




La función Lambert W : teoría, propiedades y aplicaciones

The Lambert W function: theory, properties and applications

Arnoldo Abraham Herrera Herrera^{1*}, Dicson Antonio Méndez López², Iván Augusto Cisneros Díaz³

Resumen La función de Lambert, también conocida como función producto-logaritmo, es una herramienta fundamental en diversas disciplinas matemáticas y científicas debido a su capacidad para resolver ecuaciones trascendentes, especialmente aquellas de la forma exponencial, en las cuales las incógnitas aparecen tanto en el exponente como en el producto. Este artículo presenta un estudio exhaustivo de su definición formal, origen histórico e importancia en el ámbito matemático contemporáneo. Se analizan sus propiedades analíticas esenciales, incluyendo su derivada e integral, proporcionando demostraciones rigurosas y su implementación en Python. Además, se desarrolla la serie de potencias de la función de Lambert, destacando su utilidad para aproximaciones numéricas y resolución de problemas prácticos. La programación computacional desempeña un papel clave en este estudio, permitiendo la automatización de cálculos y el análisis eficiente de sistemas no lineales.

Palabras Clave: aproximaciones numéricas, funciones trascendentes, propiedades analíticas.

Abstract *The Lambert function, also known as the product-logarithm function, is a fundamental tool in various mathematical and scientific disciplines due to its ability to solve transcendental equations, especially those of the exponential form, where the unknowns appear both in the exponent and in the product. This article presents a comprehensive study of its formal definition, historical origin, and significance in contemporary mathematics. Its essential analytical properties are analyzed, including its derivative and integral, providing rigorous proofs and its implementation in Python. Additionally, the power series of the Lambert function is developed, highlighting its usefulness for numerical approximations and solving practical problems. Computational programming plays a key role in this study, enabling the automation of calculations and efficient analysis of nonlinear systems.*

Keywords: numerical approximations, transcendent functions, analytical properties.

Mathematics Subject Classification: 30D05, 33E10, 34Mxx.

¹Departamento de Enseñanza de las Ciencias, Universidad Autónoma de Nicaragua, Managua, Nicaragua. Email: arnoldo.herrera@unan.edu.ni.

²Departamento de Educación y Humanidades, Universidad Autónoma de Nicaragua, Managua, Nicaragua. Email: dicsonml@yahoo.es.

³Departamento de Alimentos, Universidad Nacional Casimiro Sotelo Montenegro, Managua, Nicaragua. Email: ivan.cisneros@unan.edu.ni.

*Autor para Correspondencia (Corresponding Author)

Editado por (Edited by): Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.
Maquetado por (Layout by): Paulo Enrique Lantigua Cuervo, Instituto de Criptografía, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

Citar como: Herrera Herrera, A.A., Méndez López, D.A., & Cisneros Díaz, I.A. (2025). La función Lambert W : teoría, propiedades y aplicaciones. *Ciencias Matemáticas*, 39(1), 11–19. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17443639>. Recuperado a partir de <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/10777>.

Introducción

En el universo de las matemáticas, las funciones trascendentes desempeñan un papel crucial al extender el poder descriptivo de las herramientas algebraicas y analíticas. Entre estas se encuentra la función de Lambert $W(x)$, también co-

nocida como función producto-logaritmo, concebida como una herramienta esencial en diversas disciplinas como: Física, Informática, Biología y Economía. Su relevancia radica en su capacidad para resolver ecuaciones trascendentes, particularmente aquellas de la forma exponencial, donde las incógnitas se encuentran tanto en el exponente como en el producto, lo

que las hace complejas de resolver con métodos algebraicos convencionales, dicha función es comprendida como un modelo que aparece con sorprendente frecuencia en problemas reales, desde el cálculo del crecimiento poblacional hasta el análisis de la eficiencia de algoritmos.

A pesar de su descubrimiento histórico en el siglo XVIII, el estudio de $W(x)$ ha cobrado un renovado interés en las últimas décadas, gracias al auge de las computadoras y los sistemas de álgebra computacional que facilitan su aplicación en contextos numéricos y simbólicos. Este interés no es casual, ya que $W(x)$ no solo provee soluciones elegantes y exactas en ciertos casos, sino que también ofrece una perspectiva única para analizar sistemas no lineales complejos y sus dinámicas subyacentes.

El presente artículo tiene como objetivo explorar de manera exhaustiva la definición, propiedades analíticas, métodos iterativos de cálculo y aplicaciones prácticas de la función de Lambert $W(x)$. En particular, se abordarán las siguientes cuestiones: ¿Cómo se define y caracteriza formalmente esta función? ¿En qué tipo de ecuaciones se puede aplicar la función de Lambert? ¿Cómo se pueden demostrar y programar la derivada e integral para la función de Lambert? Para responder a estas preguntas, se combinarán herramientas de programación, demostraciones formales y visualizaciones avanzadas, buscando no solo profundizar en el entendimiento matemático de $W(x)$, sino también proporcionar ideas prácticas para su implementación en contextos aplicados.

Con este enfoque, se pretende no solo contribuir al cuerpo de conocimiento existente, sino también inspirar nuevas líneas de investigación y aplicaciones, destacando la importancia de $W(x)$ como puente entre la teoría matemática y los desafíos del mundo real.

Relevancia del estudio

La función de Lambert constituye un objeto matemático de relevancia fundamental en el análisis de ecuaciones trascendentales con aplicaciones en diversas disciplinas, desde la física teórica hasta la ingeniería computacional. Este estudio proporciona un tratamiento riguroso de sus propiedades analíticas, su desarrollo en series y su implementación computacional, permitiendo el modelado eficiente de sistemas no lineales y la optimización de cálculos en entornos de simulación numérica. La implementación en Python posibilita la automatización de métodos de resolución, contribuyendo al avance del cálculo simbólico y la computación científica.

La función de Lambert fue propuesta en 1758 para resolver la ecuación $x^a - x^b = (a-b)vx^{a+b}$ [7] en este trabajo se proponen algunas simplificaciones a la ecuación y se establecen series de potencias para resolverla, y luego fue estudiada por Euler [3].

Además, la ecuación es compleja, por lo tanto, se hacen consideraciones especiales y se soluciona cada uno de los casos, las respuestas se expresan en forma de series de potencias infinitas, estas fueron, las series que dieron origen a la función.

La notación y teoría moderna se le debe a Polya y Szegő (1925), utilizaron una notación similar a la presentada aquí, en un documento en alemán, que después fue traducido al inglés.

El uso de la función aumentó después de que varios trabajos de física cuántica necesitaran una función capaz de resolver ecuaciones exponenciales complejas y con lo que aumentó el interés en la función. Corless et al [2], presentaron un análisis interesante sobre propiedades y usos de la función.

La función de W Lambert, según García, Ortiz-Conde y Malobabic [5], elementalmente implícita, es decir, está definida de forma implícita usando funciones elementales. Formalmente se define como $W(x)e^{W(x)} = x$.

Eric Weinstein [11] define la función de Lambert del siguiente modo: $f(W) = We^W$.

La función de Lambert también se puede escribir en la forma Corless, Jeffrey y Knuth [2], usando notación compleja es $W(z)e^{W(z)} = z$, donde z es un número complejo en la forma $z = x + yi$.

Según Scott, Fee y Grotendorst [8], la función de Lambert puede resolver ecuaciones de la forma $e^{-cx} = a(x - r_1)$ y expresar una solución en la forma $x = r_1 + \frac{1}{c}W\left(\frac{ce^{-cr_1}}{a}\right)$.

Metodología

Las soluciones a estas y otros tipos de ecuaciones hacen de la función de Lambert un recurso importante para resolverlas. Además, estas expresiones algebraicas y sus expansiones son clave en la solución de problemas matemáticos y físicos en los que intervienen términos exponenciales y logarítmicos, dicha afirmación se confirma en el trabajo de Gnanarajan [6] donde consideran una serie de ecuaciones exponenciales y las resuelven de forma: gráfica, numérica y analítica, todo en términos de la función de Lambert.

La metodología adoptada en este trabajo se estructuró en las siguientes fases:

- Revisión del estado del arte: Se llevó a cabo un análisis exhaustivo de la literatura existente sobre la función de Lambert, con el fin de identificar su relevancia, aplicaciones y las principales contribuciones teóricas realizadas hasta la fecha.
- Análisis matemático: Se exploraron y estudiaron en detalle los procedimientos y técnicas matemáticas utilizadas para la determinación y demostración de las propiedades fundamentales de la función de Lambert.
- Implementación computacional: Se desarrollaron programas en Python para el cálculo de los valores de la función, el análisis de sus primeras derivadas e integral y la aplicación de procesos numéricos que facilitaron su programación.
- Interpretación de resultados: Se evaluaron y analizaron los resultados obtenidos, estableciendo su relación directa con los objetivos propuestos en la investigación.

- Elaboración de conclusiones y recomendaciones: Se formularon conclusiones bien fundamentadas y recomendaciones orientadas a futuras investigaciones y aplicaciones prácticas de la función de Lambert.

Esta metodología proporcionó un enfoque integral y riguroso, asegurando una comprensión profunda y sistemática de la función de Lambert, así como sus implicaciones matemáticas y computacionales.

1. Fundamentación teórica

El dominio de la rama principal de la función de Lambert se debe a que la función $f(x) = xe^x$ no es biunívoca. Y se puede calcular un mínimo con:

$$f'(x) = e^x + xe^x, \\ 0 = e^x(1 + x).$$

Dado que la función exponencial siempre es mayor que 0, y $1 + x = 0$, tiene una raíz en $x = -1$. Se tiene que:

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

El punto $(-1, -\frac{1}{e})$ es un mínimo de la función y a su vez resulta ser el primer punto del dominio de la función W de Lambert, en consecuencia, se infiere que dicha función no está definida para $x < -\frac{1}{e}$. Además, $W(1) \approx 0,577143$ es un valor especial conocido como la constante omega Ω , la cual es fundamental porque es la solución real de $\Omega e^\Omega = 1$ y tiene aplicaciones en el análisis asintótico y en fórmulas cerradas para ciertas ecuaciones logarítmicas.

La función $W(x)$ está definida en el intervalo $[-\frac{1}{e}, \infty)$. García [4], señala que la función tiene dos ramas, las cuales son:

- $W(x) \geq -1$, la rama $W_0(x)$ es una función creciente en el intervalo $[-\frac{1}{e}, \infty)$, se le llama rama principal.
- $W(x) < -1$, la rama $W_{-1}(x)$ es una función decreciente en el intervalo $(-\frac{1}{e}, 0)$

La función W de Lambert es la inversa de otra función importante:

$$f(x) = xe^x.$$

La función W de Lambert no es una función elemental, se define como la inversa de la función $f(x) = xe^x$, la cual se ilustra en la Figura 1. Además, para que la función de Lambert cumpla con la definición de función su dominio se debe restringir adecuadamente en dos intervalos, que son $(-\infty, -1)$ y $(-1, \infty)$, y de esta delimitación se construyen ambas ramas de la función, que aparecen en la Figura 2.

Los valores de la tabla que se presenta a continuación fueron obtenidos al evaluar la función de Lambert en varios puntos de su dominio.

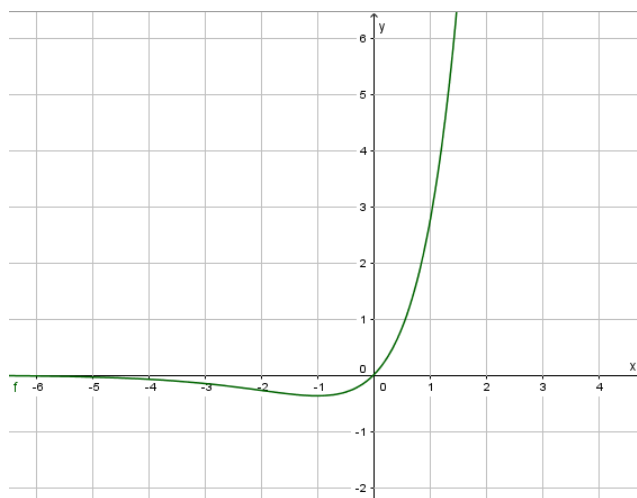


Figura 1. Gráfica de $f(x) = xe^x$ [Graph of $f(x) = xe^x$].

Tabla 1. Valores de la función de Lambert [Values of the Lambert function].

x	$-\frac{1}{e}$	0	1	2	e
$W(x)$	-1	0	0,577143...	0,8526...	1

En el presente acápite se realiza un estudio de las propiedades básicas de la función de Lambert, así como ejemplificaciones prácticas de su uso en la resolución de ecuaciones. También se exponen la demostración formal y la programación de las dos primeras derivadas mediante diferenciación, y se expresan de forma general la tercera y cuarta derivada. Posteriormente, se aborda su integración y se presenta su descomposición en series de potencias.

2. Ejemplos de resolución de ecuaciones usando la función de Lambert

A continuación, se mostrará la resolución de tres ecuaciones potencio-exponenciales con ayuda de la función de Lambert. Las transformaciones sucesivas que se realizan se basan en las propiedades de las funciones elementales involucradas y en la inyectividad de las funciones exponencial, logarítmica y de la función de Lambert.

Ejemplo 1 Para resolver la ecuación: $x^x = 5$ se puede seguir el siguiente razonamiento. Primero, se aplica logaritmo natural a ambos lados de la ecuación:

$$\ln x^x = \ln 5,$$

$$x \ln x = \ln 5.$$

Se puede utilizar la identidad $e^{\ln x} = x$ para adaptar la ecuación a la forma:

$$e^{\ln x} \ln x = \ln 5,$$

$$\ln x e^{\ln x} = \ln 5.$$

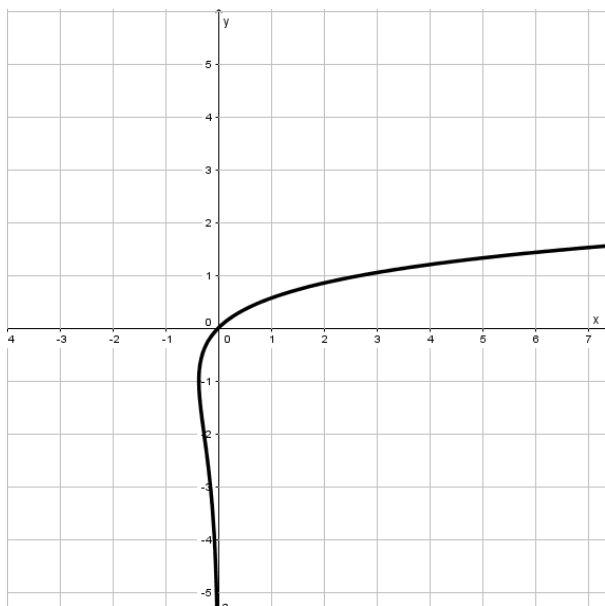


Figura 2. La gráfica completa de la función W de Lambert con ambas ramas [The complete graph of Lambert's W function with both branches].

El cambio de variable $u = \ln x$ transforma la ecuación en:

$$\begin{aligned} u e^u &= \ln 5, \\ W(u e^u) &= W(\ln 5), \\ u &= W(\ln 5), \\ \ln x &= W(\ln 5), \\ x &= e^{W(\ln 5)}. \end{aligned}$$

De forma aproximada el resultado es $x = 2,1293 \dots$

Ejemplo 2 Para resolver la ecuación $x + e^x = 10$, se transforma la ecuación en:

$$\begin{aligned} e^{x+e^x} &= e^{10}, \\ e^x e^{e^x} &= e^{10}. \end{aligned}$$

El cambio de variable $u = e^x$ conduce a:

$$u e^u = e^{10}.$$

Se extrae la función W de Lambert a ambos lados:

$$\begin{aligned} W(u e^u) &= W(e^{10}), \\ u &= W(e^{10}), \\ e^x &= W(e^{10}), \\ \ln e^x &= \ln W(e^{10}), \\ x &= \ln W(e^{10}). \end{aligned}$$

El resultado aproximado es: $x = 2,0706$.

Ejemplo 3 Para resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} x^3 &= 3^x, \\ \ln x^3 &= \ln 3^x, \\ 3 \ln x &= x \ln 3, \\ \ln x &= \frac{x \ln 3}{3}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros por e , resulta:

$$\begin{aligned} x &= e^{x \frac{\ln 3}{3}}, \\ x e^{-x \frac{\ln 3}{3}} &= e^{x \frac{\ln 3}{3}} e^{-x \frac{\ln 3}{3}}, \\ x e^{-x \frac{\ln 3}{3}} &= 1, \\ -x \frac{\ln 3}{3} e^{-x \frac{\ln 3}{3}} &= -\frac{\ln 3}{3}. \end{aligned}$$

Se puede reescribir la ecuación como:

$$\begin{aligned} u &= -x \frac{\ln 3}{3}, \\ u e^u &= -\frac{\ln 3}{3}, \\ W(u e^u) &= W\left(-\frac{\ln 3}{3}\right), \\ u &= W\left(-\frac{\ln 3}{3}\right), \\ -x \frac{\ln 3}{3} &= W\left(-\frac{\ln 3}{3}\right), \\ x &= -\frac{3}{\ln 3} W\left(-\frac{\ln 3}{3}\right), \\ x &= 2,4780. \end{aligned}$$

3. Solución numérica de los ejemplos con Python

A continuación, se resuelven estas ecuaciones numéricamente usando Python.

De acuerdo con Severance [9], Python es un lenguaje de alto nivel pensado para ser relativamente sencillo de leer y procesar para las máquinas. Este programa fue utilizado para implementar todos los algoritmos desarrollados bajo la filosofía de la Programación Orientada a Objetos (POO). La creación de los programas desarrollados en esta investigación representa un aporte genuino en el campo de la matemática aplicada.

Otro aspecto de trascendencia para la POO es que se superan las limitaciones de la programación estructurada mediante una versión de programación donde las tareas se resuelven a través de la colaboración de objetos de clases, los cuales figuran como elementos principales para la creación de instancia.

En el código de Python que se creó para resolver estas ecuaciones se usa la librería `sympy`, importándose de ella las funciones: `LambertW` y `exp` con el propósito de resolver las ecuaciones numéricamente.

El código ofrece un menú interactivo que:

- Solicita al usuario seleccionar la ecuación a resolver.
- Usa funciones específicas correspondiente a cada ecuación a resolver para encontrar las soluciones aproximadas, donde se considera un factor, al cual se aplica la función de Lambert. Esta función Lambert $W()$ ya está diseñada para resolver directamente ecuaciones que involucran la función de Lambert, por consiguiente, la integración de esta herramienta contribuye significativamente a encontrar las soluciones con un dirección más especializada.
- Muestra la solución numérica de acuerdo con la ecuación seleccionada.

Este enfoque en Python refleja la flexibilidad que la función de Lambert brinda en la resolución de ecuaciones trascendentales, permitiendo que las soluciones se obtengan mediante cálculos numéricos eficientes.

Los resultados obtenidos ilustran la eficiencia computacional en Python considerando 50 cifras decimales.

Por otra parte, la programación desarrollada en Python representa una fusión entre el rigor matemático y la practicidad computacional. Utilizando la poderosa biblioteca simbólica SymPy, se creó una herramienta interactiva que permite explorar a fondo las derivadas (desde la primera hasta la cuarta) y la integral de la función de Lambert $W(x)$.

Este diseño no solo simplifica el cálculo de expresiones complejas, sino que también facilita su interpretación al presentar resultados simbólicos precisos. El menú interactivo está cuidadosamente estructurado para guiar al usuario en un análisis detallado de $W(x)$, ofreciendo un acceso dinámico y eficiente a sus propiedades fundamentales.

Además, esta implementación resalta cómo las matemáticas avanzadas pueden integrarse en la programación para resolver problemas complejos, todo con un enfoque claro y accesible. Al combinar el cálculo simbólico y la capacidad de interactuar con los resultados, el programa no solo sirve como herramienta educativa, sino también como una demostración de cómo la programación puede abrir nuevas puertas al entendimiento profundo de funciones trascendentales como $W(x)$. Este enfoque convierte al programa en una solución excepcional para académicos, estudiantes e investigadores que buscan aplicar teoría matemática en un entorno computacional moderno y práctico.

4. Derivadas sucesivas de la función de Lambert

4.1 Primera derivada de la función de Lambert

Para calcular la derivada de la función W de Lambert es necesario recurrir a la definición:

$$W(x)e^{W(x)} = x,$$

$$\frac{d}{dx} (W(x)e^{W(x)}) = \frac{d}{dx} x,$$

$$\frac{d}{dx} (W(x)) e^{W(x)} + W(x) \frac{d}{dx} (e^{W(x)}) = 1,$$

$$W'(x)e^{W(x)} + W(x)W'(x)e^{W(x)} = 1,$$

$$W'(x) (e^{W(x)} + W(x)e^{W(x)}) = 1.$$

Se sabe que:

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Luego,

$$W'(x) (e^{W(x)} + x) = 1,$$

$$W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}.$$

De la relación:

$$W(x)e^{W(x)} = x,$$

$$e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}.$$

Por lo tanto,

$$W'(x) = \frac{1}{x + \frac{x}{W(x)}},$$

$$W'(x) = \frac{1}{\frac{xW(x)+x}{W(x)}},$$

$$W'(x) = \frac{W(x)}{xW(x) + x},$$

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(W(x) + 1)}.$$

A este mismo resultado llegan Corless y colaboradores [1].

4.2 Segunda derivada de la función de Lambert

Se puede derivar nuevamente la función para obtener la segunda derivada:

$$W''(x) = \frac{W'(x)(xW(x) + x) - W(x)(xW'(x) + W(x) + 1)}{(xW(x) + x)^2},$$

$$W''(x) = \frac{\frac{W(x)}{xW(x)+x}(xW(x) + x) - W(x)\left(\frac{xW(x)}{xW(x)+x} + W(x) + 1\right)}{(xW(x) + x)^2},$$

$$W''(x) = \frac{\frac{W(x)(xW(x)+x)}{xW(x)+x} - W(x)\left(\frac{xW(x)+(xW(x)+x)(W(x)+1)}{xW(x)+x}\right)}{(xW(x) + x)^2},$$

$$W''(x) = \frac{\frac{W(x)(xW(x)+x)}{xW(x)+x} - W(x)\left(\frac{xW(x)+xW^2(x)+xW(x)+xW(x)+x}{xW(x)+x}\right)}{(xW(x) + x)^2},$$

$$W''(x) = \frac{\frac{W(x)(xW(x)+x)}{xW(x)+x} - W(x)\left(\frac{xW^2(x)+3xW(x)+x}{xW(x)+x}\right)}{(xW(x) + x)^2},$$

Tabla 2. Soluciones de las ecuaciones [*Solutions of the equations*].

Ecuación	Solución (50 cifras decimales)
$x^x = 5$	2.1293724827601566963803119964922563940730775111028
$x + e^x = 10$	2.0705799049803026514382717338278822931743799611555
$x^3 = 3^x$	2.4780526802883024118937365168946903078681423126891

$$W''(x) = \frac{\frac{xW^2(x)+xW(x)}{xW(x)+x} - \left(\frac{xW^3(x)+3xW^2(x)+xW(x)}{xW(x)+x}\right)}{(xW(x)+x)^2},$$

$$W''(x) = \frac{\frac{xW^2(x)+xW(x)-xW^3(x)-3xW^2(x)-xW(x)}{xW(x)+x}}{(xW(x)+x)^2},$$

$$W''(x) = \frac{-xW^3(x) - 2xW^2(x)}{(xW(x)+x)^3},$$

$$W''(x) = -\frac{xW^2(x)(W(x)+2)}{(xW(x)+x)^3},$$

$$W''(x) = -\frac{xW^2(x)(W(x)+2)}{x^3(W(x)+1)^3},$$

$$W''(x) = -\frac{W^2(x)(W(x)+2)}{x^2(W(x)+1)^3}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{W(x)} \right) = \frac{W(x)}{W^2(x)} - \frac{xW'(x)}{W^2(x)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{W(x)} \right) = \frac{W(x)}{W^2(x)} - \frac{x}{W^2(x)} \frac{W(x)}{x(W(x)+1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{W(x)} \right) = \frac{1}{W(x)} - \frac{1}{W(x)(W(x)+1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{W(x)} \right) = \frac{W(x)+1-1}{W(x)(W(x)+1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{W(x)} \right) = \frac{W(x)}{W(x)(W(x)+1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{W(x)} \right) = \frac{1}{W(x)+1}.$$

4.3 Tercera derivada de la función de Lambert

$$W'''(x) = \frac{W^3(x)(2W^2(x) + 8W(x) + 9)}{x^3(W(x)+1)^5}.$$

4.4 Cuarta derivada de la función de Lambert

$$W^{(iv)}(x) = \frac{W^4(x)(6W^3(x) + 36W^2(x) + 79W(x) + 64)}{x^4(W(x)+1)^7}.$$

Otra variante donde se involucra la derivada de la función de Lambert es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{W(x)} \right) = \frac{0 \cdot W(x) - 1 \cdot W'(x)}{W^2(x)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{W(x)} \right) = -\frac{W'(x)}{W^2(x)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{W(x)} \right) = -\frac{1}{W^2(x)} \frac{W(x)}{x(W(x)+1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{W(x)} \right) = -\frac{1}{xW(x)(W(x)+1)}.$$

Por último, en este apartado de derivadas de la función W de Lambert se tratará la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{W(x)} \right) = \frac{1 \cdot W(x) - xW'(x)}{W^2(x)},$$

La primera derivada $W'(x) = \frac{W(x)}{x(W(x)+1)}$ es interesante porque su complejidad proviene de la relación implícita entre x y $W(x)$, haciendo que dependa tanto de x como de $W(x)$. Esto la vuelve particularmente útil para estudiar la sensibilidad de sistemas dependientes de ecuaciones logarítmicas o exponenciales.

La segunda derivada $W''(x) = -\frac{W^2(x)(W(x)+2)}{x^2(W(x)+1)^3}$, está enfocada en la curvatura de la función, es decir, en cómo cambia la tasa de crecimiento de $W(x)$. Esta derivada revela detalles sobre la concavidad o convexidad de $W(x)$ en diferentes intervalos de variación de x . La complejidad de las derivadas superiores aumenta debido a la cantidad de términos, estas son útiles en análisis avanzados como el desarrollo en series de Taylor.

5. Cálculo de una primitiva de la función W de Lambert

La integral de la función:

$$\int W(x) dx$$

Integrando por partes, donde,

$$u = W(x),$$

$$du = \frac{W(x)}{x(W(x)+1)} dx,$$

$$dv = dx,$$

$$v = x,$$

$$\int W(x) dx = xW(x) - \int x \frac{W(x)}{x(W(x)+1)} dx,$$

$$\int W(x) dx = xW(x) - \int \frac{W(x)}{W(x)+1} dx,$$

$$\int W(x) dx = xW(x) - \int \frac{W(x)+1-1}{W(x)+1} dx,$$

$$\int W(x) dx = xW(x) - \int \left(\frac{W(x)+1}{W(x)+1} - \frac{1}{W(x)+1} \right) dx,$$

$$\int W(x) dx = xW(x) - \int \left(1 - \frac{1}{W(x)+1} \right) dx,$$

$$\int W(x) dx = xW(x) - x + \int \frac{1}{W(x)+1} dx.$$

Esta integral es:

$$\int \frac{1}{W(x)+1} dx = \frac{x}{W(x)} + c.$$

Por lo tanto,

$$\int W(x) dx = xW(x) - x + \frac{x}{W(x)} + c.$$

Coincidiendo con el resultado de Corless et al [1].

La integral de $W(x)$, por otro lado, tiene una expresión notablemente compacta: $\int W(x) dx = xW(x) - x + \frac{x}{W(x)} + c$. Esto refleja una interpretación sencilla del comportamiento de $W(x)$ con respecto a x , lo que la hace accesible en contextos prácticos como cálculos de áreas bajo la curva o en problemas de optimización. Comparada con las derivadas, la integral destaca por su claridad.

En general, las derivadas y la integral de $W(x)$ permiten explorar tanto el comportamiento local (derivadas) como global (integral) de la función. Su capacidad para representar dinámicas complejas y resolver problemas trascendentales la convierte en una herramienta valiosa en diversas disciplinas científicas y matemáticas.

6. Desarrollo en serie de potencias de la función W de Lambert

Supongamos que la serie está centrada en cero:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

Luego,

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Teniendo en cuenta que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

al sustituir, resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)^n}{n!} = x.$$

De acuerdo con Takeuchi [10] si la sucesión $\{S_n\}$ converge a S (o diverge a $\pm\infty$) entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a S (o diverge a $\pm\infty$) y se denota por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \text{ (ó } \pm\infty\text{)}.$$

El número S se llama límite o suma total de la serie.

Los primeros términos se expresan como:

$$c_0 + c_1x(c_0 + c_1x) + \frac{1}{2!}c_2x^2(c_0 + c_1x + c_2x^2)^2 + \frac{1}{3!}c_3x^3(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)^3$$

$$+ \frac{1}{4!}c_4x^4(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4)^4 + \dots$$

$$c_0 + c_1x(c_0 + c_1x) + \frac{1}{2!}c_2x^2(c_0 + c_1^2x^2 + c_2^2x^4 + 2c_1x + 2c_2x^2 + c_2x^2) + \frac{1}{3!}c_3x^3(1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)^3$$

$$+ \frac{1}{4!}c_4x^4(1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4)^4$$

Si $n = 0$:

$$\sum_{n=0}^0 c_n x^n \sum_{n=0}^0 \frac{(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)^n}{n!} = x.$$

Para la obtención de los coeficientes se usa el método de los coeficientes indeterminados. Los primeros términos:

$$c_0 = 0.$$

Si $n = 1$,

$$(c_0 + c_1x)(1 + c_0 + c_1x) = x.$$

Se sustituye $c_0 = 0$,

$$(c_1x)(1 + c_1x) = x$$

resultando,

$$c_1 = 1.$$

Si $n = 2$,

$$\sum_{n=0}^2 c_n x^n \sum_{n=0}^2 \frac{(\sum_{n=0}^2 c_n x^n)^n}{n!} = x,$$

$$(c_1 x + c_2 x^2) \left(1 + c_1 x + \frac{1}{2} c_1^2 x^2 + \frac{1}{2} c_2^2 x^4 + c_1 c_2 x^3 \right) = 0.$$

Simplificando lo anterior, se obtiene,

$$(c_1 x)(c_1 x) + (c_2 x^2)(1) = 0,$$

$$c_2 = -c_1,$$

$$c_2 = -1.$$

Euler [3], encontró que la distribución en series de potencias centradas en cero se obtiene mediante:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n.$$

La expresión es citada por Corless et al [2] en una forma similar a la presentada anteriormente.

Obsérvese que:

$$W(x) = \frac{(-1)^{1-1}}{1!} x^1 + \frac{(-2)^{2-1}}{2!} x^2 + \frac{(-3)^{3-1}}{3!} x^3 + \frac{(-4)^{4-1}}{4!} x^4 + \frac{(-5)^{5-1}}{5!} x^5 + \frac{(-6)^{6-1}}{6!} x^6 + \frac{(-7)^{7-1}}{7!} x^7 + \frac{(-8)^{8-1}}{8!} x^8 + \frac{(-9)^{9-1}}{9!} x^9 + \dots$$

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2} x^3 - \frac{8}{3} x^4 + \frac{125}{24} x^5 - \frac{54}{5} x^6 + \frac{16807}{720} x^7 - \frac{16384}{315} x^8 + \frac{531441}{4480} x^9 + \dots$$

Calcular la suma parcial de orden 10 de esta serie es fundamental para obtener aproximaciones prácticas de $W(x)$ en distintos puntos dentro de su intervalo de convergencia. En particular, se programó en Python la evaluación de esta suma parcial en los puntos $x = 0,25$, $x = 0,5$ y $x = 1$ con el fin de analizar la precisión y comportamiento de la aproximación, la cual resultó ser buena.

La elección de estos valores permite examinar el comportamiento de la convergencia de la serie conforme x se acerca al extremo del radio de convergencia, proporcionando información clave sobre la precisión de la aproximación en distintos intervalos.

Los resultados en Python para la suma de los primeros 10 términos de esta serie considerando los valores mencionados es:

Tabla 3. Cálculo de la suma parcial de la serie [Calculation of the partial sum of the series].

Valor de x	Suma de los primeros 10 términos
0,25	0,22117189813363702
0,5	0,3931002065107075
1	0,6278321351850763

Conclusiones

En base a los resultados del proceso investigativo y la revisión teórica que se hizo se establecen las siguientes conclusiones. La función de Lambert permite resolver con gran

elegancia ecuaciones que, de otra manera, serían prácticamente inabordables mediante métodos algebraicos convencionales. Facilita la transformación de ecuaciones trascendentes en formas que pueden resolverse tanto de manera analítica como computacional, y su poder radica en reducir problemas complejos a soluciones más simples y elegantes.

Las demostraciones y cálculo de las derivadas e integral de $W(x)$ muestran cómo las funciones trascendentes pueden ser manipuladas utilizando tanto análisis matemático teórico como herramientas computacionales. La derivada de $W(x)$ es fácilmente accesible a través de su fórmula, mientras que la integral fue evaluada mediante el método de integración por partes, dando lugar a una expresión analítica. Luego, la programación en Python permite automatizar estos cálculos, brindando una poderosa opción para analizar y aplicar la función de Lambert en una variedad de contextos.

El desarrollo en serie de la función $W(x)$ transforman una representación abstracta en una herramienta concreta para exploración y uso práctico. Además, la programación de las sumas parciales de la serie resalta la conexión entre matemáticas puras y computación, mostrando cómo conceptos avanzados pueden ser implementados para resolver problemas reales. Este hecho no solo fortalece habilidades de cálculo numérico, sino también la capacidad de traducir teorías complejas en soluciones computacionales útiles.

Suplementos

Los códigos elaborados en Python se encuentran disponibles en el siguiente enlace: <https://github.com/Arn>

oldoHerrera/C-DIGOS---PYTHON.

Conflictos de interés

Se declara que no existen conflictos de interés.

Contribución de autoría

Conceptualización A.H.H., D.M.L.

Análisis formal A.H.H., D.M.L.

Investigación A.H.H., D.M.L., I.C.D.

Metodología A.H.H., D.M.L., I.C.D.

Programación A.H.H., I.C.D.

Redacción: preparación del borrador original A.H.H., D.M.L., I.C.D.

Redacción: revisión y edición A.H.H., D.M.L., I.C.D.

Referencias

- [1] Corless, R. M., G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey y D. E. Knuth: *On the Lambert W Function*. *Advances in Computational Mathematics*, 5:329–359, 1996.
- [2] Corless, R. M., D. J. Jeffrey y D. E. Knuth: *A sequence of series for the Lambert W function*. En *Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC*, páginas 197–204, 1997.
- [3] Euler, L.: *De serie Lambertina Plurimisque eius insignibus proprietatibus*. *Opera Mathematica*, 6(1):350–369, 1779.
- [4] García, A.: *La función W de Lambert*, 2016. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/especial/lambert/lambert.html>.
- [5] García Sánchez, F. J., A. Ortiz-Conde y S. Malobabic: *Aplicaciones de la función de Lambert en electrónica*. *SciELO*, páginas 1–5, 2006. https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-48212006000400008.
- [6] Gnanarajan, S.: *Solutions for Series of Exponential Equations in Terms of Lambert- W Function and Fundamental Constants*. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2, 2018.
- [7] Lambert, J. H.: *Observations variae in Mathesin Puram*. *Acta Helvetica, physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, 3:128–168, 1758.
- [8] Scott, T. C., G. Fee y J. Grotendorst: *Asymptotic series of generalized Lambert W function*. *ACM Communications in Computer Algebra*, 47(3):75–83, 2013.
- [9] Severance, C.: *Python para todos. Explorando la información con Python 3*. Ann Arbor, MI, USA, 2020.

[10] Takeuchi, Y.: *Sucesiones y Series*. LIMUSA, MÃ©xico, 1980.

[11] Weinstein, E.: *Función W de Lambert*. <https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html>, Consultado en 2020.

