G-PRESENTACIONES DEL GRUPO SIMÉTRICO

Juana E. Bermúdez Sosa[1] y Miguel A. Borges Trenard[2]
Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente

RESUMEN
Obtenemos una G-presentación del grupo simétrico, aplicando el Método de las bases de Gröbner. Comparamos la G-presentación obtenida con la presentación inicial (dada por Carmichel) y dos presentaciones completas dadas por Le Chenadec.

ABSTRACT
We obtain a G-presentation of the symmetric group, by applying the Gröbner bases Method. We compare the G-presentation obtained with the initial presentation (given by Carmichel) and two complete presentations (given by Le Chenadec).

INTRODUCCIÓN

Dividimos el trabajo en secciones. En la Sección I resumimos temas conocidos, necesarios para la presentación de los resultados. En la Sección II damos a conocer la G-presentación obtenida, con las demostraciones correspondientes. La Sección III se dedica a una comparación con otras presentaciones del grupo simétrico, la misma se realiza con respecto a los criterios siguientes: número de relaciones, requerimiento de memoria para su almacenamiento, regularidad de las expresiones, y longitud de las palabras. En las conclusiones destacamos los aspectos positivos y negativos de la G-presentación aquí reportada.

I. PRELIMINARES

Notaciones:

$X := \{X_1,...,X_n\}$	alfabeto finito,
$S := \langle X\rangle$	el monoide libre generado por X
t, u, v, w	elementos de S,
i, j, k	números naturales,
K	cuerpo conmutativo,
$K\langle X\rangle$	K-álgebra libre sobre X,
f, g, h	elementos de $K\langle X\rangle$ es decir, polinomios,
F, G	subconjuntos de $K\langle X\rangle$,
I	ideal bilateral de $K\langle X\rangle$,
I(F)	ideal bilateral generada por F,
α, β	subconjuntos $\langle X\rangle \times \langle X\rangle$,
$\langle\alpha\rangle$	congruencia generada por α,
P(α)	conjunto de binomios del tipo $t_1 - t_2$ donde $(t_1 - t_2) \in \alpha$

E-mail: [1]juanae@csd.uo.edu.cu
[2]mborges@mabt.uo.edu.cu

Utilizaremos el ordenamiento de términos $<$ L sobre $\langle X\rangle$ dado en [Borges, 94], donde se brindan algunos elementos que muestran la utilidad del mismo.

Definición 2.1: Dado un ordenamiento de términos $<$ sobre $\langle X\rangle$:

i) Para f: = $\sum_{i=1}^{m} c_i s_i$, donde $c_i \in K \setminus \{0\}$, y $s_1 > \ldots s_m$,

- $T_<(f)$: = s_1 es el término máximo de f c. r. a <,
- $LC_<(f)$: = c_1 es el coeficiente principal de f c. r. a <,
- $Rest_<(f)$: = f - $LC_<(f)T_<(f)$: es el resto de f c. r. a <,

ii) El conjunto de términos máximos de F c. r. a < es T(F): = $T_<$ (f): $f \in f \setminus \{0\}\}$.

Definición 2.2: $G \subset I \setminus \{0\}$ es una base de Gröbner de I si T(G) genera T(I).

También se acostumbra a decir que G es una G-base.

Definición 2.3: Una base de Gröbner G de I es reducida sí, para todo $g \in G$:

i) T(g) no es múltiplo de cualquier $s \in T(G) \setminus T(g)$,

ii) LC(g) = 1.

iii) Rest (g) $\in$ R(I).

Definición 2.4: El par (X, β) es una G-presentación para $\langle X\rangle/\rho$ o para cualquier monoide canónicamente isomorfo a él, con respecto al ordenamiento de términos < sobre $\langle X\rangle$, si

$$P(B) = rGb(I(\rho)).$$

Definición 2.5: $f \in K\langle X\rangle \setminus \{0\}$ tiene una G-representación en términos de F, si se cumplen las condiciones:

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i s_i g_i t_i,\ c_i \in K \setminus \{0\},\ g_i \in K\langle X\rangle \setminus \{0\},\ s_i, t_i \in \langle X\rangle,$$

$$T(f) \geq T(s_i)T(g_i)T(T_i),\ ,\ \text{para todo } i = 1,...,m.$$

Teorema 1.6 (Caracterización de G-base):

G es una G-base de I(F) si, y si sólo si:

i) I(F) = I(G).

ii) Todo f de SP(G) tiene una G-representación en términos del conjunto G.

Las definiciones de SP(G) y otras necesarias para un mejor entendimiento de este trabajo pueden ser consultadas en [Borges, 92 , [Borges , 95], y [Mora , 86].

II. OBTENCIÓN DE UNA G-PRESENTACIÓN DEL GRUPO SIMÉTRICO

Sea el Grupo Simétrico de grado n (n > 2), denotado por Σn, con el sistema de relaciones de definición σ, que denotaremos por P8:

$$S_i^2 = (S_iS_{i+1})^3 = (S_iS_{i+1}S_iS_j)^2 = 1$$

$$i,j \in [1,\ n - 1],\ j \neq i,\ j \neq i + 1,$$

donde A = $\{S_1, S_{n-1}, S_n = S_1\}$ es un sistema generador del mismo.

Teorema 3.1: Sea I = I(P(σ)), entonces:

$$rGB(I) = \begin{cases} X_i^2 - 1, -1,\ i \in [1,\ n-1]\ , \\ \\ X_jX_iX_j - X_iX_jX_i,\ j \in [2,\ n-1],\ \ i \in\ [1, j-1]\ , \\ \\ X_kX_iX_j - X_iX_jX_iX_kX_i,\ k \in [3,\ n-1], j \in\ [2, k-1], i \in\ [1, j-1]\ , \\ \\ X_kX_jX_i - X_iX_jX_iX_kX_j,\ k \in [3,\ n-1], j \in\ [2, k-1], i \in\ [1, j-1]. \end{cases}$$

Demostración:

Formemos los conjuntos F y G con las asignaciones siguientes:

$$F := \left\{ \begin{array}{l} f_i^{(1)} := X_i^2 - 1,\ \ f_i^{(2)} := (X_iX_{i+1})^3 - 1\ , \\ \\ f_{ij} := (X_iX_{i+1}X_iX_j)^2 - 1 / i,\ \ j \in [1,\ n-1]\ , j \neq i,\ j \neq i+1 \end{array} \right\} = P(\sigma)$$

$$G := \{g_i := X_i^2 - 1 / i \in [1,\ n-1]\}\ U$$

$$\{g_{ij} := X_jX_iX_j - X_iX_jX_i \,|\, j \in [2, n-1], i \in [1, j-1]\}\ U$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ijk}^{(1)} := X_kX_iX_j - X_iX_jX_iX_kX_i\ /\ k \in [3,\ n-1], \\ \hfill j \in [2,\ k-1]\ ,\ i \in [1,\ j-1] \end{array} \right\} U$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ijk}^{(2)} := X_kX_jX_i - X_iX_jX_iX_kX_j\ /\ k \in [3,\ n-1], \\ \hfill j \in [2,\ k-1]\ ,\ i \in [1,\ j-1] \end{array} \right\}$$

Utilizando el método de demostración desarrollado en la metodología utilizada en [Borges, 94] y el ordenamiento $<$ L, debemos probar que se cumplen las condiciones siguientes:

1. I(F) = I(G)

2. Todo S-polinomio de G tiene una G-representación en términos de G.

Primera condición: 1a) F $\subset$ I(G).

Notemos que $f_i^{(1)} = g_i \in G$, $i \in [1, n - 1]$.

Para demostrar que los polinomios $f_i^{(2)} \in$ I(G), analicemos dos casos:

1ro. Para $i \in [n - 2]$, tomemos los polinomios

$$h_1 := f_i^{(2)} - X_iX_{i+1}X_ig_{i,i+1} = X_iX_{i+1}X_i^2X_i - 1,$$

$$h_2 := h_1 - X_iX_{i+1}g_i X_{i+1}X_i = X_iX_{i+1}^2X_i - 1,$$

$$h_3 := h_2 - X_ig_{i+1}X_i = X_{i+1}^2 - 1 = g_i.$$

De los cuales se deduce que:

$$f_1^{(2)} = X_iX_{i+1}X_ig_{i,i+1} + X_iX_{i+1}g_iX_{i+1}X_i + X_ig_{i+1}X_i + g_i \in I(G) .$$

2do. Para el caso $i = n - 1$, asignemos:

$$h_1 := f_i^{(2)} - X_{n-1}X_1g_{1,n-1}X_1 = X_{n-1}X_1^2X_{n-1}X_i^2 - 1,$$

$$h_2 := h_1 - X_{n-1}X_1^2X_{n-1}g_1 = X_{n-1}X_1^2X_{n-1} - 1,$$

$$h_3 := h_2 - X_{n-1}g_1X_{n-1} = X_{n-1}^2 - 1 = g_{n-1},$$

de los que obtenemos:

$$f_{n-1}^{(2)} = X_{n-1}X_1g_{1,n-1}X_1 + X_{n-1}X_1^2X_{n-1}g_1 + X_{n-1}g_1X_{n-1} + g_{n-1} \in I(G) .$$

Procederemos ahora a demostrar que los polinomios $f_{ij} \in I(G)$.

Debemos considerar dos posibilidades:

1ra. Supongamos ahora que $j > i+1$ y tomemos los polinomios

$$h_1 := f_{ij} - X_iX_{i+1}X_ig_{i,i+1,j}X_iX_j = X_iX_{i+1}X_i^2X_{i+1}X_iX_jX_i^2X_j - 1,$$

$$h_2 := h_1 - X_iX_{i+1}g_iX_{i+1}X_iX_jX_1^2X_j = X_iX_{i+1}^2X_iX_jX_i^2X_j - 1,$$

$$h_3 := h_2 - X_ig_{i+1}X_iX_jX_i^2X_j = X_i^2X_jX_i^2X_j - 1,$$

$$h_4 := h_3 - g_iX_jX_i^2X_j = X_jX_i^2X_j - 1,$$

$$h_5 := h_4 - X_jg_iX_j = X_j^2 - 1 = g_j.$$

De donde $h_4 = g_j + X_jg_iX_j \in I(G)$ y por tanto h_3, h_2, h_1 y

$$f_{ij} = g_j + X_jg_iX_j + g_iX_jX_i^2X_j + X_ig_i + X_ig_{i+1}X_iX_jX_i^2X_j + X_iX_{i+1}g_iX_{i+1}X_iX_jX_i^2X_j + X_iX_{i+1}X_ig_{i,i+1} \in I(G)$$

2da. Si $j < i$, tomemos:

$$h_1 : = f_{ij} - X_ig_{j,i,i+1}^{(2)}X_iX_{i+1}X_iX_j = X_iX_jX_iX_jX_{i+1}X_i^2X_{i+1}X_iX_j - 1,$$

$$h_2 : = h_1 - X_iX_jX_iX_jX_{i+1}g_iX_{i+1}X_iX_j = X_iX_jX_iX_jX_{i+1}g_iX_{i+1}X_iX_j = X_iX_jX_iX_jX_{i+1}^{(2)}X_iX_j - 1$$

$$h_3 : = h_2 - X_iX_jX_iX_jg_{i+1}X_iX_j = X_iX_jX_iX_jX_iX_j - 1,$$

$h_4 := h_3 - g_{ji} X_j X_i X_j = X_j X_i X_j^2 X_i X_j - 1,$

$h_5 := h_4 - X_j X_i g_j X_i X_j = X_j X_i^2 X_j - 1,$

$h_6 := h_5 - X_j g_i X_j = X_j^2 - 1 = g_j.$

Y sumándolos obtenemos que:

$$f_{ij} = X_i g^{(2)}_{j,i,i+1} X_i X_{i+1} X_i X_j + X_i X_j X_i X_j X_{i+1} g_i X_{i+1} X_i X_j + g_{ji} X_j X_i X_j + X_i X_j X_i X j g_{i+1} X_i X_j + X_j X_i g_j X_i X_j + X_j g_i X_j + g_j \in I(G).$$

b) $G \subset I(F)$.

Construimos los polinomios auxiliares siguientes:

$p_1^{ij} := f_{ij} X_j - X_i X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_i X_j^{(1)} = X_i X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_i - X_j \in I(F),$

$p_2^{i} := X_i f_i^{(2)} - f_i^{(1)} X_{i+1} X_i X_{i+1} X_i X_{i+1} = X_{i+1} X_i X_{i+1} X_i X_{i+1} - X_i \in I(F),$

$p_3^{i} := X_{i+1} p_2^{i} - f_{+1i}^{(1)} X_i X_{i+1} X_i X_{i+1} = X_i X_{i+1} X_i X_{i+1} - X_{i+1} X_i \in I(F),$

$p_4^{i} := p_2^{i} X_{i+1} - X_{i+1} X_i X_{i+1} X_i f_{i+1 i+1}^{(1)} = X_{i+1} X_i X_{i+1} X_i - X_i X_{i+1} \in I(F),$

$p_5^{i} := p_1^{ij} X_i - X_i X_{i+1} X_i X_j X_i f_i^{(1)} = X_i X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i-1} - X_j X_i \in I(F),$

$p_6^{ij} := p_1^{ij} X_{i+1} X_i X_{i+1} - X_i X_{i+1} X_i X_j X_{i+1} p_3^{i} = X_i X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1}^2 X_i - X_j X_{i+1} X_i X_{i+1} \in I(F),$

$p_7^{ij} := X_i X_{i+1} X_i X_j X_i f_{i+1}^{(1)} X_i + X_i X_{i+1} X_i X_j f_i^{(1)} - p_6 = X_j X_{i+1} X_i X_{i+1} - X_i X_{i+1} X_i X_j \in I(F),$

$p_8^{ij} := X_i X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_i f_{ji} - f_{ij} X_{j+1} X_j X_i X_j X_{j+1} = X_{i+1} X_j X_i X_j X_{i+1} X_j X_i - X_i X_{i+1} X_i X_j X_{i+1} X_i \in I(F),$

$p_9^{ij} := p_8^{ij} + p_1^{ij} = X_{j+1} X_j X_i X_j X_{i+1} X_j X_i - X_j \in I(F),$

$p_{10}^{ij} := f_j^{(2)} X_j X_i X_j X_{j+1} X_j X_i - X_j X_{j+1} X_j X_{j+1} f_{ij} = X_j X_{j+1} X_j X_{j+1} - X_j X_i X_j X_{j+1} X_j X_i \in I(F),$

$p_{11}^{ij} := X_{j+1} p_9^{ij} - f_{j+1}^{(1)} X_j X_i X_j X_{j+1} X_j X_i = X_j X_i X_j X_{j+1} X_j X_i - X_{j+1} X_j \in I(F),$

$p_{12}^{ij} := X_j p_{11}^{ij} - f_{1j}^{(1)} X_i X_j X_{j+1} X_j X_i = X_i X_j X_{j+1} X_j X_i - X_j X_{j+1} X_j \in I(F),$

$p_{13}^{ij} := X_i p_5^{ij} - f_i^{(1)} X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} = X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} - X_i X_j X_i \in I(F),$

$p_{14}^{ij} := X_j p_1^{ji} - f_j^{(1)} X_{j+1} X_j X_i X_j X_{j+1} X_j = X_{j+1} X_j X_i X_j X_{j+1} X_j X_j - X_j X_i \in I(F),$

$p_{15}^{ij} := f_{1j+1}^{(1)} X_j X_i X_j X_{j+1} X_j - X_{j+1} p_{14}^{ij} = X_{j+1} X_j X_i - X_j X_i X_j X_{j+1} X_j \in I(F),$

Caso a: Para demostrar que los polinomios

$$X_{i+1} X_i X_{i+1} - X_i X_{i+1} X_i \in I(F),\ 1 \le I \le n - 1$$

tomemos los polinomios

$$a_1^i := X_i p_3^i - f_i^{(1)} X_{i+1} X_i X_{i+1} X_i X_{i+1} = X_{i+1} X_i X_{i+1} - X_i X_{i+1} X_i \in I(F), \text{ donde } 1 \leq i \leq n-1$$

En particular, para $i = n-1$, se toma el polinomio

$$a_2 := a_1^{n-1} = X_{n-1} X_1 X_{n-1} - X_1 X_{n-1} X_1 \in I(F).$$

Caso b: Demostremos que los polinomios

$$X_j X_i X_{i+1} - X_i X_{i+1} X_i X_j X_i \in I(F), \quad j > i+1.$$

para esto, consideremos los polinomios

$$b_1^{ij} := X_i X_{i+1} X_i X_j X_i f_{i+1}^{(1)} - p_5^{ij} X_{i+1} = X_j X_i X_{i+1} - X_i X_{i+1} X_i X_j X_i \in I(F).$$

Caso c: Demostremos que los polinomios

$$X_j X_{i+1} X_i - X_i X_{i+1} X_i X_j X_i \in I(F), \quad j > i+1.$$

para lo cual tenemos los polinomios

$$c_1^{ij} := p_7^{ij} X_{i+1} - X_j X_{i+1} X_i f_{i+1}^{(1)} = X_j X_{i+1} X_i - X_i X_{i+1} X_i X_j X_{i+1} \in I(F).$$

Para los casos siguientes introducimos a continuación la definición siguiente:

Definición 3.1: Decimos que un polinomio g de G tal que $TM_<(g) = X_r X_n X_m$, $n \neq m$ es de distancia derecha $\Delta = |n - m|$. y es de distancia izquierda $\gamma = |r - n|$. Cuando $\Delta = \gamma$, simplemente decimos que g es de distancia Δ.

Podemos notar que a medida que n crece, en el conjunto G, aparecen polinomios de distancia mayor. Así, para $n = 3$, sólo aparece un polinomio de distancia 1; para $n = 5$, aparecen los polinomios:

$X_4X_2X_4 - X_2X_4X_2$, $X_4X_1X_4 - X_1X_4X_1$ de distancia 2 y 3 respectivamente, y $X_4X_1X_3$ $X_1X_3X_1X_4X_1$ de distancia derecha 2 y distancia izquierda 3.

Caso d: Demostremos que los polinomios $g_{ij} = X_j X_i X_j - X_i X_j X_i \in I(F)$, $i < j$.

Procederemos a la inducción sobre la distancia de este tipo de polinomios. Los polinomios de este tipo de distancia 1 pertenecen a I(F) por el caso a. Supondremos entonces que los polinomios de este tipo, de distancia Δ, denotados por h_Δ, pertenecen a I(F); y demostremos que los polinomios de distancia $\Delta + 1$ pertenecen a I(F). Para lo cual suponiendo que

$$h_\Delta^i := X_{i+\Delta} - X_i X_{i+\Delta} - X_i X_{i+\Delta} X_i \in I(F), \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

construimos los siguientes polinomios, para $j = \Delta + 1 + i$: :

$$d_1 := X_i X_{i+1} X_i X_i X_j X_i X_{i+1} p_1^{ij}{}' - p_1^{ij} X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_i = X_j X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_i - X_i X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_j \in I(F),$$

$$d_2 := d_i + X_i X_{i+1} X_i b_1^{ij} X_j = X_j X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_i - X_i X_{i+1} X_1^2 X_{i+1} X_i X_j X_i X_j \in I(F),$$

$$d_3 := d_4 + X_i X_{i+1} f_i^{(1)} X_{i+1} X_i X_j X_i X_j + X_i f_{i+1}^{(1)} X_i X_j X_i X_j + f_i^{(1)} X_j X_i X_j = X_j X_{i+1} X_i X_j X_i X_{i+1} X_i - X_j X_i X_j \in I(F),$$

$$d_4 := d_3 - c_1^{ij} X_j X_i X_{i+1} X_i = X_i X_{i+1} X_i X_j X_{i+1} X_j X_i X_{i+1} X_i - X_j X_i X_j \in I(F),$$

$d_5 := X_iX_{i+1}X_ih_{\Delta}^{i+1}X_iX_{i+1}X_i - d_4 = X_jX_iX_j - X_iX_{i+1}X_iX_{i+1}X_jX_{i+1}X_iX_{i+1}X_i \in I(F)$,

$d_6 := d_5 + p_3^i X_jX_{i+1}X_iX_{i+1}X_i = X_jX_iX_j - X_{i+1}X_iX_jX_{i+1}X_i \in I(F)$,

$d_7 := d_6 + X_{i+1}X_iX_jp_4^i = X_jX_iX_j - X_{i+1}X_iX_jX_iX_{i+1} \in I(F)$,

$d_8^{ij} := d_7 + p_{13}^{ij} = X_jX_iX_j - X_iX_jX_i \in I(F)$.

Al sustituir j = Δ + 1 +i en este último, llegamos a la conclusión siguiente:

$$h_{\Delta+1}^i = X_{\Delta+1+i}X_iX_{\Delta+1+i} - X_iX_{\Delta+1+i}X_i \in I(F),\ 1 \le i < n-2.$$

Y para i = n – 1, sólo es posible el polinomio de distancia 1, caso ya tratado (ver caso a).

Demostrando así que los polinomios $d_8^{ij} = g_{ij} \in I(F)$, para todo Δ = j – i.

Para demostrar que los polinomios $g_{ijk}^{(1)}$ y $g_{ijk}^{(2)}$ pertenecen a I(F), es suficiente considerar los tipos de polinomios de distancia derecha Δ y los de distancia izquierda γ.

Caso e: Demostremos que los polinomios $X_kX_iX_{i+\Delta} - X_iX_{i+\Delta}X_iX_kX_i \in I(F)$, $k > i$, $1 \le \Delta \le n-3$, para cualquier distancia Δ. Procederemos por inducción sobre Δ. Para ello supondremos que los polinomios h_Δ de este tipo y distancia Δ, pertenecen a I(F) y probaremos que los polinomios de este tipo y distancia Δ + 1 pertenecen también a I(F) .

Supongamos $h_{\Delta}^{ik,1} := X_kX_iX_{i+\Delta} - X_iX_{i+\Delta}X_iX_kX_i \in I(F)$ y construimos los polinomios siguientes con la condición j = i + Δ + 1:

$e_1 := X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}p_1^{ij} - p_1^{ik}X_{i+1}X_iX_jX_iX_{i+1}X_i = X_kX_{i+1}X_iX_jX_iX_{i+1}X_i - X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_2 := e_1 - c_1^{ik}X_jX_iX_{i+1}X_i = X_iX_{i+1}X_iX_kX_{i+1}X_jX_iX_{i+1}X_i - X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_3 := e_2 - X_iX_{i+1}X_ih_{\Delta}^{i+1,k,1}X_iX_{i+1}X_i = X_iX_{i+1}X_iX_{i+1}X_jX_{i+1}X_kX_{i+1}X_iX_{i+1}X_i - X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_4 := e_3 - X_iX_{i+1}X_iX_{i+1}X_jX_{i+1}X_kp_4^i = X_iX_{i+1}X_iX_{i+1}X_jX_{i+1}X_kX_iX_{i+1} - X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_5 := e_4 - X_iX_{i+1}X_iX_{i+1}X_jX_{i+1}b_1^{ik} = X_iX_{i+1}X_iX_{i+1}X_jX_{i+1}X_iX_{i+1}X_iX_kX_i - X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_6 := e_5 - p_3^iX_jX_{i+1}X_iX_{i+1}X_iX_kX_i = X_{i+1}X_iX_jX_{i+1}X_iX_{i+1}X_iX_kX_i - X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_7 := e_6 - X_{i+1}X_iX_jp_4^iX_kX_i = X_{i+1}X_iX_jX_iX_{i+1}X_kX_i - X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_8 := e_7 - p_{13}^{ij}X_kX_i = X_iX_jX_iX_kX_i = X_iX_{i+1}X_iX_kX_iX_{i+1}X_j \in I(F)$,

$e_9 := -e_8X_ip_{13}^{ik}X_j = X_i^2X_kX_iX_j - X_iX_jX_iX_kX_i \in I(F)$,

$e_{10}^{ijk} := e_9 - f_i^{(1)}X_kX_iX_j = X_kX_iX_j - X_iX_jX_iX_kX_i \in I(F)$,

Al sustituir j = Δ + 1 +i en este último, llegamos a la conclusión siguiente:

$h^{ik,1}_{\Delta+1} = X_kX_iX_{\Delta+1+i} - X_iX_{\Delta+1+i}X_iX_kX_i \in I(F)$. Demostrando así que los polinomios $e^{ijk}_{10} = g^{(1)}_{ijk} \in I(F)$ para toda $\Delta = j - 1$.

Caso f: Demostremos que los polinomios $X_{j+\gamma}X_jX_i - X_iX_jX_iX_{j+\gamma}X_j \in I(F)$, $X_j \in I(F)$, $j > 1$, $1 \le \gamma \le n - 3$.

Procederemos por inducción sobre la distancia γ: demostremos el resultado para $\gamma = 1$.

Tomemos $y^{ij}_1 := p^{ij}_{15} + p^{ij}_8 X_{j+1}X_j = X_{j+1}X_jX_i - X_iX_jX_iX_{j+1}X_j \in I(F)$.

Y suponiendo que

$h^{ij,2}_{\gamma} := X_{j+\gamma}X_jX_i - X_iX_jX_iX_{j+\gamma}X_j \in I(F)$, $j > i$, para un cierto γ probemos que $X_{j+\gamma+1}X_jX_i - X_iX_jX_iX_{j+\gamma+1}X_j \in I(F)$. Para ello consideremos el polinomio:

$$w^{ijk}_1 := X_jX_{j+1}X_jX_kX_jX_{j+1}\,p^{ji}_1 - p^{jk}_1 X_{j+1}X_jX_iX_jX_{j+1}X_j = X_kX_{j+1}X_jX_iX_jX_{j+1}X_j - X_jX_{j+1}X_jX_kX_jX_{j+1}X_j \in I(F),\ j > i,$$

a partir del cual, tomando $k = j + \gamma + 1$, formamos los polinomios:

$$w_2 := w_1 + X_jX_{j+1}X_j\,p^{jk}_{13} X_i = X_kX_{j+1}X_jX_iX_jX_{j+1}X_j - X_j^2 X_kX_jX_i \in I(F),$$

$$w_3 := w_2 + f^{(1)}_j X_kX_jX_i = X_kX_{j+1}X_jX_iX_jX_{j+1}X_j - X_kX_jX_i \in I(F),$$

$$w_4 := w_3 - c^{jk}_1 X_iX_jX_{j+1}X_j = X_jX_{j+1}X_jX_kX_{j+1}X_iX_jX_{j+1}X_j - X_kX_jX_i \in I(F),$$

$$w_5 := w_4 - X_jX_{j+1}X_j\,h^{i,j+1,2}_{\gamma} X_jX_{j+1}X_j = X_jX_{j+1}X_jX_iX_{j+1}X_iX_kX_{j+1}X_jX_{j+1}X_j - X_kX_jX_i \in I(F),$$

$$w_6 := X_jX_{j+1}X_jX_iX_{j+1}X_iX_k\,p^{j}_4 + w_5 = X_kX_jX_j - X_jX_{j+1}X_jX_iX_{j+1}X_iX_kX_jX_{j+1} \in I(F),$$

$$w_7 := w_6 + X_jX_{j+1}X_jX_iX_{j+1}X_i\,b^{jk}_1 = X_kX_jX_j - X_jX_{j+1}X_jX_iX_{j+1}X_iX_jX_{j+1}X_jX_kX_j \in I(F),$$

$$w_8 := w_7 - p^{ji}_7 X_{j+1}X_iX_jX_{j+1}X_jX_kX_j = X_kX_jX_j - X_iX_jX_{j+1}X_jX_{j+1}X_iX_jX_{j+1}X_jX_kX_j \in I(F),$$

$$w_9 := w_8 - X_i\,p^{j}_3 X_iX_jX_{j+1}X_jX_kX_j = X_kX_jX_j - X_iX_{j+1}X_jX_iX_jX_{j+1}X_jX_kX_j \in I(F),$$

$$w_{10} := w_9 + X_i\,p^{ji}_{13} X_jX_kX_j = X_kX_jX_i = X_kX_jX_j - X_iX_jX_i X_j^2 X_kX_j \in I(F),$$

$$w^{ijk}_{11} := w_{10} + X_iX_jX_i\,f^{(1)}_j X_kX_j = X_kX_jX_j - X_iX_jX_iX_kX_j \in I(F),$$

Sustituyendo $k = j + \gamma + 1$, hemos probado que el polinomio

$$X_{j+\gamma+1}X_jX_i - X_iX_jX_iX_{j+\gamma+1} \in I(F).$$

Por tanto, para cualquier γ comprendido entre 1 y n -2, es válido que los polinomios

$$w^{ijk}_{11} = g^{(2)}_{ijk} \in I(F) \text{ para toda } \gamma = k - j.$$

Queda probado así que I(F) = I(G).

II. Demostremos ahora que todo S-polinomio de G tiene una G-representación en términos de G. En esta parte presentaremos como ejemplo la demostración de dos de los 32 tipos de S-polinomios que se obtienen al parear los polinomios de G:

a) SP1 $\in$ SP(g, g_{ij}):

$$SP1: = X_jX_ig_j - g_{ij}X_j = X_iX_jX_iX_j - X_jX_i$$

Tomemos h: = SP1 – X_ig_{ij} = $X_i^2 X_jX_i - X_jX_i = g_iX_jX_i$, y por tanto

$$SP1 = X_ig_{ij} + g_iX_jX_i$$

tiene una G-representación en términos de G.

b) SP3 $\in$ SP$(g_i, g_{ijk}^{(1)})$

$$SP3: = (g_{ijk}^{(1)})X_j - X_kX_ig_j = X_iX_jX_iX_kX_iX_j - X_kX_i$$

Tomemos h_1: = SP3 - $X_iX_jX_i\,g_{ijk}^{(1)} = X_iX_j\,X_i^2\,X_jX_iX_kX_i - X_kX_i$

h_2: = h_1 - $X_iX_jg_iX_jX_iX_kX_i = X_iX_j\,X_j^2\,X_iX_kX_i - X_kX_i$

h_3 = h_3- $X_iX_jX_iX_kX_i = X_i^2\,X_kX_i - X_kX_i = g_iX_kX_i$

Luego b) SP3 = $X_iX_jX_i\,g_{ijk}^{(1)}) + X_iX_jg_iX_jX_iX_kX_jX_i + X_ig_jX_iX_kX_i + g_iX_kX_i$, tiene una G-representación de G.

La demostración de que los restantes S-Polinomios tienen una G -representación en términos de G se puede apreciar en [Bermúdez, 96]. Quedando así demostrado el teorema.

Corolario 3.3

$$G_n: =\{ S_i^2 = 1 \mid i \in [1, n - 1]\} \cup$$

$$\{S_jS_iS_j = S_iS_jS_i \mid j \in [2, n - 1], i \in [1, j - 1]\} \cup$$

$$\{S_kS_iS_j - S_iS_jS_iS_kS_j \mid k \in [3, n - 1], j \in [2, k - 1], i \in [1, j - 1]\} \cup$$

$$\{S_kS_iS_j - S_iS_jS_iS_kS_j \mid k \in [3, n - 1], j \in [2, k - 1], i \in [1, j - 1]\}$$

El par GP: = (s, G_n) es una G-presentación del grupo simétrico.

Comentario 3.4. Observemos que el conjunto de relaciones de la G-Presentación obtenida cumple la propiedad siguiente:

$$G_n \subset G_{n+1}, \text{ para cada } n > 2 \qquad (3.1)$$

III. COMPARACIONES CON OTRAS PRESENTACIONES DEL GRUPO SIMÉTRICO

Procederemos ahora a comparar la G-presentación obtenida GP (ver corolario 3.3) con las presentaciones completas dadas en [Le Chenadec, 86], las cuales relacionamos a continuación:

$$\begin{cases} R_i^{-1} \to R_i, 1 \le i \le n \\ R_i^2 \to 1, 1 \le i \le n \\ R_iR_j \to R_jR_i, j < i-1 \\ R_iR_j \ldots R_jR_i \to R_{i-1}R_iR_{i-1} \ldots R_j, \quad j < i \end{cases} \qquad (P10)$$

donde las R_i son las transposiciones (i   i+1) , y

$$\begin{cases} T_{ij}^{-1} \to T_{ij} \\ T_{ij}T_{ij} \to 1 \\ T_{ij}T_{kl} \to T_{kl}T_{ij},\ i \neq k,\ i \neq 1,\ j \neq 1 \\ T_{ij}T_{ik} \to T_{ik}T_{jk},\ i < k < j \\ T_{ij}T_{kj} \to T_{ki}T_{ij},\ k < i < j \\ T_{ij}T_{kj} \to T_{ki}T_{kj},\ k < i < j \end{cases} \qquad \text{(P11)}$$

en la cual los nuevos generadores T_{ij} son las transportaciones (i   j) y el ordenamiento utilizado fue el lexicográfico. Esta comparación la realizaremos respecto al número de relaciones y al requerimiento de memoria para su almacenamiento. Para la determinación del número de relaciones de las presentaciones consideradas analizamos los valores que pueden tomarlos índices i, j, k y l en las relaciones; por ejemplo, en el caso de P11:

En las relaciones de primer tipo, los valores de i dependen de los valores de j ($i \leq i < j \leq n$): luego, la cantidad de relaciones de este tipo es igual a

$$\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \frac{n(n-1)}{2} \qquad (4.1)$$

Es claro que la cantidad de relaciones del segundo tipo coincide con la del primer tipo, pues solamente dependen de i y j y éstos tienen igual variación que en el caso anterior.

En el tercer sistema de relaciones el análisis es algo más complicado:

Para un par (k, l) fijo, $i \neq k$, $i \neq 1$, $j \neq 1$, $1 \leq i \leq j - 1$, $2 \leq j \leq n$, pero entre j y k no existen restricciones, por lo que, para facilitar el cálculo del número de las T_{ij} consideramos dos posibilidades:

1ro: $j \leq k$

2do: $j > k$

En el primer caso la cantidad de T_{ij} es:

$$\sum_{j=2}^{k}(j-1) \qquad (4.2)$$

y en el segundo caso la cantidad de T_{ij} es:

$$\sum_{j=k+1}^{l-1}(j-2) + \sum_{j=l+1}^{n}(j-3) \qquad (4.3)$$

Sumando estas cantidades (4.2) y (4.3) obtenemos que para k y l fijos la cantidad total es:

$$\frac{n^2 - 5n + 4k + 8}{2}$$

Y sumando primero en k ($1 \leq k \leq 1 - 1$) y en j ($2 \leq j \leq n$) después, llegamos al total de relaciones del tercer tipo:

$$\frac{n(3n^3 - 16n^2 + 27n - 14)}{12} \qquad (4.4)$$

La cantidad de relaciones de cuarto tipo se determina de las variaciones de i, j y k:

$$1 \leq i < k < j \leq n$$

De las cuales tenemos:

$$\sum_{j=2}^{n}\left[\sum_{k=2}^{j-1}(k-1)\right] = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \qquad (4.5)$$

En cuanto a las relaciones del quinto y sexto tipos vemos que las variaciones de i, j y k son análogas a la anterior intercambiando sus posiciones, y por tanto sus cantidades coinciden con (4,5). Consiguientemente, al sumar el duplo de (4.1), (4.4) y el triplo de (4,5) obtenemos el total de relaciones de P11:

$$\frac{n(n-1)(3n^2 - 7n + 14)}{12}$$

Las deducciones de la cantidad de relaciones de P10 y GP, así como las referidas al requerimiento de la memoria de las presentaciones estudiadas se desarrollan por un análisis similar al realizado para P11. Estos resultados se muestran en la tabla siguiente:

Tabla I.

Presentación	**Cantidad de Relaciones**	**Requerimiento de memoria**
P8	$(n - 1)^2$	$(n - 1)(8n - 17)$
GP	$\frac{(n-1)(2n^2 - 7n + 12)}{6}$	$\frac{(n-1)(8n^2 - 31n + 33)}{3}$
P10	$n^2 - 2n + 2$	$\frac{n^3 + 9n^2 - 37n + 13}{3}$
P11	$\frac{n(n-1)(3n^2 - 7n + 14)}{12}$	$\frac{n(n-1)(6n^2 - 14n + 13)}{6}$

Con los resultados de la Tabla I se deduce que la cantidad de relaciones de GP es menor que la de P10, para $n \leq 4$, y que la de P11, para n arbitrario, y que GP requiere más capacidad de memoria que P10, pero mucho menos que P11.

No obstante, esta dificultad de GP con relación a P10 es de menor valor al observar la regularidad de las expresiones y las longitudes de las palabras de GP, que no dependen del grado del grupo, como ocurre con P10.

Mostraremos la comparación realizada entre las presentaciones señaladas para algunos valores particulares de n.

Con respecto a la cantidad de relaciones:

Tabla II.

n	GP	P10	P11
3	3	5	10
4	8	10	34
5	18	17	90
6	35	26	200
7	61	37	392

Con respecto al requerimiento de memoria:

Tabla III.

n	GP	P10	P11
3	8	12	**25**
4	37	36	**106**
5	104	68	**310**
6	181	119	**725**
7	**290**	**188**	**1463**

Notemos la gran diferencia entre el número de relaciones de GP y el de P11, esta diferencia aumenta mucho más rápidamente en comparación con la diferencia entre GP y el de P10. Similarmente se aprecia en la Tabla III el gran requerimiento de memoria de P11, mayor que el de GP y que el de P10.

CONCLUSIONES

En este trabajo, obtuvimos una G-presentación del grupo simétrico que (por consecuencia) resuelve también el problemas de las palabras, al igual que las presentaciones completas dadas en [Le-Chenadec, 86] así como realizamos un análisis comparativo entre tres presentaciones del simétrico. Enfatizamos que GP satisface la condición de recurrencia (3.1) del comentario 3.4, análogamente a las presentaciones P10, P11.

Se aprecia además la ventaja de la G-presentación obtenida (corolario 3.3) por la uniformidad de las relaciones para la expresión de una palabra en su forma canónica, por ser menor la longitud de las palabras que en P10 y menor la cantidad de relaciones que en P11. Con este resultado sobre las presentaciones GP, P10 y P11 podemos concluir que GP tiene ciertas ventajas sobre P10, éstas son:

la regularidad de las relaciones, la longitud de las palabras es independiente de n,

Y con respecto a P11:

menor cantidad de relaciones, menor requerimiento de memoria.

REFERENCIAS

[Bermúdez, 96]: BERMÚDEZ S., J.E. (1996): G-Presentaciones del Grupo Simétrico de Grado n. Santiago de Cuba. Tesis de Maestría.

[Borges, 92]: BORGES T., M.A. (1992): Bases de *Gröbner* Asociadas con Monoides Finitamente Generados. Santiago de Cuba. Tesis de doctorado.

[Borges, 94]: BORGES T., M.A. y M. BORGES Q. (1994): On a Metodology for obtaining *Gröbner* Bases Associated with Finitely Generated Monoids. Reporte 11, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. Departamento de Matemática. Universidad de Oriente.

[Borges, 95]: BORGES, T., M.A. y M. ESTRADA (1995): *Gröbner* Bases and G-Presentations of Finitely Generated Monoids. Personal Comunication.

[Cannon y otros, 73]: CANNON L., J.; A. DIMINO; G. HAVAS and J.M. WATSON (1973): Implementation and Analysis of the Todd –Coxeter Algorithm. Math. Comp. 27, p.463-490.

[Carmichael, 56]: CARMICHAEL, R.D. (1956): Groups of Finite Order. Dover Publications. INC. USA.

[Coxeter, Moser, 72]: COXETER W., H.S.M. and O.J. MOSER (1972): Generators and Relations for Discrete Groups. Springer-Verlag. New York.

[Le Chenadec, 86]: LE CHENADEC, P. (1986) : “A Catalogue of Complete Group Presentations”, **Journal of Symbolic Computation**. 2, 363-381.

[Mora, 86]: F. MORA (1986): “*Gröbner* Bases for Non-Commutative Polynomial Ring”, **Proc. of AAECC –3** .L.N.C.S. 229, 353-362.

[Mora, 88]: _________ (1987): *Gröbner* Bases and the Word Problem. Preprint. University of Genova.