,y}(x, y) + k\mu(x, y) = g(x, y),\ k < 0, \tag{1}$$

en la banda

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : 0 < y < 1\}, \tag{2}$$

y las condiciones de contorno

$$\alpha_{00}\mu(x, 1^-) + \alpha_{10}\mu_x(x, 1^-) + \alpha_{01}\mu_y(x, 1^-) = g_{10}(x), \quad x \in \mathcal{R}, \tag{3}$$

$$\beta_{00}\mu(x, 0^+) + \beta_{10}\mu x(x, 0^+) + \beta_{01}\mu_y(x, 0^+) = g_{11}(x), \quad x < 0, \tag{4}$$

$$\gamma_{00}\mu(x, 0^+) + \gamma_{10}\mu_x(x, 0+) + \gamma_{01}\mu_y(x, 0^+) = g_{12}(x), \quad x > 0, \tag{5}$$

donde α_{ij}, β_{ij}, γij, i, j = $\overline{0,1}$ son números reales, $g \in L_2(\mathcal{R})$ para todo y, $0 < y < 1$, $g_{10} \in L_2(\mathcal{R})$, $g_{11} \in L_2(-\infty, 0)$ y $g_{12} \in L_2(0, +\infty)$; se desea encontrar condiciones sobre los elementos conocidos de (1), (3)-(5) para que la ecuación (1) tenga solución única en la banda (2), que satisfaga las condiciones (3)-(5) y que pertenezca a la clase:

$$S = \{u \in \mathcal{F}(D): u_{xx} \in L_2(\mathcal{R}),\ u_{yy} \in L_2(\mathcal{R}),\ u \in L_2(\mathcal{R}),\ 0 < y < 1\}. \qquad (6)$$

4. REDUCCIÓN AL PROBLEMA DE RIEMANN

A continuación se aplica la técnica descrita en [3] para reducir el problema planteado en la sección (3) a un problema de Riemann para el semiplano.

a) **Aplicación de la transformada de Fourier a la ecuación (1)**

Realizando esta operación se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2U(x,y)}{dy^2} + (k - x^2)U(x, y) = G(x, y) \qquad (7)$$

b) **Obtención de la solución de la ecuación diferencial (7)**

Las raíces de la ecuación característica,

$$p^2 + (k - x^2) = 0,$$

correspondiente a (7) son:

$$Z_1(x) = -Z(x), \qquad (8)$$

$$Z_2(x) = Z(x), \qquad (9)$$

donde $Z(x) = \sqrt{x^2 - k}$; luego la solución general de (7) es:

$$U(x, y) = C_1(x)e^{-Zy} + C_2(x)e^{Zy} + V(x, y), \qquad (10)$$

donde $Z = Z(x)$, $V(x, y)$ es una solución particular de (7) y $C_1(x)$, $C_2(x)$ son funciones arbitrarias que se deben determinar.

c) **Adaptación de las condiciones de contorno (4), (5) para la aplicación de la trasformada de Fourier**

Con ese objetivo se introducen las funciones f_+ y f_-:

$$f_+(x) = \begin{cases} \text{función desconocida de } L_2(0, +\infty) & x \geq 0; \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ \text{función desconocida de } L_2(-\infty, 0) & x \geq 0. \end{cases}$$

Estas funciones permiten escribir (4) y (5) en la forma

$$\beta_{00}\mu(x, 0^+) + \beta_{10}\mu_x(x, 0^+) + \beta_{01}\mu_y(x, 0^+) = g_{11}^-(x) + f_+(x), \qquad x < 0, \qquad (11)$$

$$\gamma_{00}\mu(x, 0^+) + \gamma_{10}\mu_x(x, 0+) + \gamma_{01}\mu_y(x, 0^+) = g_{12}^-(x) + f_-(x), \qquad x > 0, \qquad (12)$$

donde

$$g_{11-}(x) = \begin{cases} g_{11}(x) & x \leq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$g_{12+}(x) = \begin{cases} g_{12}(x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

d) **Aplicación de la trasformada de Fourier a las nuevas condiciones de contorno**

Realizando esta acción en (3), (11)y (12) se obtiene:

$$[\alpha_{00} - i\,\alpha_{10}x]U(x, 1^-) + \alpha_{01}\frac{dU}{dy}(x, 1^-) = G_{10}(x) \tag{13}$$

$$[\beta_{00} - i\beta_{10}x]U(x, 0^+) + \beta_{01}\frac{dU}{dy}(x, 0^+) = G_{11}^-(x) + F^+(x) \tag{14}$$

$$[\gamma_{00} - i\gamma_{10}x]U(x, 0^+) + \gamma_{01}\frac{dU}{dy}(x, 0^+) = G_{12}^+(x) + F^-(x) \tag{15}$$

De acuerdo a la definición de f_- y f_+ las funciones F^- y F^+ se pueden considerar (ver [4]) como los valores límites de las funciones $F^-(z)$ y $F^+(z)$ analíticas en el semiplano inferior y superior respectivamente, que satisfacen las condiciones.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F^-(x+iy)\right|^2 dx < M, \quad \text{si } y < 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F^+(x+iy)\right|^2 dx < M, \quad \text{si } y > 0,$$

respectivamente, donde M es el mismo para todas las y.

e) **Obtención de una ecuación funcional en la cual las únicas funciones desconocidas son F^- y F^+**

A partir de (11) se obtiene fácilmente

$$\frac{dU}{dy} = -zC_1(x)e^{-zy} + zC_2(x)e^{zy} + \frac{dv}{dy}(x,y). \tag{16}$$

Sustituyendo (10) y (16) en (13), (14) y (15) y efectuando las operaciones necesarias se obtiene el sistema:

$$B_{11}(x, z)C_1(x) + B_{12}(x, z)C_2(x) = H_1(x) \tag{17}$$

$$B_{21}(x, z)C_1(x) + B_{22}(x, z)C_2(x) - F+(x) = H_2(x) \tag{18}$$

$$B_{31}(x, z)C_1(x) + B_{32}(x, z)C_2(x) - F-(x) = H_3(x) \tag{19}$$

donde:

$$B_{11}(x, z) = e^{-z}(\alpha_{00} - i\alpha_{10}x - \alpha_{01}z) = e^{-z}P_{11}(x, z)$$

$$B_{12}(x, z) = e^{z}(\alpha_{00} - i\alpha_{10}x + \alpha_{01}z) = e^{z}P_{12}(x, z)$$

$$B_{21}(x, z) = \beta_{00} - i\beta_{10}x - \beta_{01}z = P_{21}(x, z)$$

$$B_{22}(x, z) = \beta_{00} - i\beta_{10}x + \beta_{01}z = P_{22}(x, z)$$

$$B_{31}(x, z) = \gamma_{00} - i\gamma_{10}x - \gamma_{01}z = P_{31}(x, z)$$

$$B_{32}(x, z) = \gamma_{00} - i\gamma_{10}x + \gamma_{01}z = P_{32}(x, z)$$

$$H_1(x) = G_{10}(x) - [\alpha_{00} - ix\alpha_{10}]\, V(x, 1^-) - \alpha_{01}\frac{\partial V}{\partial y}\ (x, 1^+)$$

$$H_2(x) = G_{11}^-(x) - [\beta_{00} - ix\beta_{10}]\, V(x, 0^+) - \beta_{01}\frac{\partial V}{\partial y}\ (x, 0^+)$$

$$H_3(x) = G_{12}^+(x) - [\gamma_{00} - ix\gamma_{10}]\, V(x, 0^+) - \gamma_{01}\frac{\partial V}{\partial y}\ (x, 0^+)$$

Obsérvese que si $V(x, j)$, $xV(x, j)$ y $\frac{\partial V}{\partial y}(x, j)$, $j = \overline{0,1}$ pertenecen a $\mathcal{L}_2(R)$ entonces H_1, H_2 y H_3 también pertenecen a $\mathcal{L}_\in(\mathcal{R})$.

Si imponemos condiciones para que:

$$\Delta(x,z) = \begin{vmatrix} B_{11}(x,z) & B_{12}(x,z) \\ B_{21}(x,z) & B_{22}(x,z) \end{vmatrix} \left(\Delta_1(x,z) = \begin{vmatrix} B_{11}(x,z) & B_{12}(x,z) \\ B_{31}(x,z) & B_{32}(x,z) \end{vmatrix} \right), \tag{20}$$

sea distinto de cero, entonces como:

$$\begin{vmatrix} B_{11}(x,z) & B_{12}(x,z) & 0 \\ B_{21}(x,z) & B_{22}(x,z) & 0 \\ B_{31}(x,z) & B_{32}(x,z) & -1 \end{vmatrix} = \Delta_1(x,z) \qquad \left(\begin{vmatrix} B_{11}(x,z) & B_{12}(x,z) & 0 \\ B_{31}(x,z) & B_{32}(x,z) & -1 \\ B_{11}(x,z) & B_{32}(x,z) & 0 \end{vmatrix} = \Delta_1(x,z) \right).$$

Se puede asegurar que el rango de las matrices

$$B(x,z) = \begin{pmatrix} B_{11}(x,z) & B_{12}(x,z) & 0 & 0 \\ B_{21}(x,z) & B_{22}(x,z) & -1 & 0 \\ B_{31}(x,z) & B_{32}(x,z) & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y

$$W(x,z) = \begin{pmatrix} B_{11}(x,z) & B_{12}(x,z) & 0 & 0 & H_1(x) \\ B_{21}(x,z) & B_{22}(x,z) & -1 & 0 & H_2(x) \\ B_{31}(x,z) & B_{32}(x,z) & 0 & -1 & H_3(x) \end{pmatrix},$$

es igual a tres y consecuentemente el sistema (17)-(19) puede reducirse a una ecuación con solo dos incógnitas.

Para ello de las ecuaciones (17) y (18) se obtiene que:

$$C_1(x, z) = \frac{\begin{vmatrix} H_1(x) & B_{12}(x,z) \\ H_3(x) + F^+(x) & B_{22}(x,z) \end{vmatrix}}{\Delta(x,z)} \tag{21}$$

$$C_1(x, z) = \frac{\begin{vmatrix} B_{11}(x,z) & H_1(x) \\ B_{21}(x,z) & H_2(x) + F^+(x) \end{vmatrix}}{\Delta(x,z)} \tag{22}$$

y sustituyendo (21) y (22) en (19) se obtiene la ecuación funcional:

$$F^+(x) = D(x)F^-(x) + \frac{\Delta_2(x,z)}{\Delta_1(x,z)}H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x,z)}{\Delta_1(x,z)}H_3(x) \tag{23}$$

donde

$$D(x) = D_1(x, \sqrt{x^{2-k}}), \quad z = \sqrt{x^2 - k},$$

$$D_1(x,z) = \frac{\Delta(x,z)}{\Delta_1(x,z)} = \frac{e^{-2z}P_{11}(x,z)P_{22}(x,z) - P_{12}(x,z)P_{21}(x,z)}{e^{-2z}P_{11}(x,z)P_{32}(x,z) - P_{12}(x,z)P_{31}(x,z)}, \tag{24}$$

y

$$\Delta_2(x, z) = \begin{vmatrix} B_{21}(x,z) & B_{22}(x,z) \\ B_{31}(x,z) & B_{32}(x,z) \end{vmatrix} .$$

5. CONDICIONES DE SOLUBILIDAD DEL PROBLEMA DE RIEMANN CORRESPONDIENTE A LA ECUACIÓN (23)

En este epígrafe se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de (1), (3)-(5), para que el coeficiente y el término independiente de (23) satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann estudiado en [2].

De acuerdo a [2], para obtener la solución de (23) en la clase $L_2^{\lambda\pm}(\mathcal{R})L_2^{\pm}(\mathcal{R})$), se requiere que D(x) pertenezca a la clase $L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}}+1)$ y el término independiente pertenezca a $L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})L_2(\mathcal{R})$).

Siendo $L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}}+1)$ la clase de las funciones f que satisfacen las condiciones siguientes.

(i) f no tiene ceros ni polos sobre $\mathcal{R}$

(ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 1$

(iii) (f − 1) $\in L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$

5.1 Determinación de condiciones para que D(x) satisfaga la condición (i)

Introduciendo las funciones:

$$P(x, z) = P_{11}(x, z)P_{22}(x, z) = (Az^2 + Bz + Cx^2 + D) + ix(Ez + F),$$

$$Q(x, z) = P_{12}(x, z)P_{21}(x, z) = (Az^2 - Bz + Cx^2 + D) + ix(-Ez + F),$$

$$P_1(x, z) = P_{11}(x, z)P_{32}(x, z) = (A'z^2 + B'z + C'x^2 + D') + ix(-E'z + F'),$$

$$Q_1(x, z) = P_{12}(x, z)P_{32}(x, z) = (A'z^2 - B'z + C'x^2 + D') + ix(-E'z + F'),$$

donde

$$A = -\alpha_{01}\beta_{01},\ A' = -\alpha_{01}\gamma_{01},\ B = \alpha_{01}\beta_{00} - \alpha_{00}\beta_{01},\ B' = \alpha_{01}\gamma_{00} - \alpha_{00}\gamma_{01},$$

$$C = -\alpha_{10}\beta_{10},\ C' = -\alpha_{10}\gamma_{10},\ D = \alpha_{00}\beta_{00},\ D' = \alpha_{00}\gamma_{00},\ E = \alpha_{10}\beta_{01} - \alpha_{01}\beta_{10}, \tag{25}$$

$$E' = -\alpha_{10}\gamma_{01} - \alpha_{01}\gamma_{10},\ F = -\alpha_{00}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{00},\ F' = \alpha_{00}\gamma_{10} - \alpha_{10}\gamma_{00}.$$

Resulta de (24) que

$$D_1(x, z) = \frac{e^{-2x}P(x,z) - Q(x,z)}{e^{-2x}P_1(x,z) - Q_1(x,z)} \tag{26}$$

Lema No.1. El conjunto de soluciones reales comunes a P(x, z) y Q(x, z)(P_1(x, z) y Q_1(x, z)) es:

a) {0}, si y sólo si B = 0 y Ak − D = 0 (B´ = 0 y A´k − D = 0).

b) $\left\{\pm\sqrt{\frac{Ak - D}{A + C}}\right\}$, si y sólo si B = 0, E = 0, F = 0 y $\frac{Ak - D}{A + C} > 0$ (B´= 0, E´= 0, F´= 0 y $\frac{A´k - D´}{A´+C´} > 0$)

Demostración La demostración se hará para P(x, z) y Q(x, z). Estas funciones se anulan simultáneamente si y sólo si:

$$Az^2 + Bz + Cz^2 + D = 0 \tag{27}$$

$$Az^2 - Bz + Cz^2 + D = 0 \tag{28}$$

$$x(Ez + F) = 0 \tag{29}$$

$$x(-Ez + F) = 0 \tag{30}$$

Trivialmente se prueba que el sistema (27)-(30) tiene solución si y sólo si B = 0 es decir si y sólo si se reduce al sistema (29)-(31) donde por (31) se indica la ecuación:

$$(A + c)x^2 - (Ak - D) = 0 \tag{31}$$

El conjunto solución de la ecuación (31) es $\left\{\pm\sqrt{\frac{Ak - D}{A + C}}\right\}$ y como el sistema (29)-(30) tiene como única solución la trivial, queda obviamente demostrado el lema.

Lema No. 2. Si se cumple una de las cuatro condiciones

(i) $B \neq 0$,

(ii) B = 0, $E \neq 0$ y $Ak - D \neq 0$

(iii) B = 0, $F \neq 0$ y $Ak - D \neq 0$

(iv) B = 0, E = 0, F = 0 y $\frac{Ak - D}{A + C} < 0$

entonces la únicas raíces reales que puede tener

$$e^{-2\left|\sqrt{x^2-k}\right|} R(x) - S(x) = 0 \tag{32}$$

Son los elementos de S = {−x_1, 0, x_1}, donde

$$x_1 = \left|\sqrt{\frac{BF - DE + kAE}{E(A + C)}}\right|, \quad \frac{BF - DE + kAE}{E(A + C)} \geq 0 \tag{33}$$

si y sólo si:

$$e^{-2\sqrt{a^2-k}} = \frac{\operatorname{Re} S(x) - \operatorname{Re} R(x) - \operatorname{Im} S(x) \operatorname{Im} R(x)}{\left[\operatorname{Re} R(x)\right]^2 + \left[\operatorname{Im} R(x)\right]^2}\Big|_{x = a} \tag{34}$$

para $a \in S$, donde:

$$R(x) = P(x, \left|\sqrt{x^2 - k}\right|) \text{ y } S(x) = Q(x, \left|\sqrt{x^2 - k}\right|).$$

Demostración De acuerdo al **Lema No. 1**, para que R(x) y S(x) no tengan raíces reales comunes es necesario y suficiente que se cumpla una de las condiciones (i)-(iv). En este caso si x = a es una raíz real de la ecuación (32), entonces $R(a) \neq 0$ y $S(a) \neq 0$, y consecuentemente esta es equivalente a la ecuación:

$$e^{-2\sqrt{x^2-k}} = \frac{S(x)}{R(x)} = \frac{\operatorname{Re}S(x) + i\operatorname{Im}S(x)}{\operatorname{Re}R(x) + i\operatorname{Im}R(x)}$$

$$= \frac{\operatorname{Re}S(x)\operatorname{Re}R(x) - \operatorname{Im}S(x)\operatorname{Im}R(x)}{[\operatorname{Re}R(x)]^2 + [\operatorname{Im}R(x)R(x)]^2}$$

$$+ i\frac{\operatorname{Im}S(x)\operatorname{Re}R(x) - \operatorname{Re}S(x)\operatorname{Im}R(x)}{[\operatorname{Re}R(x)]^2 + [\operatorname{Im}R(x)]^2}$$

Luego como $e^{-2\left|\sqrt{x^2-k}\right|}$ es una función real de variable real, la igualdad anterior se cumple si y sólo si:

$$\operatorname{Im}S(x)\operatorname{Re}R(x) - \operatorname{Re}S(x)\operatorname{Im}R(x) = 0,$$

o sea, si y sólo si:

$$2x\left|\sqrt{x^2 - k}\right|\left[E(A + C)x^2 - (BF - ED + kAE\right] = 0,$$

El conjunto solución de esta ecuación viene dado por

$$S = \{-x_1, 0, x_1\},$$

donde $x_1 = \left|\sqrt{\frac{BF - DE + kAE}{E(A + C)}}\right|$ y $\frac{BF - DE + kAE}{E(A + C)} \geq 0.$

Trivialmente $a \in S$ es una raíz real de (32) si y sólo si se cumple (34).

Nota: Un lema similar se tiene para la ecuación $e^{-2\left|\sqrt{x^2-k}\right|} R_1(x) - S_1(x) = 0$ con solamente sustituir los parámetros de R(x) y S(x) por los correspondientes de $R_1(x) = P_1(x, \left|\sqrt{x^2 - k}\right|$ y $S_1(x) = Q_1(x, \left|\sqrt{x^2 - k}\right|)$.

Teorema no.1 La ecuación

$$e^{-2\left|\sqrt{x^2-k}\right|} R(x) - S(x) = 0 \left(e^{-2\left|\sqrt{x^2-k}\right|} R_1(x) - S_1(x) = 0\right)$$

no tiene raíces reales si y sólo si se satisface una de las cuatro condiciones siguientes:

a) $\alpha_{01}\beta_{00} - \alpha_{00}\beta_{01} \neq 0$ ($\alpha_{01}\gamma_{00} \neq 0$)

b) $\alpha_{01}\beta_{00} - \alpha_{00}\beta_{01} = 0$, $\alpha_{10}\beta_{10} \neq 0$ y $\alpha_{01}\beta_{01}k + \alpha_{00}\beta_0 \neq 0$

($\alpha_{01}\gamma_{00} - \alpha_{00}\gamma_{01} = 0$, $\alpha_{10}\gamma_{01} - \alpha_{01}\gamma_{10} \neq 0$ y $\alpha_{01}\gamma_{01}k + \alpha_{00}\gamma_{00} \neq 0$)

c) $\alpha_{01}\beta_{00}$ - $\alpha_{00}\beta_{01}$ = 0, $\alpha_{00}\beta_{00} \neq 0$ y $\alpha_{01}\beta_{01}k + \alpha_{00}\beta_{0} \neq 0$

($\alpha_{01}\gamma_{00}$ - $\alpha_{00}\gamma_{01}$ = 0, $\alpha_{00}\gamma_{10} + \alpha_{10}\gamma_{00} \neq 0$ y $\alpha_{01}\gamma_{01}k + \alpha_{00}\gamma_{00} \neq 0$)

d) $\alpha_{01}\beta_{00}$ - $\alpha_{00}\beta_{01}$ = 0, $\alpha_{10}\beta_{01}$ - $\alpha_{01}\beta_{10}$ = 0 y $\alpha_{10}\beta_{00} + \alpha_{10}\beta_{00}$ = 0, $\dfrac{\alpha_{01}\beta_{01}k+\alpha_{00}\beta_{00}}{(\alpha_{01}\beta_{10}-\alpha_{10}\beta_{01})(\alpha_{01}\beta_{01}+\alpha_{10}\beta_{10})}<0$

$$\left(\alpha_{01}\gamma_{00}-\alpha_{00}\gamma_{01}=0,\ \alpha_{10}\gamma_{01}-\alpha_{01}\gamma_{10}=0 \text{ y } \alpha_{00}\gamma_{10}+\alpha_{10}\gamma_{00}=0,\ \frac{\alpha_{01}\beta_{01}k+\alpha_{00}\beta_{00}}{(\alpha_{01}\beta_{10}-\alpha_{10}\beta_{01})(\alpha_{01}\beta_{01}+\alpha_{10}\beta_{10})}<0\right)$$

O una de las tres condiciones siguientes

e) $\dfrac{BF-DE+kAE}{E(A+C)}<0 \quad \left(\dfrac{B'F'-D'E'+kA'E''}{E'(A'+C')}<0\right)$

f) $\dfrac{BF-DE+kAE}{E(A+C)}\geq 0 \quad \left(\dfrac{B'F'-D'E'+kA'E''}{E'(A'+C')}\geq 0\right)$

$$e^{-2\left|\sqrt{x_1^2-k}\right|}\neq\left[\frac{\operatorname{Re}S(x)\operatorname{Re}R(s)-\operatorname{Im}S(x)\operatorname{Im}R(x)}{[\operatorname{Re}S(x)]^2+[\operatorname{Im}R(x)]^2}\right]_{x=\pm x^1}\left(e^{-2\left|\sqrt{x_1^2-k}\right|}\neq\left[\frac{\operatorname{Re}S_1(x)\operatorname{Re}R_1(s)-\operatorname{Im}S_1(x)\operatorname{Im}R_1(x)}{[\operatorname{Re}S_1(x)]^2+[\operatorname{Im}R_1(x)]^2}\right]_{x=\pm x_1'}\right)$$

donde $x_1 = \left|\sqrt{\dfrac{BF-DE+kAE}{E(A+C)}}\right| \left(x_1' = \sqrt{\dfrac{B'F'-D'E'+kA'E'}{E'(A'+C')}}\right)$

g) $e^{-2\left|\sqrt{k}\right|}\neq\dfrac{\operatorname{Re}S(0)}{\operatorname{Re}R(0)}\left(e^{-2\left|\sqrt{x-k}\right|}\neq\dfrac{\operatorname{Re}S_1(0)}{\operatorname{Re}R_1(0)}\right)$

5.2. Determinación de las condiciones para que D(x) satisfaga la condición (ii)

Como

$$\lim_{|x|\to\infty} D(x) = \lim_{|x|\to\infty}\frac{P_{21}(x,z)}{P_{31}(x,z)} = \lim_{|x|\to\infty}\frac{-\beta_{01}z-i\beta_{10}x+\beta_{00}}{-\gamma_{01}z-i\gamma_{10}x+\gamma_{00}}$$

Se tiene trivialmente en el siguiente teorema.

Teorema no. 2. El límite del segundo miembro existe y es distinto de cero si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes

a) β_{01} + i $\beta_{10} \neq 0$ y γ_{01} + i $\gamma_{10\neq 0}$. En este caso el límite es

$$l = \frac{\beta_{01}-i\beta_{10}}{\gamma_{01}+i\gamma_{00}}.$$

b) β_{01} + i β_{10} = 0 y γ_{01} + i γ_{10} = 0. En este caso el límite es

$$l = \frac{\beta_{00}}{\gamma_{00}}.$$

si $l \neq 1$, entonces multiplicando (23) por (1/l) y considerando las funciones:

$$F_1^+ = \frac{1}{l}F^+,\ \ F_1^- = F^- \text{ y } D_2 = \frac{1}{l}D.$$

se obtiene la ecuación funcional

$$F_1^+(x) = D_2(x)F_1^- + \frac{1}{l}\left(\frac{\Delta_2(x,z)}{\Delta_1(x,z)}H_1 - H_2 + \frac{\Delta(x,z)}{\Delta(x,z)}H_3\right), \tag{35}$$

para la cual se cumple que

$$\lim_{|x|\to\infty} D(x) = 1.$$

5.3. Determinación de condiciones para que se satisfaga la condición (iii)

Teorema no.3 Si se cumple simultáneamente la condición a) y una de las condiciones b) o c) del teorema no.1, y una cualquiera de las condiciones a) y b) del **teorema no.2**; entonces (D(x) − 1) $\in L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$.

Demostración: Probemos primeramente que (D(x) − 1) pertenece a $C_\lambda(\overline{\mathcal{R}})$. Como $D_A(\overline{\mathcal{R}}) \subset C_\lambda(\overline{\mathcal{R}})$ basta probar que (D(x) − 1) $\in D_A(\overline{\mathcal{R}})$. Si se cumple cualquiera de las condiciones a) o b) del **teorema no.2**, se puede asegurar que $\lim_{|x|\to\infty} D(x) = l$, y $l \neq 1$. Si $l \neq 1$ se considera (35), y se tiene entonces que siempre se puede plantear que $\lim_{|x|\to\infty} D(x) = l$.

Si se cumplen simultáneamente las condiciones a) y una de las condiciones b) ó c) del **teorema no.1**, es fácil verificar que [D(x) − 1]´ es una función acotada sobre $\mathcal{R}$. No es difícil comprobar además que:

$$[D(x) - 1]' = 0\left[\frac{Q'(x)Q_1(x) - Q(x)Q_1'(x)}{[Q_1(x)]^2}\right]$$

luego (D(x) − 1) $\in D_A(\mathcal{R})$.

Por último, como $\lim_{|x|\to\infty} D(x) = l$, los coeficientes de mayor grado de Q(x) y $Q_1(x)$ son iguales y consecuentemente

$$|D(x) - 1| = 0\left(\frac{1}{|x|}\right) \tag{36}$$

en un vecindad del infinito; y como D(x) es derivable en $\mathcal{R}$.

Se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x) - 1|^2 dx < +\infty$$

Por tanto queda probado que D(x) − 1 $\in L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}})$.

5.4. Determinación de las condiciones para que el término independiente de (23) sea elemento de $L_2(\overline{\mathcal{R}})$

Teorema no. 4. Si se cumple la hipótesis del **teorema no.3** y, además, V(x, j), xV(x, j), $\frac{\partial V}{\partial y}(x,j)$, $j = \overline{0,1}$, pertenecen a $L_2(\mathcal{R})$, entonces el término independiente de (23), pertenece a $L_2(\mathcal{R})$.

Demostración: Tenemos que el término independiente de (23) tiene la forma:

$$H(x) = \frac{\Delta_2(x,z)}{\Delta_1(x,z)} H_1(z) - H_2(x) + \frac{\Delta(x,z)}{\Delta_1(x,z)} H_3(x),$$

De acuerdo a las condiciones impuestas, es evidente que $H_1(x)$, $H_2(x)$ y $H_3(x)$ son elementos de $L_2(\mathcal{R})$, y $\frac{\Delta_2(x,z)}{\Delta_1(x,z)}$, $\frac{\Delta(x,z)}{\Delta_1(x,z)}$ son funciones acotadas sobre $\mathcal{R}$.

De aquí se implica obviamente que $H(x) \in L_2(\mathcal{R})$.

6. CÁLCULO DEL ÍNDICE DEL COEFICIENTE

En este epígrafe se estudian dos casos particulares del coeficiente correspondiente a $\alpha_{01} = \beta_{01} = \gamma_{01} = 0$ y $\alpha_{10} = \beta_{10} = \gamma_{10} = 0$. Se concretan las condiciones que se exigen en los **teoremas 1**, **2**, **3** y **4** en cada caso y se determina el índice del coeficiente.

caso no.1 ($\alpha_{01} = \beta_{01} = \gamma_{01} = 0$)

La ecuación (23) toma en este caso la forma.

$$F^{+}(x) = D(x)F^{-}(x) + H(x), \tag{37}$$

donde:

$$D(x) = \frac{\beta_{00} - i\beta_{00}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x},$$

$$H(x) = \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} G_{12}^{+}(x) - G_{11}^{-}(x),$$

Lema no. 3. D(x) satisface la condición i) si y sólo si $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$.

Demostración: Obvia. También son triviales las demostraciones de los lemas 4, 5 y 6 que se enuncian a continuación.

Lema no. 4. Para que D(x) verifique la condición ii) es necesario y suficiente que se cumpla una de las condiciones siguientes

1) $\beta_{10}^2 + \gamma_{10}^2 = 0$ y $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$

2) $\beta_{10}\gamma_{10} \neq 0$

y considerar en lugar de (37) la ecuación

$$F_1^{+}(x) + F_1^{-}(x) = H_1(x), \tag{38}$$

donde $F_1^{+}(x) = \frac{\gamma_{00}}{\beta_{00}} F^{+}, F_1^{-}(x) = F^{-}$ y $H_1(x) = G_{12}^{+} - \frac{\gamma_{00}}{\beta_{00}} G_{11}^{-}(x),$ cuando se cumple la condición 1) y

$$F_1^{+}(x) = \frac{\gamma_{10}}{\beta_{10}} F^{+}, D_1(x) = \frac{\gamma_{10}(\beta_{00} - i\beta_{10}x)}{\beta_{10}(\gamma_{00} - i\gamma_{10}x)}, \;\; F_1^{-} = F^{-} \text{ y } H_1(x) = \frac{\gamma_{10}(\beta_{00} - i\beta_{10}x)}{\beta_{10}(\gamma_{00} - i\gamma_{10}x)} G_{12}^{+}(x) - G_{11}^{-}(x) \tag{39}$$

cuando se cumple la condición 2)

Lema no. 5 si se cumplen las condiciones de los lemas 3 y 4, entonces D(x) cumple la condicion iii).

Lema no. 6 si se cumplen las condiciones de los lemas 3 y 4, entonces $H(x) \in L_2(\mathcal{R})$.

Lema no. 7 si $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$ y $\gamma_{10}\beta_{10} \neq 0$, el valor absoluto del índice de $D_1(x)$ es menor o igual que 1 y se cumple que

a) Ind D_1 = -1 si y sólo si $\operatorname{sgn}\dfrac{\beta_{00}}{\beta_{10}} > 0$ y $\operatorname{Sgn}\dfrac{\gamma_{00}}{\gamma_{10}} < 0$

b) Ind D_1 = 0 si y sólo si $\operatorname{sgn}\dfrac{\beta_{00}}{\beta_{10}} = \operatorname{Sgn}\dfrac{\gamma_{00}}{\gamma_{10}}$

c)) Ind D_1 = 1 si y sólo si $\operatorname{sgn}\dfrac{\beta_{00}}{\beta_{10}} < 0$ y $\operatorname{sgn}\dfrac{\gamma_{00}}{\gamma_{10}} > 0$

Demostración: Trivial.

caso no.2 ($\alpha_{10} = \beta_{10} = \gamma_{10} = 0$)

En este caso la expresión (24) toma la forma:

$$D(x) = \frac{K_0(x)}{K_1(x)} \tag{40}$$

donde:

$$K_i(x) = e^{-2\left|\sqrt{x_1^2-k}\right|}\left[Ai(x^2-k)+Bi\sqrt{x^2-k}+Ci\right]-\left[Ai(x^2-k)-Bi\sqrt{x^2-k}+Ci\right],\ \ i=\overline{0,1} \tag{41}$$

$A_0 = -\alpha_{01}\beta_{01}$, $B_0 = \alpha_{00}\beta_{01} - \alpha_{01}\beta_{00}$, $C_0 = \alpha_{00}\beta_{00}$,

$A_1 = -\alpha_{01}\gamma_{01}$, $B_1 = \alpha_{00}\gamma_{01} - \alpha_{01}\gamma_{00}$, $C_1 = \alpha_{00}\gamma_{00}$,

Lema no. 8. El índice de la función D(x) es cero si se cumplen las condiciones del teorema no.3.

Demostración

$$d[\ln D(x)] = \frac{K_0'(x)K_1(x)-K_0(x)K_1'(x)}{K_0(x)K_1(x)},$$

donde: $K_0'(x)K_1(x)-K_0(x)K_1'(x) = O(x^2)$, $K_0(x)K_1(x) = O(x^4)$ en una vecindad del infinito. Además, como es fácil verificar, $K_0'(x)K_1(x)-K_0(x)K_1'(x)$ es una función impar, y $K_0(x)K_1(x)$ es una función par, que no se anula sobre el eje real por el **teorema no.3**. Luego:

$$\text{Ind } D(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} d(\ln D(x)) = 0.$$

7. DETERMINACIÓN DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA (1)-(5) HOMOGÉNEO

En este epígrafe se determina la solución en cuadraturas de problema 1)-5) homogéneo en la clase S, correspondiente a los casos 1) y 2) del epígrafe anterior cuando $-1 \leq \text{Ind } D(x) \leq 0$ y se prueba que en el caso de Ind D(x) = +1 el problema no está correctamente planteado.

caso 1 ($\alpha_{01} = \beta_{01} = \gamma_{01} = 0$)

En este caso la expresión (23) toma la forma

$$F^{+}(x) = \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} F^{-}(x) + \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} G_{12}^{+}(x) - G_{11}^{-}(x) \tag{42}$$

sustituyendo (21) y (22) en (10) y considerando las restricciones de este caso se tiene que:

$$U(x,y) = \frac{A(x)}{\alpha_{00} - i\alpha_{10}x} G_{10}(x) + \frac{B(x)}{\beta_{00} - i\beta_{10}x} G_{11}^{-} + F^{+}(x)). \tag{43}$$

$$A(x) = \frac{e^{-\sqrt{x^2-k}y} - e^{-\sqrt{x^2-k}y}}{e^{-\sqrt{x^2-k}} - e^{-\sqrt{x^2-ky}}}, \tag{44}$$

$$B(x) = \frac{e^{\sqrt{x^2-k}(-1+y)} - e^{\sqrt{x^2-k}(1-y)}}{e^{-\sqrt{x^2-k}} - e^{\sqrt{x^2-k}}}. \tag{45}$$

Considérese la clase A de los coeficientes β_{00}, β_{10}, γ_{00} y γ_{01} que cumplen uno de los conjuntos de condiciones siguientes:

a1) $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$, $\beta_{10}\gamma_{10} \neq 0$, $\operatorname{sgn}\beta_{00} = \operatorname{sgn}\beta_{10}$ y $\operatorname{sgn}\gamma_{00} = \operatorname{sgn}\gamma_{10}$,

a2) $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$ y $\gamma_{10}^2 - \beta_{10}^2 \neq 0$,

y la clase $\mathcal{B}$ de los mismos coeficientes que cumplen:

b1) $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$, $\gamma_{10}\beta_{10} \neq 0$, $\operatorname{sgn}\beta_{00} \neq \operatorname{sgn}\beta_{10}$, $\operatorname{sgn}\gamma_{00} \neq \operatorname{sgn}\gamma_{10}$ y $\operatorname{sgn}\frac{\beta_{00}}{\beta_{10}} = \operatorname{sgn}\frac{\gamma_{00}}{\gamma_{10}}$

Teorema no. 5 si $k < 0$ y los coeficientes β_{00}, γ_{00}, β_{10} y γ_{10} pertenecen a la clase $\mathcal{A}$ o B, entonces el problema 1) -5) homogéneo tiene solución única u(x, y) en la clase (6) dada por:

$$u(x, y) = V^{-}U(x, y) \tag{46}$$

.
donde U está determinada por las fórmulas (43), (44) y (45) y

$$F^{+}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{ixt}dt, & \text{si se cumple la condición } a_1), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_{00}}{\gamma_{00}} \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{ixt}dt, & \text{si se cumple la condición } a_2), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{ixt}dt, & \text{si se cumple la condición } b_1), \end{cases} \tag{47}$$

siendo

$$h_1 = V^{-}H_1 \tag{48}$$

$$
\text{y} \qquad H_1(x) = \begin{cases} G_{12}^{+}(x) - \dfrac{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x}{\beta_{00} - i\beta_{10}x} G_{11}^{-}(x) & \text{si se cumple la condición } a_1) \\ G_{12}^{+}(x) - \dfrac{\gamma_{00}}{\beta_{00}} G_{11}^{-}(x) & \text{si se cumple la condición } a_2). \\ \dfrac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} G_{12}^{+}(x) - G_{11}^{-}(x) & \text{si se cumple la condición } b_1) \end{cases} \tag{49}
$$

Demostración: Si los coeficientes β_{00}, γ_{00}, β_{10} y $\gamma 10$ pertenecen a la clase $\mathcal{A}$ o bien a la clase $\mathcal{B}$, entonces el problema (42) tiene solución única por ser el índice cero, que está dada por (47) y

$$
F^{-}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} h_1(t) e^{ixt} dt, & \text{si se cumple la condición } a_1 \text{ o } a_2) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x}{\beta_{00} - i\beta_{10}x} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} h_1(t) e^{ixt} dt, & \text{si se cumple la condición } b_1) \end{cases} \tag{50}
$$

donde h_1 está dado por (48) y (49), además en (43) $G_{10}(x) \in L_2(\mathcal{R})$, $G_{11}^{-}(x) \in L_2^{-}(\mathcal{R})$ y $F^{+}(x) \in L_2^{+}(\mathcal{R})$. Luego de acuerdo a la definición de A(x) y B(x), U(x, y) y x^2U(x, y) pertenecen a $L_2(\mathcal{R})$ para todo y, $0 < y < 1$; por lo tanto u(x, y) pertenece a la clase (6).

Teorema no. 6 Si $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$, $\gamma_{10}\beta_{10} \neq 0$, $\text{sgn}\beta_{00} \neq \text{sgn}\beta_{10}$ y $\text{sgn}\gamma_{00} \neq \text{sgn}\gamma_{10}$, entonces el problema 1) -5) tiene solución u(x, y) que depende de una constante en la clase (6) dada por (46), (43)-(45) y:

$$
F^{+}(x) = \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} G_{12}^{+}(x) + \frac{\gamma_{00}}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x}
$$

Demostración. Aplicando el teorema de prolongación analítica y el teorema generalizado de Liouville, de (42) se obtiene

$$
F^{+}(x) - \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} G_{12}^{+}(x) = \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} F^{-}(x) - G_{11}^{-}(x) = \frac{C}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x}
$$

Luego, obtenemos $F^{\pm}(x)$ en las clases $L_2^{\pm}(\mathcal{R})$ por las fórmulas

$$
F^{+}(x) = \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} G_{12}^{+}(x) + \frac{C}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x},
$$

$$
F^{-}(x) = \frac{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x}{\beta_{00} - i\beta_{10}x} G_{11}^{-}(x) + \frac{C}{\beta_{00} - i\beta_{10}x}.
$$

Como A(x), x^2A(x), B(x), x^2B(x), $\dfrac{1}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x}$ y $\dfrac{1}{\beta_{00} - i\beta_{10}x}$ son funciones acotadas, y como $G_{10} \in L_2(\mathcal{R})$, $G_{11}^{-} \in L_2^{-}(\mathcal{R})$, $G_{12}^{-} \in L_2^{-}(\mathcal{R})$ y $\dfrac{1}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} \in L_2(\mathcal{R})$ entonces, U(x, y) y x^2U(x, y) pertenecen a $L_2(\mathcal{R})$ para todo y, $0 < y < 1$; por tanto, u(x, y) pertenece a la clase (6).

Teorema no. 7 Si $\gamma_{00}\beta_{00} \neq 0$, $\gamma_{10}\beta_{10} \neq 0$, $\text{sgn}\beta_{00} = \text{sgn}\beta_{10}$ y $\text{sgn}\gamma_{00} = \text{sgn}\gamma_{10}$, entonces el problema 1) -5) tiene solución única u(x, y) en la clase (6), dada por (46)-(43)-(45) y

$$
F^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} h_1(t)^{ixt} dt;
$$

donde $h_1(t)$ se define por (48), (49)(caso de la condición b1); siempre que se cumpla la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(t)dt}{\beta_{10}t+\beta_{00}i} = 0\,; \tag{51}$$

Demostración: Haciendo

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{00} - ix\beta_{10}}{\gamma_{00} - ix\gamma_{10}} F^-(x)\,,$$

llegamos al problema de salto

$$F^+(x) - F_1^-(x) = H_1(x),$$

donde

$$H_1(x) = \frac{\beta_{00} - i\beta_{10}x}{\gamma_{00} - i\gamma_{10}x} G_{12}^+(x) - G_{11}^-(x)\,,$$

Por tanto

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_1(t)e^{ixt}dt\,,$$

$$F^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma_{00} - ix\gamma_{10}}{\beta_{00} - ix\beta_{10}} \int_{-\infty}^{0} h_1(t)e^{ixt}dt$$

y $h_1(x)$ se define por (48).

En este caso, como $F^-(z)$ tiene un polo de orden uno en el punto $t_0 - \frac{\beta_{00}}{\beta_{10}}i$ del semiplano inferior, para que el problema tenga solución se requiere que

$$\int_{+\infty}^{0} h_1(t)e^{ixt}dt\,,$$

tenga un cero en $-\frac{\beta_{00}}{\beta_{10}}i$ de igual orden de multiplicidad. Por la relación entre las integrales de Cauchy y de Fourier se tiene:

$$H_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_1(t)}{t-z}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} h_1(t)e^{ixt}dt\,, \tag{52}$$

para $\mathrm{Im}z < 0$. Desarrollando la integral de la izquierda de (52) en series de potencias de $(z + \frac{\beta_{00}}{\beta_{10}}i)$, e igualando a cero el coeficiente de grado cero del desarrollo, se elimina el polo de $F^-(z)$. De aquí se obtiene evidentemente la condición (51).

Por un análisis similar al realizado en el **teorema no.5**, se comprueba fácilmente que u(x, y) pertenece a la clase (6).

caso 2: ($\alpha_{10} = \beta_{10} = \gamma_{10} = 0$) En este caso la expresión (23) toma la forma

$$F^{+}(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)} F^{-}(x) + H(x), \tag{53}$$

donde:

$$\Delta(x) = \beta_{01}\sqrt{x^2-k}\Delta_2(x) + \beta_{01}\sqrt{x^2-k}\Delta_3(x) + \beta_{00}\Delta_3(x) - \beta_{00}\Delta_2(x),$$

$$\Delta_1(x) = \gamma_{01}\sqrt{x^2-k}\Delta_2(x) + \gamma_{01}\sqrt{x^2-k}\Delta_3(x) + \gamma_{00}\Delta_3(x) - \gamma_{00}\Delta_2(x),$$

$$H(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}G_{12}^{+} - \frac{G_2(x)}{\Delta_1(x)}\left[\gamma_{00}\Delta_4(x) - \gamma_{00}\Delta_5(x) - \gamma_{01}\sqrt{x^2-k}\Delta_4(x) - \gamma_{01}\sqrt{x^2-k}\Delta_5(x)\right]$$

$$- \frac{G_{11}^{-}(x)}{\Delta_1(x)}\left[\gamma_{00}\Delta_3(x) - \gamma_{00}\sqrt{x^2-k}\Delta_2(x) + \gamma_{01}\sqrt{x^2-k}\Delta_3(x)\right],$$

$$A_2(x) = \alpha_{00}e^{\sqrt{x^2-k}} + \alpha_{01}\sqrt{x^2-k}\, e^{\sqrt{x^2-k}},$$

$$A_3(x) = \alpha_{00}e^{\sqrt{x^2-k}} - \alpha_{01}\sqrt{x^2-k}\, e^{\sqrt{x^2-k}},$$

$$A_4(x) = \beta_{00} + \beta_{11}\sqrt{x^2-k},$$

$$A_5(x) = \beta_{00} - \beta_{01}\sqrt{x^2-k},$$

Sustituyendo (21) y (22) en (10) y considerando las restricciones de este caso se tiene que.

$$U(x, y) = \frac{\Delta_4(x)G_2(x) - \Delta_2(x)G_{11}^{-}(x) - \Delta_2(x)F^{+}(x)}{\Delta(x)}e^{-\sqrt{x^2-k}y}$$

$$+ \frac{\Delta_3(x)F^{+}(x) - \Delta_5(x)G_2(x) + \Delta_3(x)G_{11}^{-}(x)}{\Delta(x)}e^{-\sqrt{x^2-k}y}. \tag{54}$$

Considérese la clase $\mathcal{C}$ de los coeficientes β_{00}, γ_{00}, β_{01}, γ_{01} que cumplen:

a) $\gamma_{01}\beta_{00} - \gamma_{00}\beta_{01} \neq 0$ y una de las condiciones siguientes

b) $\beta_{01}\gamma_{01} \neq 0$

c) $\beta_{01}^2 + \gamma_{01}^2 = 0$

Teorema no. 8: si $k < 0$ y los coeficientes β_{00}, γ_{00}, β_{01}, γ_{01} pertenecen a la clase $\mathcal{C}$, entonces el problema 1) - 5) homogéneo tiene solución única u(x, y) en la clase (6), dada por $u(x, y) = V^{-1}U(x, y)$, donde U(x, y) está dada por (54) y (ver [2]):

$$F^{\pm}(x) = X^{\pm}(x)\psi^{\pm}(x). \tag{55}$$

siendo:

$$X^{\pm}(x) = e\Gamma^{\pm}(x), \tag{56}$$

$$\Gamma^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\gamma(t)e^{ixt}dt, \tag{57}$$

$$\Gamma^{-}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\gamma(t)e^{ixt}dt, \tag{58}$$

$$\gamma(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)}e^{-ixt}dx, \tag{59}$$

$$\psi^{+}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\omega(t)e^{ixt}dt, \tag{60}$$

$$\psi^{-}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{0}\omega(t)e^{ixt}dt, \tag{61}$$

$$\omega(x) = \frac{H(x)}{X^{+}(x)} \tag{62}$$

Demostración: Si β_{00}, γ_{00}, β_{01}, γ_{01} pertenecen a la clase $\mathcal{C}$, entonces por los teoremas no.3 y no.4:

$$D(x) - 1 = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)} - 1 \in L_2^{\lambda}(\overline{\mathcal{R}}) \text{ y } H(x)\ 4(x) \in L_2(\mathcal{R}).$$

Luego, como en este caso ind D(x) = 0, se tiene que el problema de Riemann (53) tiene una solución única dada por (55)-(62) (ver [1]) y $F^{\pm}(x) \in L_2^{\pm}(\overline{\mathcal{R}})$.

Se verifica fácilmente, además, que de acuerdo a las definiciones de capitulo (2):

$$X^{\pm}(x) \in L_2^{\pm}(\overline{\mathcal{R}}+1),$$

$$\Gamma^{\pm}(x) \in L_2^{\lambda\pm}(\overline{\mathcal{R}}),$$

$$\psi^{\pm}(x) \in L_2^{\lambda\pm}(\overline{\mathcal{R}}),$$

Sólo falta probar que la solución se encuentra en la clase (6) deseada. Para ello expresamos (54) en la forma;

$$U(x, y) = \frac{\Delta_4(x)e^{-\sqrt{x^2-k}y}}{\Delta(x)}G_2(x) - \frac{\Delta_2(x)e^{-\sqrt{x^2-k}y}}{\Delta(x)}G_{11}^{-}(x) - \frac{\Delta_2(x)e^{-\sqrt{x^2-k}y}}{\Delta(x)}F^{+}(x)$$

$$+\ \frac{\Delta_3(x)e^{-\sqrt{x^2-k}y}}{\Delta(x)}F^{+}(x) - \frac{\Delta_5(x)e^{-\sqrt{x^2-k}y}}{\Delta(x)}G_2(x) - \frac{\Delta_3(x)e^{-\sqrt{x^2-k}y}}{\Delta(x)}G_{11}^{-}(x) \tag{63}$$

Como $G_2(x)$, $G_{11}^{-}(x)$ y $F^{+}(x)$ son elementos de $L_2(\mathcal{R})$ sus coeficientes respectivos en (63) son funciones acotadas sobre $\mathcal{R}$ para todo y, $0 < y < 1$, se tiene que $U(x, y) \in L_2(\mathcal{R})$. Por un análisis similar es fácil comprobar que:

$$X^2U(x, y) \in L_2(\mathcal{R}), \tag{64}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\left[U(x,y)\right] \in L_2(\mathcal{R}) \tag{65}$$

Luego, u(x, y) pertenece a la clase (6).

8. CONCLUSIONES

Los resultados alcanzados en el presente trabajo, permiten la solución de variados problemas de la física matemática que se reducen a un problema de tipo elíptico, a partir de la novedosa técnica de resolver un problema de Riemann de solución conocida.

Lo importante del método utilizado es que la solución obtenida en cuadraturas, facilita su utilización por profesionales que no sean especialistas en los problemas de contorno de la teoría de funciones analíticas.

REFERENCIAS

[1] MEDEROS, O.B. y L.F. BATARD (1990): “El problema de Riemann con parámetro pequeño en el espacio $L_2(\mathcal{R})$”, **Revista de Ciencias Matemáticas** 3.

[2] BATARD, L.F. (1990): Las ecuaciones diferenciales y el problema de Riemann con parámetro pequeño. Tesis de doctorado.

[3] MEDEROS, O.B. y L.F. BATARD (1990): “Reducción de una clase de problemas de contorno de ecuaciones diferenciales parciales con parámetro pequeño al problema de contorno de Riemann”, **Revista Ciencias Matemáticas** 2.

[4] GAJOV, F.D. y Y.I. CHERSKI (1978): “Ecuaciones de tipo convolución”. Moscú. **Ciencias**.