

Modelo del comportamiento reproductivo de *Aedes aegypti* con poliandria

Model for reproductive behavior of Aedes aegypti with polyandry

Damon Jorge Rubio^{1*}, Raúl Guinovart Díaz², Manuel Cruz Rodríguez³, Alicia Pérez Figueredo⁴

Resumen El mosquito *Aedes aegypti* es un vector transmisor de la fiebre amarilla, el dengue, el chikungunya y el zika, entre otras enfermedades. Basado en comportamiento de laboratorio, se ha asumido durante mucho tiempo que las hembras del mosquito se aparean una vez en su vida. Sin embargo, se ha encontrado evidencia de poliandria en condiciones de laboratorio y poblaciones silvestres. La poliandria se manifiesta cuando una hembra produce descendencia de múltiples machos. Los métodos de control de vectores como la técnica del insecto estéril/incompatible cuentan con la monandria como hipótesis, ignorando la ocurrencia de poliandria. Con el objetivo de ilustrar de una manera el comportamiento reproductivo de esta especie, el presente trabajo propone modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que toman en cuenta el fenómeno de la poliandria, con vistas a ser integrados en las técnicas de control de vectores.

Palabras Clave: dinámica de poblaciones, ecuaciones diferenciales ordinarias, poliandria, técnica del insecto estéril/incompatible.

Abstract *The mosquito Aedes aegypti is a vector for yellow fever, dengue, chikungunya, and Zika, among other diseases. Based on laboratory behavior, it has long been assumed that female mosquitoes mate once in their lifetime. However, evidence of polyandry has been found in both laboratory conditions and wild populations. Polyandry occurs when a female produces offspring from multiple males. Vector control methods such as the sterile/incompatible insect technique rely on the monandry assumption, ignoring the occurrence of polyandry. With the aim of illustrating in a unified way the reproductive behavior of this species, this work proposes mathematical models based on systems of ordinary differential equations that account for the phenomenon of polyandry, with the goal of integrating them into vector control techniques.*

Keywords: population dynamics, ordinary differential equations, polyandry, sterile/incompatible insect technique.

Mathematics Subject Classification: 92-10, 92D25, 37N25, 34C60, 65L06.

¹Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: damonvoltarubio@gmail.com.

²Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: guino@matcom.uh.cu.

³Departamento de Matemática, Instituto de Cibernética, Matemática y Física, La Habana, Cuba. Email: manuelcruzrodriguez92@gmail.com.

⁴Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: a.perez.figueredo01@gmail.com.

*Autor para Correspondencia (*Corresponding Author*)

Editado por (*Edited by*): Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

Citar como: Jorge Rubio, D., Guinovart Díaz, R., Cruz Rodríguez, M. & Pérez Figueredo, A. (2025). Modelo del comportamiento reproductivo de *Aedes aegypti* con poliandria. *Ciencias Matemáticas*, 39(1), 39–48. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17470143>. Recuperado a partir de <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/11154>.

Introducción

La técnica del insecto estéril/incompatible (SIT/IIT, por sus siglas en inglés) es un método reconocido de control de vectores que ha sido aplicado con éxito para controlar diversas

plagas de animales desde la década de 1950. En la actualidad, esta estrategia se ha utilizado para controlar poblaciones de mosquitos, con el objetivo de reducirlos y limitar la propagación de las enfermedades que estos transmiten [8].

La SIT clásica se basa en la liberación masiva de machos esterilizados por radiación ionizante. Los machos estériles liberados transfieren su esperma estéril a las hembras silvestres, lo que resulta en una reducción progresiva de la población objetivo.

La técnica del insecto incompatible (IIT) se basa en el hecho de que el esperma de los machos portadores de una cepa de *Wolbachia* que induce la incompatibilidad citoplasmática (CI, en inglés) es alterado por la bacteria de modo que ya no puede fertilizar exitosamente los huevos de las hembras que no portan esta cepa de *Wolbachia*. Esto puede resultar en una reducción progresiva de la población objetivo cuando se liberan machos incompatibles. Además, la *Wolbachia* interfiere en la capacidad de los mosquitos para transmitir el dengue [12].

El enfoque combinado IIT-SIT es amigable con el medio ambiente y rentable, permitiendo el control de vectores en hábitats urbanos complejos e inaccesibles en los que la implementación del control vectorial estándar es difícil, ya que los machos liberados buscan activamente a las hembras salvajes, y permite liberar un número mucho mayor de mosquitos machos en comparación con la IIT sola, mientras simultáneamente se protege contra la liberación accidental de hembras [21].

La modelación de estas técnicas va guiada a la comprensión de la dinámica temporal a gran escala de una población de mosquitos del género *Aedes* expuesta a liberaciones artificiales de machos esterilizantes. En cualquiera de las técnicas (SIT o IIT), los machos liberados están esterilizando efectivamente a las hembras silvestres con las que se aparean.

Poliandria en *Aedes aegypti*

Durante mucho tiempo se ha asumido que la hembra de *Aedes aegypti* es monógama, es decir, que se aparea solo una vez en la vida.

En estudios más recientes sin embargo, se ha analizado la posibilidad de la existencia de poliandria en *Aedes aegypti*, al ser de hecho, un fenómeno bastante común en insectos.

En [11] se considera la poliandria como el apareamiento con más de un macho, obtuvieron como resultado de estudios de laboratorio que el 14% de las hembras de *Aedes aegypti* están involucradas en múltiples apareamientos dentro de un período de 48 horas, en recintos semicampos.

Por otra parte, en [17] se informa la primera evidencia de poliandria en una población natural de *Aedes aegypti*, la frecuencia es baja (6,25%), pero probablemente esté subestimada, y se encuentra dentro del rango de estimaciones de poliandria en otras especies de mosquitos. Además, se aproxima que la verdadera frecuencia de poliandria en la población de estudio podría ser de hasta 14,6%. Ya aquí se define la poliandria como la descendencia de múltiples machos, y no simplemente la cópula o inseminación de una hembra con varios machos.

De otra manera, en [4] fueron definidas las hembras poliándricas como aquellas que recibieron una segunda insemina-

ción en su bursa, independientemente de si los espermatozoides del segundo macho fueron almacenados; este estudio es el primero en demostrar que el comportamiento poliándrico de *Aedes aegypti* depende del intervalo posterior al apareamiento, tal que su probabilidad de ocurrencia va disminuyendo en el tiempo posterior a las dos horas después de ocurrido el primer apareamiento, además, el experimento mostró que dicha probabilidad se hace cero después de la ingesta de sangre y oviposición de la hembra.

Relevancia del estudio

La poliandria en mosquitos *Aedes aegypti* dejó de ser algo desconocido, mas sigue resultando novedoso, las investigaciones aseguran que aún hay trabajo por realizar en el campo biológico. Esta cualidad no ha sido tomada en cuenta durante muchos años en investigaciones de ciencias biológicas y como hecho en la naturaleza; todo lo cual se traduce luego a los modelos matemáticos que se preocupan por la modelación de poblaciones de mosquitos o de los métodos elaborados para su control. Su representación matemática derivará en una mejor y más detallada comprensión de la dinámica del vector, que es necesaria en los estudios genéticos y los ya mencionados programas de control y eliminación del mosquito. Considerar esta propuesta resulta matemáticamente un acercamiento mucho más realista al comportamiento de los vectores bajo estudio en la modelación de las técnicas de control SIT/IIT, que al ser completadas producirán un mayor éxito en el control de las poblaciones.

1. Modelos propuestos

Los modelos consisten en sistemas de EDO, que se inspiran en el trabajo de Strugarek M. et al., [19] donde se estudia un modelo matemático minimalista diseñado para la eliminación de poblaciones de mosquitos *Aedes aegypti* mediante SIT/IIT. El mismo resulta ser generalmente biestable, permitiendo simultáneamente la eliminación de la población y su supervivencia, considerando diferentes tipos de liberaciones (constantes, periódicas o impulsivas) y respectivas condiciones necesarias para lograr la eliminación en cada caso.

1.1 Ciclo de vida y reproducción del mosquito

La dinámica de la población de vectores se basa en el ciclo de vida del mosquito *Aedes aegypti*, que comprende una fase de huevo, dos fases acuáticas sucesivas (larval y pupal), donde el estadio larval consta a su vez de cuatro etapas, y una forma adulta o fase alada (Figura 1). Sin embargo, se simplifica el ciclo de vida permitiendo que las fases inmaduras o acuáticas ocupen un solo compartimento en el modelo, mientras que las fases adultas se dividen en mosquitos machos y hembras [14].

Los mosquitos utilizan la reproducción sexual para producir nuevas generaciones. Entre los 2-3 días después de emerger, ambos sexos se aparean, y las hembras pueden tomar una comida de sangre que es necesaria para el desarrollo de

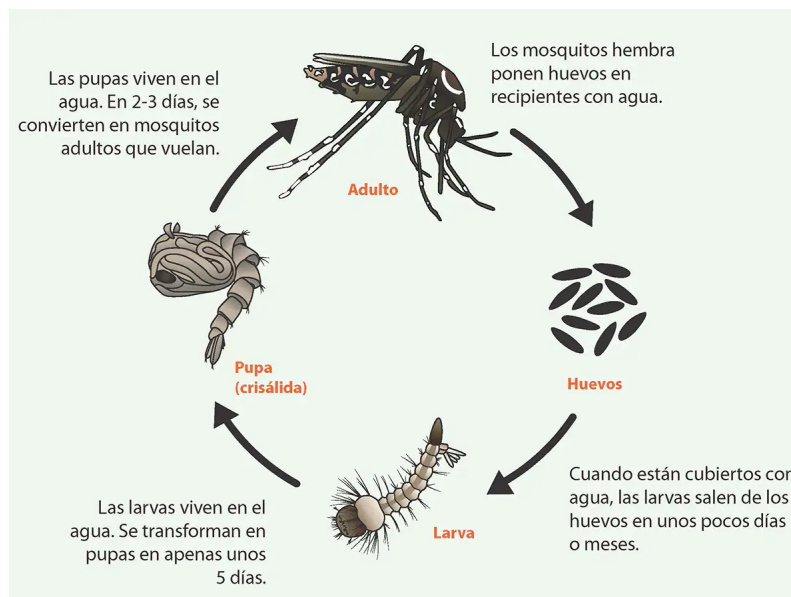


Figura 1. Ciclo de vida del mosquito [5] [Mosquito's life cycle [5]].

los huevos. Estas dos actividades a menudo ocurren simultáneamente porque los machos se sienten atraídos tanto por el huésped vertebrado como por las hembras, facilitando así el apareamiento [15].

Además, en [1] consta que después de la inseminación, las hembras de *Aedes aegypti* experimentan varios cambios, que incluyen la producción de huevos, aumento de la longevidad, la disminución en la incidencia de re-apareamiento, y la disminución en la actividad de vuelo. Además, el apareamiento inhibe la convergencia armónica de las hembras, un posible mecanismo para evitar un nuevo apareamiento.

Cuando una hembra virgen madura de *Aedes aegypti* es inseminada, el macho le transfiere una sustancia llamada matrona, que vuelve a la hembra refractaria a una segunda inseminación de por vida [10]. Por esta razón, por mucho tiempo se asumió que la hembra de *Aedes aegypti* es monógama.

1.2 Metodología

En trabajos precedentes de modelación de poblaciones de mosquitos y técnicas de control de vectores no se tuvo en cuenta el impacto de la poliandria [19, 20, 2, 9, 18]. Su estudio e implementación en estos modelos los hará más realistas y precisos; ya que las técnicas de control del vector dependen de la esterilización de las hembras, lo cual se puede ver frustrado una vez que dichas hembras se aparean con varios machos.

La contribución de este artículo está basado en [13], que se apoya en el modelo usado en [19], con la diferencia de que no hemos tenido en cuenta la liberación de machos estériles ni la población de hembras esterilizadas, para poder enfocarnos en el fenómeno de apareamiento múltiple. Se adaptó el modelo para describir tanto la monandria como la poliandria en la población de hembras mediante un sistema de EDO. Para cada sistema se obtendrán condiciones suficientes que garantizan la estabilidad de la posición de equilibrio trivial, además de

una expresión para el número reproductivo R_0 , en función de los parámetros del sistema.

1.3 Modelación de monandria

Para ilustrar la coexistencia biológica de las poblaciones de nuestro sistema de EDO, se construyó un modelo compartimental representado en la Figura 2.

Como variables se tienen E , que denota la densidad de mosquitos en la fase acuática, M la densidad de machos adultos salvajes, F_1 densidad de hembras que no se han apareado, y F_2 densidad de hembras apareadas; al modelar la monandria buscamos describir cómo una hembra se apareará con un solo macho durante toda su vida.

Por ello, una vez que una hembra pasa de F_1 a F_2 ya no puede regresar, solo puede poner sus huevos o morir. La fase acuática solo eclosiona mosquitos hembras del tipo F_1 , y la población de huevos solamente se favorece de F_2 .

De esta manera, la fase acuática produce mosquitos adultos, machos y hembras (sin aparear), en diferente proporción, aunque con una tasa de eclosión. Las hembras vírgenes pueden aparearse con cierta tasa, lo que las vuelve candidatas a poner huevos con determinada tasa de oviposición, y finalmente, todas estas poblaciones tienen sus respectivas tasas de mortalidad.

Como parámetros biológicos todos positivos, se tienen los siguientes:

- $b > 0$: tasa de oviposición;
- $\mu_E > 0$, $\mu_{F_1} > 0$, $\mu_{F_2} > 0$ y $\mu_M > 0$: tasas de mortalidad de los mosquitos en la fase acuática, hembras sin aparear, hembras apareadas y machos adultos respectivamente;
- K : parámetro de capacidad máxima ambiental para la fase acuática;

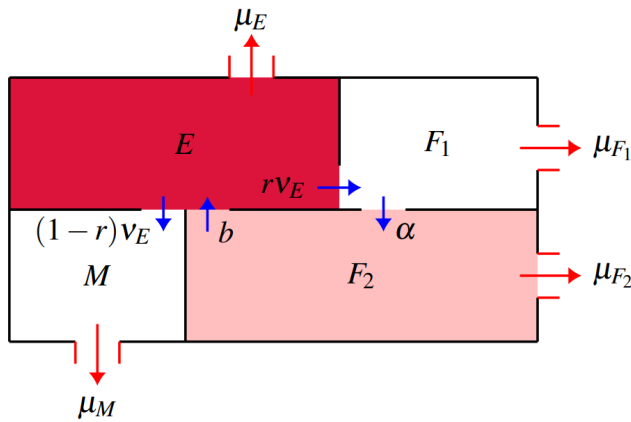


Figura 2. Representación de la monandria [*Representation of monandry*].

- $v_E > 0$: tasa de transición de la fase acuática a la adultez;
- $r \in (0, 1)$: probabilidad de que emerja una hembra;
- $\alpha > 0$: tasa de apareamiento.

Resultando el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = b\left(1 - \frac{E}{K}\right)F_2 - (v_E + \mu_E)E \\ \frac{dM}{dt} = (1-r)v_E E - \mu_M M \\ \frac{dF_1}{dt} = rv_E E - (\alpha + \mu_{F_1})F_1 \\ \frac{dF_2}{dt} = \alpha F_1 - \mu_{F_2}F_2 \end{cases} \quad (1)$$

La expresión $(1 - \frac{E}{K})$ se refiere a la capacidad disponible de los sitios de oviposición para recibir huevos, de manera que el término no lineal $b(1 - \frac{E}{K})F_2$ describe un crecimiento logístico. Se usa de manera específica en algunas especies de mosquitos y se interpreta como un comportamiento de "salto de oviposición", esto es, las hembras son capaces de seleccionar sus sitios de cría, buscando focos y recipientes con alto contenido de alimentos y baja presión de competencia intraespecífica. Así, si los sitios de cría en determinada área ya contienen muchas larvas, entonces las hembras no depositarán huevos o depositarán muy pocos, y efectivamente, saltarán su oviposición.

1.3.1 Análisis de estabilidad

En esta sección hallaremos puntos de equilibrio del sistema propuesto, para acto seguido buscar condiciones de estabilidad del punto de extinción.

El sistema (1) posee dos equilibrios, el trivial:

$$(E^*, M^*, F_1^*, F_2^*) = (0, 0, 0, 0),$$

y el no trivial, de componentes:

$$\begin{aligned} E^{**} &= K \left(1 - \frac{\mu_{F_2}(v_E + \mu_E)(\alpha + \mu_{F_1})}{\alpha br v_E} \right), \\ M^{**} &= K \left(\frac{(1-r)v_E}{\mu_M} - \frac{\mu_{F_2}(v_E + \mu_E)(\alpha + \mu_{F_1})(1-r)}{\alpha br \mu_M} \right), \\ F_1^{**} &= K \left(\frac{rv_E}{\alpha + \mu_{F_1}} - \frac{\mu_{F_2}(v_E + \mu_E)}{\alpha b} \right), \\ F_2^{**} &= K \left(\frac{\alpha rv_E}{\mu_{F_2}(\alpha + \mu_{F_1})} - \frac{v_E + \mu_E}{b} \right). \end{aligned}$$

Con estos datos somos capaces de hallar el número reproductivo R_0 , parámetro clave en la teoría de la dinámica de poblaciones, que es la capacidad de reproducción del vector y que, en última instancia, determina el tamaño de dicha población. Dependiendo de su valor, el estado estacionario puede ser un punto de equilibrio trivial ($R_0 < 1$) o no trivial ($R_0 > 1$) [20].

Teorema 1 Dado $R_0^m = \frac{w}{pqv}$, donde:

$$p = v_E + \mu_E, \quad q = \alpha + \mu_{F_1}, \quad u = \mu_M, \quad v = \mu_{F_2}, \quad w = \alpha br v_E,$$

se cumple que el punto de equilibrio $(E^*, M^*, F_1^*, F_2^*) = (0, 0, 0, 0)$ es asintóticamente estable en \mathbb{R}_+^4 para el sistema (1) si y solo si $R_0^m < 1$.

Demostración. Una vez hallado el jacobiano de nuestro sistema (1) para el punto de extinción se obtiene:

$$J_M(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -(v_E + \mu_E) & 0 & 0 & b \\ (1-r)v_E & -\mu_M & 0 & 0 \\ rv_E & 0 & -(\alpha + \mu_{F_1}) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\mu_{F_2} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de $J_M(0, 0, 0, 0)$ resulta de la siguiente forma:

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4, \quad (2)$$

con coeficientes:

$$\begin{aligned} a_1 &= p + q + u + v, \\ a_2 &= (p + u)(q + v) + pu + qv, \\ a_3 &= pq(u + v) + uv(p + q) - w, \\ a_4 &= u(pqv - w). \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que:

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad (a_1 a_2 - a_3) a_3 - a_1^2 a_4 > 0, \quad a_4 > 0,$$

de donde se obtiene la condición $pqv > w$, la cual asegura también que $(0, 0, 0, 0)$ es asintóticamente estable del sistema linealizado asociado a. sistema (1) (Teorema 35 de [16, p. 92]).

Luego, por el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se concluye que el punto $(0, 0, 0, 0)$ es un punto hiperbólico del sistema (1) [6, 7].

Entonces, por el teorema de Hartman-Grobman, $(0, 0, 0, 0)$ será un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema (1), por serlo para el sistema linealizado asociado, lo cual se cumple si y solo si $pqv > w$ (Teorema 36 de [16, p. 98]).

Nótese que si $R_0^m < 1$, el punto de extinción es la única posición de equilibrio.

Se concluye que la condición analizada para estabilidad del equilibrio trivial, o extinción de la población, asegura que otro equilibrio carece de sentido cuando la misma se cumple; además, para $R_0^m > 1$ el equilibrio $(0, 0, 0, 0)$ es inestable. ■

1.4 Modelación de poliandria

Nuevamente se representa el fenómeno de interés mediante un modelo compartimental, el cual aparece en la Figura 3. El siguiente paso consiste en implementar la poliandria, describiéndola en este caso como la capacidad del mosquito hembra para aparearse con varios machos [11].

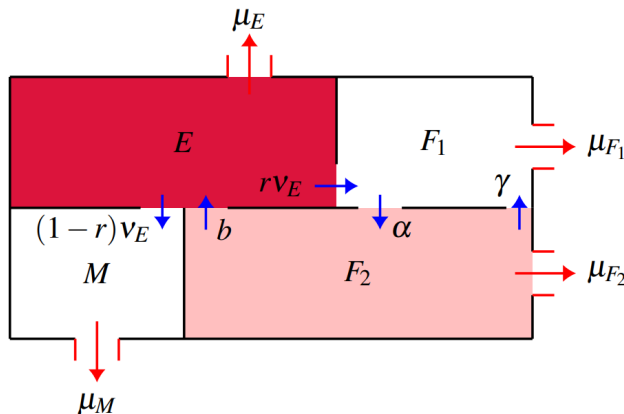


Figura 3. Representación de la poliandria [Representation of polyandry].

Esto no es más que ampliar el modelo (1), permitiendo que de F_2 se pueda volver a F_1 con cierta tasa, por lo que en un primer instante se tiene una población de hembras disponibles y otra de hembras apareadas, para luego tener dos poblaciones de hembras poliándricas. En este modelo las variables son una vez más, densidad de mosquitos en la fase acuática E , de machos adultos salvajes M , y de las antes descritas F_1 y F_2 .

Salvo la descripción anterior, en este nuevo modelo se conservan las hipótesis del precedente, con parámetros biológicos positivos:

- $b > 0$: tasa de oviposición;
- $\mu_E > 0, \mu_{F_1} > 0, \mu_{F_2} > 0$ y $\mu_M > 0$: tasas de mortalidad de los mosquitos en la fase acuática, hembras disponibles, hembras apareadas y machos adultos respectivamente;
- K : parámetro de capacidad máxima ambiental para la fase acuática;
- $v_E > 0$: tasa de transición de la fase acuática a la adultez;

- $r \in (0, 1)$: probabilidad de que emerja una hembra;
- $\alpha > 0$: tasa de apareamiento;
- $0 < \gamma \leq \alpha$: representa la proporción de mosquitos hembras apareadas que regresan al grupo de las disponibles para aparearse nuevamente.

El nuevo sistema de EDO queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = b\left(1 - \frac{E}{K}\right)F_2 - (v_E + \mu_E)E \\ \frac{dM}{dt} = (1-r)v_E E - \mu_M M \\ \frac{dF_1}{dt} = rv_E E + \gamma F_2 - (\alpha + \mu_{F_1})F_1 \\ \frac{dF_2}{dt} = \alpha F_1 - (\gamma + \mu_{F_2})F_2 \end{cases} \quad (3)$$

1.4.1 Análisis de estabilidad

Al igual que para el modelo anterior, el sistema (3) posee dos equilibrios, el trivial:

$$(E^*, M^*, F_1^*, F_2^*) = (0, 0, 0, 0),$$

y el no trivial, de componentes:

$$\begin{aligned} E^\# &= K \left(1 - \frac{(\gamma + \mu_{F_2})(v_E + \mu_E)}{\alpha br v_E} \left(\alpha + \mu_{F_1} - \frac{\alpha \gamma}{\gamma + \mu_{F_2}} \right) \right), \\ M^\# &= K \frac{(1-r)v_E}{\mu_M} \left(1 - \frac{(\gamma + \mu_{F_2})(v_E + \mu_E)}{\alpha br v_E} \left(\alpha + \mu_{F_1} - \frac{\gamma \alpha}{\gamma + \mu_{F_2}} \right) \right), \\ F_1^\# &= Kr v_E \frac{1 - \frac{(\gamma + \mu_{F_2})(v_E + \mu_E)}{\alpha br v_E} \left(\alpha + \mu_{F_1} - \frac{\alpha \gamma}{\gamma + \mu_{F_2}} \right)}{\alpha + \mu_{F_1} - \frac{\alpha \gamma}{\gamma + \mu_{F_2}}}, \\ F_2^\# &= Kr v_E \frac{\alpha \left(1 - \frac{(\gamma + \mu_{F_2})(v_E + \mu_E)}{\alpha br v_E} \left(\alpha + \mu_{F_1} - \frac{\alpha \gamma}{\gamma + \mu_{F_2}} \right) \right)}{(\gamma + \mu_{F_2}) \left(\alpha + \mu_{F_1} - \frac{\alpha \gamma}{\gamma + \mu_{F_2}} \right)}. \end{aligned}$$

Teorema 2 Dado $R_0^p = \frac{w}{p(\tau + qv)}$, donde:

$$\begin{aligned} p &= v_E + \mu_E, & q &= \alpha + \mu_{F_1}, & u &= \mu_M, & v &= \mu_{F_2}, \\ w &= \alpha br v_E, & z &= \gamma + \mu_{F_2}, & \tau &= \gamma \mu_{F_1}, \end{aligned}$$

se cumple que el punto de equilibrio $(E^*, M^*, F_1^*, F_2^*) = (0, 0, 0, 0)$ es asintóticamente estable en \mathbb{R}_+^4 para el sistema (3) si y solo si $R_0^p < 1$.

Demostración. Esta demostración es análoga a la anterior, tomando el jacobiano del sistema (3) evaluado en el punto de extinción:

$$J_P(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -(v_E + \mu_E) & 0 & 0 & b \\ (1-r)v_E & -\mu_M & 0 & 0 \\ rv_E & 0 & -(\alpha + \mu_{F_1}) & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & -(\gamma + \mu_{F_2}) \end{pmatrix}.$$

Para este sistema se tiene una vez más que cuando el número reproductivo $R_0^p < 1$ se tiene el punto de extinción como la única posición de equilibrio asintóticamente estable, y en caso contrario el $(0, 0, 0, 0)$ es inestable.

Nótese que si $\gamma = 0$ (no hay reapareamiento), entonces $R_0^p = R_0^m$. ■

2. Resultados numéricos

2.1 Algoritmo y selección de parámetros

Para resolver los sistemas planteados en los modelos anteriores se utilizó la función `ode23` en MATLAB. Es un solucionador de paso simple que utiliza el método de Runge-Kutta. Cada paso es casi independiente de los pasos anteriores.

Se introducen los datos de un paso al siguiente, el tamaño del paso h esperado para lograr una precisión deseada y, en una estrategia conocida como FSAL (por sus siglas en inglés *First Same as Last*), el último valor de la función al final de un paso exitoso se usa como el valor inicial de la función en el siguiente paso.

Los valores de los parámetros para nuestras simulaciones fueron tomados de [9] y están registrados en la Tabla 1.

Aunque no hay datos específicos al respecto, la tasa de apareamiento puede variar significativamente según la especie de mosquito y las condiciones ambientales. Por esto se toma $\alpha = 0,5$ como una estimación de que la mitad de la población de hembras se aparean exitosamente.

Similar al caso anterior, no se puede asegurar un rango de apareamiento múltiple en una población de mosquitos hembras, en consecuencia se toma $\gamma = 0,25$ como un estimado.

Como condiciones iniciales, se eligen $E(0) = 0$ y $F_2(0) = 0$, además se toma $F_1(0) = 1000$ y $M(0) = 700$.

2.2 Simulaciones

Las siguientes simulaciones fueron realizadas para el modelo que describe la monandria (1). Las figuras 4 y 5 muestran la variación en la capacidad máxima, es decir, el parámetro K .

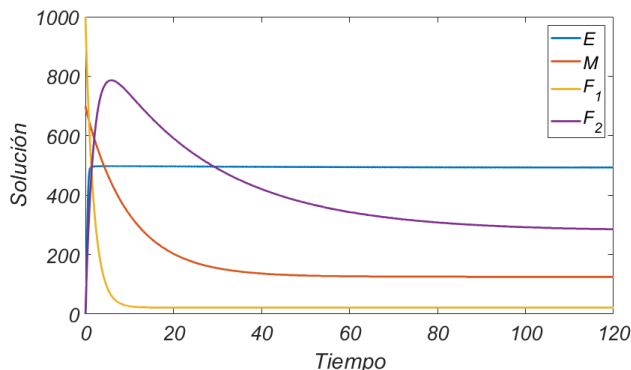


Figura 4. Variación de la capacidad máxima para $K = 500$. [Variation of the maximum capacity for $K = 500$].

Basándonos en el análisis para puntos de equilibrio ya realizado, el parámetro que afecta de mayor manera el comportamiento de todas las poblaciones es la capacidad de carga. Su aumento implica condiciones favorables para el desarrollo de los vectores. En condiciones como estas existe peligro de epidemia al introducir un mosquito enfermo en la población.

Para el resto de simulaciones solo se trabaja con valor $K = 500$.

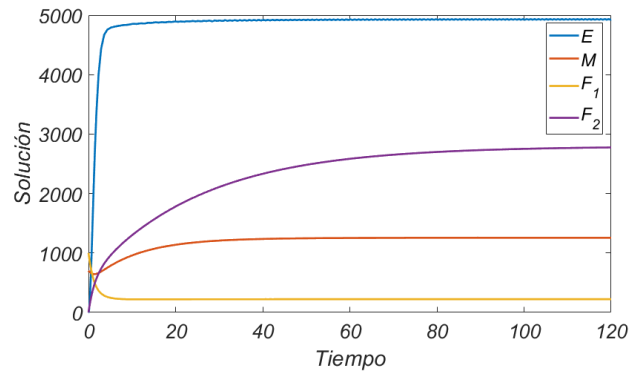


Figura 5. Variación de la capacidad máxima para $K = 5000$. [Variation of the maximum capacity for $K = 5000$].

En la Figura 6 se han reducido las tasas de apareamiento y oviposición ($\alpha = 0,1, b = 2$), pero aún así la población de huevos se acerca a su capacidad máxima; ya en la Figura 7 es notable una disminución drástica dada por el aumento de la muerte en la fase acuática ($\mu_E = 0,8$) y una pequeña transición a la adultez ($v_E = 0,01$).

La interpretación epidemiológica de este análisis es que para obtener el resultado deseado, se deben alterar estos parámetros mediante la aplicación de medidas de control biológico y larvicidio.

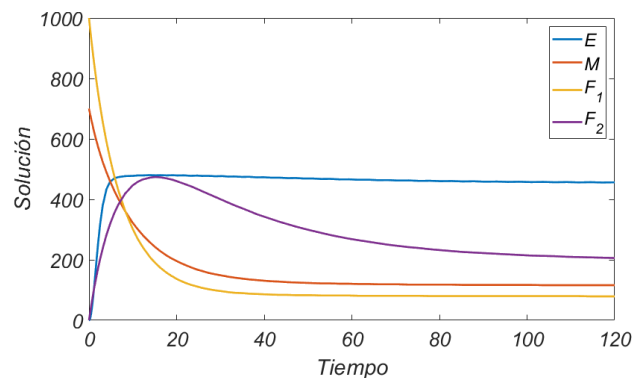


Figura 6. Número reproductivo para parámetros seleccionados $R_0^m \approx 2,84$. [Reproductive number for selected parameters $R_0^m \approx 2,84$].

Para que la población de huevos se reduzca totalmente, se debe cumplir la condición en el Teorema 1, la cual solo se alcanza al aumentar las tasas de mortalidad (Figura 8), ya que parámetros como la proporción de hembras que nacen y la tasa de oviposición de estas hembras son difíciles de controlar.

Para el sistema (3) de poliandria es evidente que los resultados obtenidos para el anterior modelo se mantienen, ya que solo se agrega un parámetro que introduce la poliandria.

Lo verdaderamente interesante de este modelo, es que la estabilidad hacia el punto de extinción está afectada por el parámetro γ , que regula la cantidad de reapareamientos, esto

Parámetros	r	b	μ_E	ν_E	μ_{F_1}	μ_{F_2}	μ_M	α
Valores	0,49	10	0,03	0,05	0,04	0,04	0,1	0,5
Unidad		día ⁻¹	día ⁻¹	día ⁻¹	día ⁻¹	día ⁻¹	día ⁻¹	día ⁻¹

Tabla 1. Valores de los parámetros. [Parameter's values].

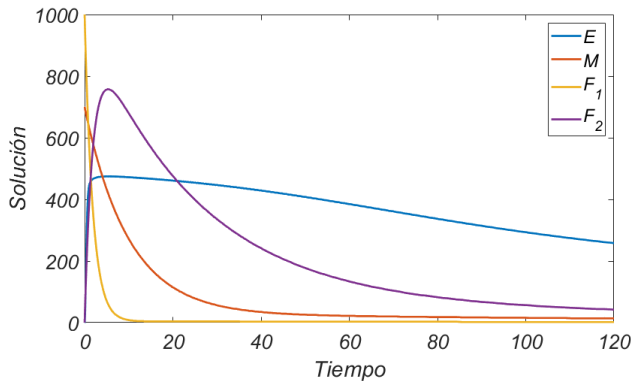


Figura 7. Número reproductivo para parámetros seleccionados $R_0^m \approx 2,57$. [Reproductive number for selected parameters $R_0^m \approx 2,57$].

podría deberse a un factor de competencia intraespecífica, tanto en la fase alada como en la acuática.

Para las mismas tasas de muerte $\mu_E = \mu_{F_1} = \mu_{F_2} = 0,4$, se tiene que el modelo de poliandria (Figura 9) alcanza el equilibrio trivial más rápido que el de monandria (Figura 8), debido a que está siendo afectado por el parámetro biológico $\gamma = 0,5$.

Esto representa un buen indicio para nuestro modelo, ya que como se afirma en [17], la presencia de hembras poliándricas resalta la necesidad de estudiar aspectos de la biología postcopulatoria en *Aedes aegypti*, como la competencia espermática, que no ha recibido mucha atención.

Referido al efecto de múltiples apareamientos, se explica en [3] que las sustancias accesorias que se transfieren a las hembras con la eyacuación del macho pueden reducir la tasa de producción de huevos y la fertilidad femenina; algunas de estas sustancias están involucradas en la competencia espermática y tienen efectos negativos sobre el esperma de los compañeros anteriores, a su vez, pueden tener una variedad de efectos secundarios tóxicos para las hembras, reduciendo su vida útil.

Como colofón de este análisis, véase la Figura 11, donde aparecen representadas todas las poblaciones de mosquitos hembras estudiadas en nuestra investigación.

Con líneas discontinuas se muestran las hembras del modelo de monandria, mientras que las líneas gruesas serán las hembras del modelo de poliandria, asimismo, se usa el color amarillo para distinguir las hembras F_1 de las hembras F_2 en color azul.

La menor población de hembras es F_1 del modelo monán-

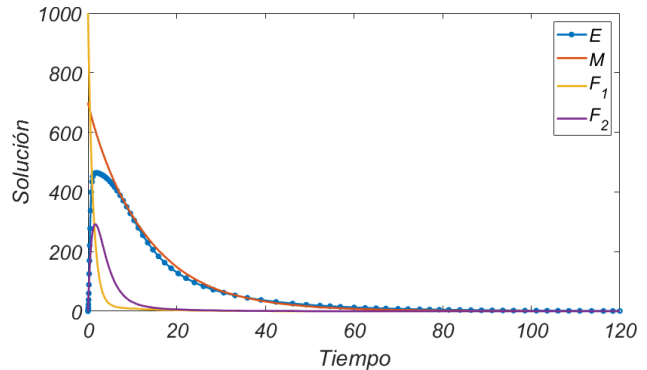


Figura 8. Se cumple la condición de extinción de las poblaciones $R_0^m = \frac{w}{p_{qv}} < 1$, para $\mu_E = \mu_{F_1} = \mu_{F_2} = 0,4$ [The extinction condition of the populations is satisfied $R_0^m = \frac{w}{p_{qv}} < 1$, for $\mu_E = \mu_{F_1} = \mu_{F_2} = 0,4$].

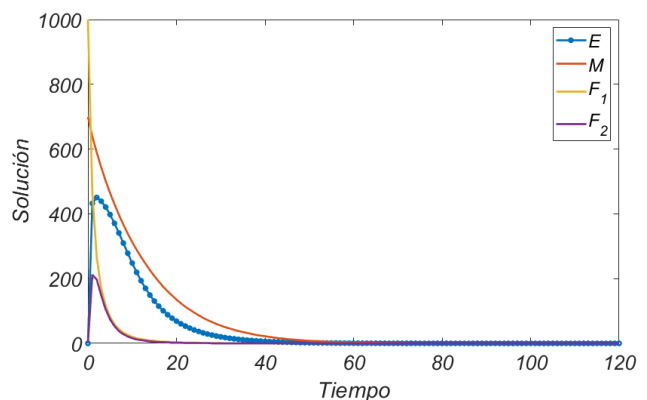


Figura 9. Presencia del parámetro $\gamma = 0,5$ [Presence of the parameter $\gamma = 0,5$].

drico, que son aquellas que no tienen descendencia; mientras que la mayor población es F_2 del modelo monándrico, esto concuerda con datos reales, pues la poliandria se registra en un menor porcentaje.

A pesar de ello, sucede que son ahora dos poblaciones de hembras fértiles las que aporta nuestro modelo, que de no ser tomadas en cuenta, pueden afectar los resultados de las técnicas de control SIT/IIT.

Conclusiones

Los hallazgos obtenidos pueden servir de base para futuros estudios y aplicaciones en el control de otros vectores de enfermedades.

Los modelos matemáticos propuestos ofrecen una com-

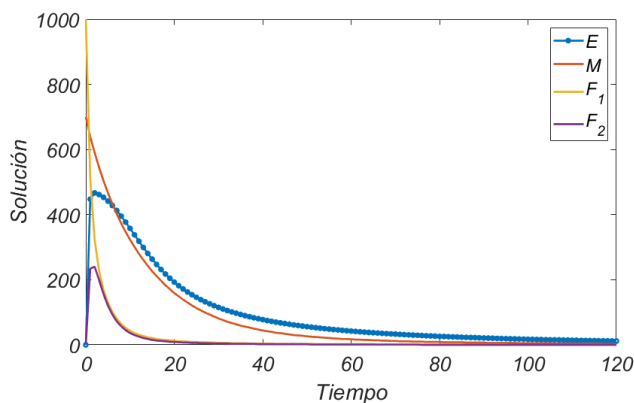


Figura 10. Extinción de las poblaciones para valores $\mu_E = \mu_{F_1} = \mu_{F_2} = 0,3$ y $\gamma = 0,5$. Nótese que con respecto al modelo anterior, hay menos dependencia de las tasas de mortalidad, aunque también lo afectan, pero la erradicación no subyace exclusivamente en ellas [Extinction of populations for values $\mu_E = \mu_{F_1} = \mu_{F_2} = 0,3$ and $\gamma = 0,5$. Note that relative to the previous model, there is less dependence on mortality rates, although they still have an effect; however, eradication does not solely rely on them].

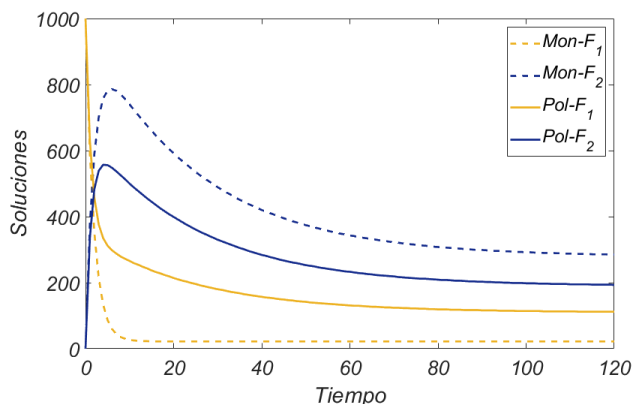


Figura 11. Poblaciones de hembras [Female populations].

presión más profunda y precisa del comportamiento reproductivo de las hembras de *Aedes aegypti*.

La poliandria puede afectar el impacto de los programas de control; los cuales dependen de que los machos estériles se apareen con las hembras, eliminándolas efectivamente de la población. Las hembras monándricas no contribuirían a la próxima generación después de este apareamiento, mientras que las hembras poliándricas podrían potencialmente aparearse nuevamente con un macho no estéril.

La efectividad de la técnica SIT/IIT podría verse comprometida si no se considera el efecto de la poliandria, o por lo menos no sería la alternativa óptima para la erradicación de una población de mosquitos. La presencia de poliandria implica que la estrategia de liberar machos estériles debe ser reevaluada y ajustada para asegurar su éxito a largo plazo, y

para disminuir los costos de las mismas liberaciones.

Una vez considerada la poliandria se pueden diseñar intervenciones más efectivas que reduzcan la propagación de enfermedades como el dengue, el zika y el chikungunya.

Como cuestión práctica además, no se puede asumir que las hembras capturadas en la naturaleza den a luz descendencia de un solo padre. Esto es importante al muestrear poblaciones naturales para estudios de genética.

Agradecimientos

Agradecemos el financiamiento del Proyecto PN223LH010-042 “Nuevas aproximaciones en la modelación dinámica de enfermedades” del Programa Nacional de Ciencias Básicas, Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente, Cuba, 2024-2026. Agradecemos de manera especial a Frank Ernesto Álvarez y Claudia Fonte, miembros del grupo franco-cubano de Ecuaciones Diferenciales, quienes introdujeron las primeras referencias para desarrollar este trabajo.

Suplementos

Este artículo no contiene información suplementaria.

Conflictos de interés

Se declara que no existen conflictos de interés. Ninguno de los autores, ni la Institución hemos recibido pago de terceros para ningún aspecto relacionado con la obra presentada.

Contribución de autoría

Conceptualización D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Curación de datos D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Análisis formal D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Adquisición de Financiamiento D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Investigación D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Metodología D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Software D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Validación D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Visualización D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Redacción: preparación del borrador original D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Redacción: revisión y edición D.J.R, R.G.D, M.C.R, A.P.F.

Referencias

- [1] Alfonso-Parra, C., J.O. Atehortúa, J. Agudelo, S. Díaz, L. Ramírez y F. Avila: *Más Que Óvulos y Esperma: Factores Masculinos, Femeninos, y Ambientales Que Influyen en la Reproducción de Mosquitos de Aedes y Anopheles*. Revista Colombiana de Entomología, 48(2), 2022. <https://doi.org/10.25100/socolen.v48i2.11405>.

- [2] Almeida, L., J. Estrada, and N. Vauchelet: *The sterile insect technique used as a barrier control against reinfestation*. In Herzog, R., M. Heinkenschloss, D. Kalise, G. Stadler, and E. Trélat (editors): *Optimization and Control for Partial Differential Equations*, volume 29 of *Radon Series on Computational and Applied Mathematics*, pages 91–112. De Gruyter, 2022. <https://doi.org/10.1515/9783110695984-005>.
- [3] Arnqvist, G. and T. Nilsson: *The evolution of polyandry: Multiple mating and female fitness in insects*. *Animal Behaviour*, 60(2):145–164, 2000, ISSN 0003-3472. <https://doi.org/10.1006/anbe.2000.1446>.
- [4] Degner, E.C. and L.C. Harrington: *Polyandry Depends on Postmating Time Interval in the Dengue Vector Aedes Aegypti*. *The American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 94(4):780–785, 2016. <https://doi.org/10.4269/ajtmh.15-0893>.
- [5] Disease Control, Centers for y Prevention: *Ciclo de vida de los mosquitos Aedes*, 2024. <https://www.cdc.gov/mosquitoes/pdfs/aedes-life-cycle-es-h.pdf>.
- [6] Dorf, R.C. and R.H. Bishop: *Modern control systems*. Prentice Hall, 11th edition, 2008. <https://archive.org/search.php?query=external-identif%3A%22urn%3Aoclc%3Arecord%3A1245538034%22>.
- [7] Elsgolts, L.: *Differential Equations and the Calculus of Variations*. University Press of the Pacific, 2003, ISBN 9781410210678. <https://books.google.com/books?id=ZwIyAAAACAAJ>.
- [8] Estrada Hernández, J.: *Mathematical modeling of the sterile insect technique in a mosquito population for the control of arboviruses*. Doctoral thesis, University of Havana, 2024. <https://theses.hal.science/tel-04662100v1/file/JEstrada%20PhD%2013-7-2024.pdf>.
- [9] Estrada Hernández, J.: *Analysis of a hybrid sit-sir human epidemiology and mosquito population model*. *Investigación Operacional*, 46:16–27, 2025. https://rev-inv-ope.pantheonsorbonne.fr/sites/default/files/inline-files/46125-02_0.pdf.
- [10] Fuchs, M.S. and E.A. Hiss: *The partial purification and separation of the protein components of matrone from aedes aegypti*. *Journal of Insect Physiology*, 16(5):931–939, 1970. [https://doi.org/10.1016/0022-1910\(70\)90223-4](https://doi.org/10.1016/0022-1910(70)90223-4).
- [11] Helinski, M.E.H., L. Valerio, L. Facchinelli, T.W. Scott, J. Ramsey, and L.C. Harrington: *Evidence of Polyandry for Aedes Aegypti in Semifield Enclosures*. *The American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 86(4):635–641, 2012. <https://doi.org/10.4269/ajtmh.2012.11-0225>.
- [12] Hughes, H. and N.F. Britton: *Modelling the use of wolbachia to control dengue fever transmission*. *Bulletin of Mathematical Biology*, 75(5):796–818, 2013. <https://doi.org/10.1007/s11538-013-9835-4>.
- [13] Jorge Rubio, D.: *Modelación de poliandria en poblaciones de mosquitos*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, 2025. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.32798.65600>.
- [14] Nelson, M.J.: *Aedes aegypti: Biología y Ecología*. Organización Panamericana de la Salud, Washington, DC, 1986. <https://iris.paho.org/handle/10665.2/28513>.
- [15] OECD: *Safety Assessment of Transgenic Organisms in the Environment, Volume 8: OECD Consensus Document of the Biology of Mosquito Aedes aegypti*. OECD Publishing, Paris, 2018. <https://doi.org/10.1787/9789264302235-en>.
- [16] Ricard, M.R.: *Ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones*. Facultad de Matemática, Universidad de La Habana, Editorial Universitaria, 2022. https://books.google.com/cu/books/about/Ecuaciones_diferenciales_ordinarias_y_ap.html?id=1TWJzWEACAAJ&redir_esc=y.
- [17] Richardson, J.B., S.B. Jameson, A. Gloria-Soria, D.M. Wesson, and J.R. Powell: *Evidence of Limited Polyandry in a Natural Population of Aedes Aegypti*. *The American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 93(1):189–193, 2015. <https://doi.org/10.4269/ajtmh.14-0718>.
- [18] Silva, M.R. da, P.H.G. Lugão, F. Prezoto, and G. Chapiro: *Modeling the impact of genetically modified male mosquitoes in the spatial population dynamics of Aedes aegypti*. *Scientific Reports*, 12(1):9112, 2022. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-12764-7>.
- [19] Strugarek, M., H. Bossin, and Y. Dumont: *On the Use of the Sterile Insect Technique or the Incompatible Insect Technique to Reduce or Eliminate Mosquito Populations*. *Applied Mathematical Modelling*, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.026>.
- [20] Yang, H.M., M.L. Macoris, K.C. Galvani, M.T. Andrighetti, and D.M. Wanderley: *Assessing the effects of temperature on the population of aedes aegypti, the vector of dengue*. *Epidemiology and Infection*, 137(8):1188–1202, 2009. <https://doi.org/10.1017/S0950268809002040>.

- [21] Zheng, X., D. Zhang, Y. Li, C. Yang, Y. Wu, X. Liang, Y. Liang, X. Pan, L. Hu, Q. Sun, X. Wang, Y. Wei, J. Zhu, W. Qian, Z. Yan, A.G. Parker, J.R.L. Gilles, K. Bourtzis, J. Bouyer, M. Tang, B. Zheng, J. Yu, J. Liu, J. Zhuang, Z. Hu, M. Zhang, J.T. Gong, X.Y. Hong, Z. Zhang, L. Lin, Q. Liu, Z. Hu, Z. Wu, L.A. Baton, A.A. Hoffmann, and Z. Xi: *Incompatible and sterile insect techniques combined eliminate mosquitoes*. *Nature*, 572:56–61, 2019. <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1407-9>.

