



Estrategia didáctica para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Teaching strategy for solving second-order ordinary differential equations

Aisseli Comet Marrero^{1*}, Alexia Esther Nardin Anarela², Arnaldo Espindola Artola³, Cila Eduviges Mola Reyes⁴

Resumen Se implementó una estrategia didáctica que combina métodos analíticos, numéricos y aproximativos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, seleccionando el método en función de las características de cada problema (coeficientes constantes, variables o parámetros pequeños). La estrategia se fundamenta en un marco teórico que integra principios matemáticos y didácticos para lograr una comprensión profunda y aplicada. Fue evaluada con 37 estudiantes de Ingeniería Civil, mediante una experiencia pedagógica que también fortaleció la comunicación matemática. Esta se midió con indicadores de precisión terminológica, argumentación y análisis de soluciones. Los resultados mostraron una alta efectividad: el 86,5 % de los estudiantes resolvió correctamente los ejercicios y el 73 % justificó adecuadamente la elección del método. Se concluye que este enfoque combinado, con una evaluación formativa multidimensional, es eficaz para superar dificultades documentadas, promover un aprendizaje significativo y desarrollar habilidades esenciales para la modelación de problemas complejos.

Palabras Clave: ecuaciones diferenciales ordinarias, estrategia didáctica, combinación de métodos, parámetros pequeños, comunicación matemática.

Abstract A didactic strategy was implemented that combines analytical, numerical, and approximate methods to solve second-order ordinary differential equations, selecting the method based on the characteristics of each problem (constant coefficients, variable coefficients, or small parameters). The strategy is based on a theoretical framework that integrates mathematical and didactic principles to achieve a deep and applied understanding. It was evaluated with 37 Civil Engineering students through a pedagogical experience that also strengthened mathematical communication. This was measured using indicators of terminological precision, argumentation, and solution analysis. The results showed high effectiveness: 86.5% of the students solved the exercises correctly and 73% adequately justified their choice of method. It is concluded that this combined approach, with multidimensional formative evaluation, is effective in overcoming documented difficulties, promoting meaningful learning, and developing essential skills for modeling complex problems in applied contexts.

Keywords: ordinary differential equations, teaching strategy, combination of methods, small parameters, mathematical communication.

Mathematics Subject Classification: 34-06, 34A06, 34B08.

¹Departamento Docente, Universidad de Camagüey, Filial Minas, Camagüey, Cuba. Email: acomet96@gmail.com.

²Departamento de Matemática, Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba. Email: alexianardin3@gmail.com.

³Departamento de Calidad, Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba. Email: arnaldo.espindola@reduc.edu.cu.

⁴Departamento de Matemática, Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba. Email: cila.mola@reduc.edu.cu.

*Autor para Correspondencia (*Corresponding author*)

Editado por (*Edited by*): Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

Citar como: Comet Marrero, A., Nardín Anarela A.E. Espíndola Artola, A., & Mola Reyes, C.E. (2025). Estrategia didáctica para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. *Ciencias Matemáticas*, 39(1), 1–9. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17443240>. Recuperado a partir de <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/9637>.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) representan un desafío significativo en la formación matemática a nivel universitario. Esta relevancia se deriva de su amplia aplicabilidad en disciplinas como la ingeniería, la economía, la física, la biología y la medicina, donde modelan fenómenos dinámicos y en permanente transformación. Sin embargo, esta misma versatilidad conlleva una complejidad inherente que a menudo resulta en dificultades de comprensión y aplicación por parte de los estudiantes.

Investigaciones recientes han documentado de manera consistente estas problemáticas. Los trabajos de Báez, Blanco y Heredia [1], Collante [4], Comet, Batard y Mola [7], y Guzmán [10] identifican como principales obstáculos: la identificación y clasificación de los distintos tipos de EDO, el análisis del comportamiento de las funciones solución expresadas de forma implícita, y la ejecución de transformaciones elementales en la ecuación diferencial.

Así mismo Báez, Lalondriz y Blanco [2] señalan que los estudiantes en general no interiorizan el lenguaje matemático como una herramienta fundamental, lo cual tiene sus raíces en una preparación precedente insuficiente. Estas deficiencias se manifiestan en dificultades para plantear la ecuación característica, diferenciar entre constantes, parámetros y variables, seleccionar el método de solución más adecuado y analizar las soluciones particulares [7].

Un estudio realizado por Comet [6] aportó evidencias sobre el origen de estas insuficiencias. La investigación, desarrollada con estudiantes de licenciatura en educación, especialidades de matemática y física, y diversas ingenierías, demostró que el problema reside frecuentemente en el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje. Dicho proceso no logra garantizar un nivel de partida que motive al estudiante. Tampoco consigue estimular la búsqueda de relaciones entre el modelo matemático y el fenómeno modelado. Asimismo, se observa una dificultad para articular métodos algebraicos, gráficos y numéricos que permitan interpretar y justificar adecuadamente las soluciones.

Además, se corroboró que los programas de estudio carecen de orientaciones metodológicas para que el docente aborde la modelación con EDO lineales no homogéneas, particularmente aquellas con parámetros pequeños, o ejercite la identificación de parámetros, constantes y variables [7].

Esta situación conduce a que la planificación docente se estructure más en función de la complejidad del contenido que de las peculiaridades del pensamiento matemático de los estudiantes, lo que justifica la necesidad de profundizar en su análisis. Ante este panorama, investigaciones previas [3, 5] han aportado avances teóricos significativos, especialmente en el estudio de EDO con parámetros pequeños.

No obstante, la introducción y generalización de estas contribuciones en la práctica educativa ha sido limitada. Por lo tanto, este artículo propone una estrategia didáctica basada en la combinación de métodos para la resolución de EDO de segundo orden, teniendo en cuenta las características específicas

de cada problema.

El estudio integra y concreta aportes de varios autores [4, 5, 6, 7, 9, 10] y se ejemplifica mediante una experiencia pedagógica implementada con estudiantes de segundo año de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Camagüey, Cuba. Con ello se aporta un marco estructurado que guía la selección y aplicación coherente de los distintos métodos de solución, superando así el enfoque fragmentado que a menudo dificulta el aprendizaje.

Relevancia del estudio

La investigación aborda una problemática documentada en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de segundo orden, mediante una estrategia didáctica innovadora que combina métodos analíticos, numéricos y aproximativos. La propuesta supera enfoques fragmentados al guiar la selección del método según las características del problema, fomentando un aprendizaje significativo. Su evaluación en 37 estudiantes de Ingeniería Civil demostró alta efectividad (86,5 % de resolución correcta), destacándose además el desarrollo de la comunicación matemática y habilidades metacognitivas esenciales para la modelación en contextos aplicados.

1. Fundamentos teóricos y conceptuales para la enseñanza de las EDO

En la teoría y práctica pedagógica es ampliamente conocido que antes de introducir un nuevo contenido resulta necesario sistematizar los conocimientos previos que son indispensables para su comprensión. Al presentar a los estudiantes los métodos para solucionar EDO de segundo orden estos deben dominar varias definiciones, teoremas, fórmulas, reglas y propiedades que constituyen la base y soporte teórico de esta arista del análisis matemático.

Lograr mejores niveles de aprendizaje requiere, por un lado, de la motivación individual del sujeto por aprender; así como de los vínculos cognitivos, sociales, afectivos, teóricos y aplicativos que el sujeto ha desarrollado con respecto al tema objeto de estudio [8]. Esto significa, prestar atención a aspectos relacionados con la adecuada comprensión del contenido, a partir de: ¿qué se estudia? (componente cognitivo), ¿qué utilidad tiene? (componente social), ¿para qué se estudia? (componente afectivo), ¿qué características tiene el objeto EDO? (componente teórico), ¿cómo podrá ser utilizado? (componente aplicativo).

Por lo tanto, la enseñanza efectiva de las EDO requiere una base conceptual sólida que permita a los estudiantes construir significados profundos y establecer conexiones entre la teoría matemática y sus aplicaciones. Este sustento teórico se articula en torno a dos dimensiones esenciales: el dominio del contenido matemático específico y la comprensión de los principios didácticos que facilitan su apropiación.

1.1 Sustento matemático conceptual

El marco conceptual básico para el trabajo con EDO de segundo orden comprende definiciones fundamentales que establecen la base para su clasificación y resolución. Para ello, se utilizó el libro de Gutiérrez Borda, publicado en el año 2022 [9].

Definición 1 Se llama ecuación diferencial, a una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes respecto de una o más variables independientes.

Definición 2 Se denomina ecuación diferencial ordinaria, a una ecuación diferencial en las que aparecen derivadas ordinarias de una o más variables dependientes respecto a una única variable independiente.

Definición 3 Se denomina orden de una ecuación, al orden de la derivada más alta que aparece en ella.

Ejemplo 1

$$y''' + 4y' = 0, \quad (1)$$

$$x^2 y'' + xy' + 3x = 0. \quad (2)$$

La ecuación (1) es una EDO de tercer orden, mientras que la ecuación (2) es una EDO de segundo orden.

Definición 4 Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n , en la variable dependiente con variable independiente x , es una ecuación $g(x)$ expresada en la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y, \quad (3)$$

donde las funciones $a_i(x) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ son llamadas coeficientes de la ecuación diferencial ordinaria.

- Si $g(x) = 0$, entonces la EDO lineal se dice homogénea.
- Si $g(x) \neq 0$, entonces la EDO lineal se dice no homogénea.
- Si los coeficientes a_i no dependen de x , entonces se dice que la EDO lineal es de coeficientes constantes.
- Si los coeficiente $a_i(x)$ dependen de x , entonces se dice que la EDO lineal es de coeficientes variables.

Al analizar las ecuaciones del **Ejemplo 1** se puede apreciar que la ecuación (1) es una EDO lineal homogénea de coeficientes constantes. Por otro lado, la ecuación (2) se puede transformar de la siguiente forma:

$$x^2 y'' + x' = -3x.$$

Luego, esta es una EDO lineal no homogénea de coeficientes variables.

Definición 5 Si se tiene una EDO homogénea de la forma $ay'' + by' + cy = 0$, si se ensaya una solución de la forma $y = e^{\lambda x}$, entonces $y' = \lambda e^{\lambda x}$ y $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, de modo que la ecuación diferencial se transforma en $e^{\lambda x}[a\lambda^2 + b\lambda + c] = 0$, luego, la ecuación obtenida de la forma:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (4)$$

se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la misma [14].

Definición 6 Dada la ecuación:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^m \epsilon^k a_n + k y^{n+k}(x) = g(x), \quad (5)$$

donde $a_n \neq 0, a_{n+m} \neq 0, \epsilon > 0$ (parámetro pequeño) y $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua o seccionalmente continua y las condiciones iniciales:

$$y^{(k)}(0) = A_k, k = \{0, m + n - 1\}^-, \quad (6)$$

se denomina ecuación complementaria característica a la ecuación:

$$\sum_{k=0}^n a_{n+k} s^k = 0. \quad (7)$$

Se denota como solución al problema (5)-(6) regular, si las partes reales de todas las series (7) son negativas.

Se denomina problema límite al problema:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(x) = g(x), \quad (8)$$

$$y^{(k)}(0) = A - k, k = \{0, m + n - 1\}^-. \quad (9)$$

Batard (1990)[3] demostró que la solución del problema (1)-(2) converge uniformemente a la solución del problema límite (4)-(5), sí y solamente si el problema es regular.

Una vez asegurados los conocimientos previos se pueden introducir los nuevos conocimientos a partir de una categorización, tipificación y selección, permitiendo formar al estudiante desde el punto de vista teórico, adquirir habilidades y destrezas, así como las de carácter investigativo con la finalidad de lograr un nivel de desarrollo comprensivo superior. Se debe hacer un análisis riguroso y selección de aquellas herramientas tecnológicas disponibles que diversifiquen las posibilidades de visualización, dinamismo, interactividad, trabajo colaborativo, modelación y experimentación matemática.

1.2 Sustento didáctico y metacognitivo

Desde la perspectiva didáctica, el aprendizaje de las EDO trasciende la mera aplicación algorítmica de métodos de solución. Implica el desarrollo de un pensamiento matemático flexible que permita la selección estratégica de procedimientos según la naturaleza del problema [7].

La construcción significativa de estos conocimientos requiere atender cinco dimensiones interdependientes en el proceso de enseñanza:

- Componente cognitivo: comprensión profunda de los conceptos, definiciones y procedimientos matemáticos involucrados.
- Componente social: reconocimiento de la utilidad de las EDO para modelar y resolver problemas en contextos disciplinares específicos.
- Componente afectivo: desarrollo de motivación intrínseca y confianza en la capacidad para resolver problemas complejos.
- Componente teórico: comprensión de las características estructurales de los diferentes tipos de EDO y sus métodos de solución.
- Componente aplicativo: capacidad para utilizar los conocimientos en la resolución de problemas auténticos y en la interpretación de los resultados.

La articulación de estas dimensiones facilita la transición desde un aprendizaje instrumental hacia uno relacional. Desde esta perspectiva los estudiantes no solo aplican métodos, sino que comprenden cuándo y por qué son apropiados, estableciendo conexiones entre representaciones algebraicas, gráficas y numéricas.

La integración de herramientas tecnológicas desempeña un papel esencial en este proceso, al diversificar las posibilidades de visualización, dinamismo, interactividad y modelación. Software especializado permite experimentar con parámetros, visualizar campos de direcciones y aproximaciones numéricas, y contrastar soluciones analíticas con métodos numéricos, enriqueciendo significativamente la comprensión conceptual [10].

Este marco teórico integral matemático y didáctico constituye la base para el diseño de la estrategia de combinación de métodos que se presenta en la siguiente sección, orientada a superar las dificultades documentadas en la enseñanza y aprendizaje de las EDO de segundo orden.

2. Estrategia didáctica: selección y combinación de métodos de solución

La implementación efectiva de los fundamentos teóricos descritos requiere de una estrategia didáctica estructurada que guíe a los estudiantes en la selección inteligente y combinación articulada de métodos de resolución. Esta propuesta se organiza según la naturaleza de la EDO de segundo orden, priorizando no solo la obtención de la solución, sino la comprensión del porqué y cuándo aplicar cada técnica, así como la interpretación de los resultados en contextos aplicados.

2.1 Ecuaciones con coeficientes constantes: universalidad y especialización

Para EDO lineales con coeficientes constantes de la forma $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$, se propone una secuencia didáctica que contrasta métodos generales con métodos especializados.

Ejemplo 2: Resolver:

$$y'' - 4y = 20e^{3x}. \quad (10)$$

Solución: Teniendo en cuenta la ecuación característica de la ecuación dada se tiene que: $\lambda^2 - 4 = 0$, las raíces son 2 y -2.

$$\begin{aligned} Y_h &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}, \\ Y_p &= c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{-2x}, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = 4, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 20e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = 20e^x, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 20e^{3x} \end{vmatrix} = 20e^{5x}, \\ c'_1(x) &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, c'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ c_1(x) &= \int \frac{-20e^x}{-4} dx = 5e^x, \\ c_2(x) &= \int \frac{20e^{5x}}{-4} dx = -e^{5x}, \\ Y_p &= 5e^xe^{2x} - e^{5x}e^{-2x}, \end{aligned}$$

donde,

$$Y_p = 4e^{3x}.$$

La solución general es la suma de este resultado con el de las soluciones homogénea y particular. Una vez obtenidas las soluciones homogéneas $Y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ y particular $Y_p = 4e^{3x}$ se obtiene como solución general de la ecuación:

$$Y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + 4e^{3x}.$$

Si el problema a resolver presenta condiciones iniciales, se obtendrá una ecuación cuyos coeficientes c_1 y c_2 se puedan calcular como números reales. Es recomendable que, una vez que el estudiante comprenda la forma general del método el docente le proponga ejercicios con condiciones iniciales, tanto para resolver en clases prácticas como para su estudio individual.

Ejemplo 3: Método de coeficientes indeterminados (eficiente para formas específicas)

Resolver la siguiente ecuación:

$$y'' - 6y' + 9y = 13e^{3x}. \quad (11)$$

La raíz $r = 3$, doble:

$$Y_h = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}.$$

Por lo que, $Y_p = Ae^{3x}$ sería semejante al primer término, $Y_p = Axe^{3x}$ semejante al segundo. Y por eso se plante $Y_p = Ax^2e^{3x}$. En una infografía proporcionada a los estudiantes se comparan estos dos métodos con un mismo ejemplo (Figura 1).

Con el caso de existir condiciones iniciales puede utilizarse el método de transformada de Laplace [13].

$r^2 - 4 = 0$; las raíces son 2 y -2
 $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$
 $y_p = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{-2x}$
 $\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$
 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 20e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -20 e^x$
 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 20e^{3x} \end{vmatrix} = 20 e^{5x}$
EJEMPLO
 Solución: $c'_1(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $c'_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$
 $c_1(x) = \int \frac{-20e^x}{-4} dx = 5e^x$
 $c_2(x) = \int \frac{20e^{5x}}{-4} dx = -e^{5x}$
 $y_p = 5e^x \cdot e^{2x} - e^{5x} \cdot e^{-2x}$;
 De donde $y_p = 4e^{3x}$

Figura 1. Infografía utilizada como medio de enseñanza del Ejemplo 3 [Infographic used as a teaching aid for Example 3].

Si se agrega $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ al Ejemplo 2, $y'' - 4y = 20e^{3x}$, aplicando transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'' - 4y) &= \mathcal{L}(20e^{3x}), \\ s^2 Y(s) - cy'(0) - y(0) &= 4Y(s) = \frac{20}{s-3}, \\ s^2 Y(s) - s - 4Y(s) &= \frac{20}{s-3}, \\ Y(s)(s^2 - 4) &= \frac{20}{s-3} + s, \\ Y(s) &= \frac{20}{(s-3)(s-2)(s+2)} + \frac{s}{(s-2)(s+2)}, \\ Y(s) &= \frac{4}{s-3} + \frac{-4,5}{s-2} + \frac{0,75}{s+2}, \\ y(t) &= 4e^{3t} - 4,5e^{2t} + 0,75e^{-2t}. \end{aligned}$$

De existir la necesidad, se aplica el principio de superposición de las soluciones. Si la ecuación tiene condiciones iniciales y coeficientes variables, se puede emplear método de Cauchy Euler [13, 14] (Figura 2).

2.2 El caso de coeficientes variables: adaptación metodológica

Para EDO de segundo orden con coeficientes variable sencilla se emplea el método de Euler para resolverla como se puede observar en el siguiente ejemplo. Para casos no resolubles analíticamente, se integran métodos numéricos.

EJEMPLO $y'' - 4y = 20e^{3x}$
Solución:
 $r^2 - 4 = 0$; las raíces son 2 y -2
 $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$
Planteamos
 $y_p = Ae^{3x}$ que no tiene con y_h términos semejantes.
 $y_p'' = 3Ae^{3x}$; $y_p' = 9Ae^{3x}$
 Sustituyendo en la ecuación diferencial:
 $9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} = 20e^{3x}$
 $5Ae^{3x} = 20e^{3x}$, por lo que $A=4$.
 Obtenemos $y_p = 4e^{3x}$
EJEMPLO $y'' - 4y = 20e^{3x}$
Solución:
 $r^2 - 4 = 0$; las raíces son 2 y -2
 $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$
 $y_p = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{-2x}$
 $\Delta = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$
 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ 20e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -20 e^x$
 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 20e^{3x} \end{vmatrix} = 20 e^{5x}$
EJEMPLO
 Sol: $c'_1(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $c'_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$
 $c_1(x) = \int \frac{-20e^x}{-4} dx = 5e^x$
 $c_2(x) = \int \frac{20e^{5x}}{-4} dx = -e^{5x}$
 $y_p = 5e^x \cdot e^{2x} - e^{5x} \cdot e^{-2x}$;
 De donde $y_p = 4e^{3x}$

Figura 2. Infografía utilizada como medio de enseñanza [Infographic used as a teaching aid].

Aproximar:

$$y'' - 2y' = 4x, \quad (12)$$

para $x = 0,75$ con $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$; $h = 0,25$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 0, \\ \frac{du}{dx} &= 2u + 4x, \\ y_1 &\approx y_0 + u_0 h, \\ u_1 &= u_0 + (2u_0 + 4x_0)h, \\ y_0 &= 1y_1 \approx 1, 5y_2 \approx 2, 25y_3 \approx 3, 4375, \\ u_0 &= 2u_1 \approx 3u_2 \approx 4, 75, \\ y_1 &\approx 1 + 2(0,25) = 1,5, \\ u_1 &\approx 2 + (2,2 + 4,0)0,25 = 3, \\ y_2 &\approx y_1 + u_1 h = 1,5 + 3(0,25) = 2,25, \\ u_2 &\approx u_1 + (2u_1 + 4x_1)h = 3 + (2,3 + 4(0,23))0,25 = 4,75, \\ y_3 &\approx y_2 + u_2 h = 2,25 + 4,75(0,25) = 3,4375. \end{aligned}$$

2.3 El desafío de los parámetros pequeños: regularidad y estimación del error

En caso que la EDO presente el parámetro pequeño en la derivada de orden superior, como se ha explicado en [7], se debe analizar primeramente si el problema converge al problema límite, para ello es necesario hallar la ecuación complementaria característica con la cual se puede conocer si el problema es regular o no.

Teniendo en cuenta que el problema se llama regular si la solución de la ecuación complementaria característica es negativa. O sea, si $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ ó $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$. La

solución del problema se llama regular si la solución de la ecuación complementaria característica cumple que: $t = -a_1$, $a_2 < 0$.

Entonces, se puede realizar un análisis de la convergencia del problema de Cauchy al problema límite y posteriormente de la solución y la estimación del error, como se plantea en [5]. Téngase en cuenta que para ello se deben utilizar conocimientos anteriormente obtenidos como son la transformada de Laplace y el producto de convolución [13].

La estrategia implica:

- Plantee el problema límite.
- Verificar regularidad mediante la ecuación complementaria característica.

- Resolver el problema completo y el problema límite.
- Cuantificar el error de aproximación.

Ejemplo 4 Análisis de parámetro pequeño.

Considere:

$$\epsilon a_2 \hat{y}''(x) + a_1 \hat{y}'(x) + a_0 \hat{y} = f(x), \quad (13)$$

con las siguientes condiciones iniciales: $\hat{y}_\epsilon(0) = A_0$
 $\hat{y}'_\epsilon(0) = A_1$.

Problema límite:

$$a_1 \hat{y}'(x) + a_0 \hat{y} = f(x). \quad (14)$$

El error cometido tiene la forma:

$$e(\epsilon) \approx \left| \epsilon \left| \frac{a_2(A_1 - Y'_0(0))}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \right| e^{-\frac{a_0}{a_1}} \right| + \left| \frac{\epsilon^2 a_2^2}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \max_{0 <= x <= b} |y''_0(x)| e^{-\frac{a_0}{a_1} b} \right|.$$

Si $-\frac{a_0}{a_1} < 0$:

$$e(\epsilon) \approx \left| \epsilon \left| \frac{a_2(A_1 - Y'_0(0))}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \right| \right| + \left| \frac{\epsilon^2 a_2^2}{\sqrt{a_1^2 - 4\epsilon a_2 a_0}} \max_{0 <= x <= b} |y''_0(x)| \right|, \quad (15)$$

donde $a_i = 0, 1, 2$ son los coeficientes de las derivadas i -ésimas, A_1 es la condición inicial y $Y_0(x)$ es la solución del problema límite, por lo que $Y'_0(0)$; $Y''_0(x)$ son la primera derivada de la solución al problema límite en $x = 0$ y la segunda derivada del problema límite, respectivamente.

Como se explica en [5], el segundo término de la suma en ambas estimaciones del error, son infinitesimales de segundo orden con respecto a ϵ en la práctica el error se puede expresar como el módulo del primer término. En dicha investigación se implementó, para el cálculo del error, un programa en el software libre Python, basado en las ecuaciones obtenidas para la estimación del error.

3. Evaluación del aprendizaje de la resolución de EDO

La evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las EDO trasciende la mera comprobación de resultados numéricos o algebraicos correctos. Debe constituir un proceso integral que valore la capacidad del estudiante para comunicar las ideas matemáticas con precisión, rigor y coherencia, demostrando así una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos [11].

Según el marco de Sobrado, Sarduy y Montes de Oca [12], pero particularizado al contexto específico de la resolución de EDO de segundo orden, se propone el siguiente sistema de

indicadores para evaluar la calidad de la expresión de ideas matemáticas en este dominio.

3.1 Indicadores para la evaluación del aprendizaje de la resolución de EDO de segundo orden

Indicador 1: Precisión en el uso del lenguaje y la simbología matemática.

Este indicador evalúa el uso correcto y consistente de la terminología y notación específica de las EDO.

- Bien: El estudiante diferencia claramente entre constantes, parámetros ϵ y variables; utiliza correctamente la notación de derivadas y' , d^2y/dx^2 , soluciones homogéneas y_h y particulares y_p ; y emplea adecuadamente los operadores diferenciales cuando corresponde.
- Regular: Presenta ocasionalmente confusiones de notación o terminología, como usar incorrectamente “orden” y “grado” o confundir la ecuación característica con la ecuación complementaria característica.
- Mal: La notación es ambigua e incoherente; no distingue entre tipos de soluciones o usa símbolos sin definirlos.

Indicador 2: Argumentación del método seleccionado.

Valora la capacidad de justificar la elección de un método específico basándose en las características de la EDO.

- Bien: Justifica explícitamente por qué elige un método sobre otros (por ejemplo, “Utilizo coeficientes indeterminados porque el término no homogéneo es una función polinómica y no es solución de la homogénea”).

- Regular: Selecciona el método correcto pero ofrece una justificación vaga o insuficiente.
- Mal: Elige un método incorrecto para el tipo de ecuación o no ofrece ninguna razón para su elección.

Indicador 3: Jerarquización y estructuración del proceso de solución.

Evalúa la organización lógica y secuencial del proceso de resolución.

- Bien: Presenta la solución de manera ordenada:
 1. Clasifica la EDO,
 2. Resuelve la homogénea,
 3. Encuentra la solución particular,
 4. Aplica condiciones iniciales, y
 5. Expresa la solución final.
- Regular: Sigue los pasos correctos pero el orden es desorganizado o difícil de seguir.
- Mal: La solución es caótica, con pasos mezclados y sin lógica aparente.

Indicador 4: Concreción en el análisis de la solución y el error.

Valora la capacidad de interpretar los resultados y analizar su validez y precisión.

- Bien: Interpreta la solución en contexto y analiza cuantitativamente el error cuando usa métodos numéricos o aproximaciones con parámetros pequeños.
- Regular: Obtiene la solución correcta pero no la interpreta o no analiza el error más allá de calcularlo.
- Mal: No extrae conclusiones de la solución obtenida o el análisis del error es incorrecto.

4. Fundamentación de la pertinencia de los indicadores

La elección de estos indicadores específicos se fundamenta en las dificultades documentadas en la literatura y corroboradas en esta experiencia pedagógica. La precisión terminológica (Indicador 1) aborda directamente las dificultades reportadas por Comet, Batard y Mola [7] en la diferenciación entre constantes, parámetros y variables. La argumentación metodológica (Indicador 2) responde a la problemática de la selección del método más conveniente identificada por los mismos autores.

La jerarquización del proceso (Indicador 3) enfrenta la dificultad de los estudiantes para seguir procedimientos lógicos y estructurados, mientras que el análisis de la solución y el error (Indicador 4) desarrolla la capacidad crítica necesaria para interpretar resultados y validar soluciones, especialmente necesario cuando se trabajan con aproximaciones numéricas o con parámetros pequeños.

4.1 Implementación evaluativa y resultados

La implementación de esta estrategia con 37 estudiantes de Ingeniería Civil mostró resultados significativos. En una evaluación que requería seleccionar y combinar métodos apropiados:

- 32 estudiantes (86,5 %) resolvieron correctamente las EDO propuestas.
- 27 estudiantes (73,0 %) justificaron adecuadamente su selección metodológica.
- Solo 2 estudiantes (5,4 %) mostraron dificultades significativas.

Un análisis cualitativo reveló que los estudiantes desarrollaron mayor conciencia metacognitiva sobre los criterios de selección de métodos y mostraron capacidad para combinar técnicas analíticas y numéricas según las características del problema.

Esta estrategia didáctica, basada en la combinación articulada de métodos y el análisis crítico de su aplicabilidad, demuestra ser efectiva para superar las dificultades documentadas en el aprendizaje de las EDO de segundo orden. Por otra parte, el sistema de indicadores permitió una evaluación formativa. Por ejemplo, al resolver la EDO $y'' - 4y = 0$:

Un estudiante con evaluación de Bien en todos los indicadores:

- Precisión: Utiliza correctamente: $\lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, distingue coeficientes constantes.
- Argumentación: “Uso coeficientes indeterminados porque $c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{-2x}$, no es solución de la homogénea”.
- Jerarquización: Presenta solución homogénea: $Y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$, luego la solución particular $Y_p = 4e^{3x}$, y la general $Y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + 4e^{3x}$.
- Concreción: Verifica la solución y analiza el comportamiento asintótico.
- Selecciona correctamente coeficientes indeterminados pero justifica: “Porque es más fácil”.
- No demuestra comprensión profunda de cuándo aplicar el método.

Los resultados mostraron que el 78 % de los estudiantes alcanzaron evaluación de Bien en precisión terminológica, mientras que el 62 % lo logró en argumentación metodológica, indicando que esta última área requiere mayor atención didáctica.

4.2 Implicaciones para la práctica docente

Este sistema de indicadores proporciona a los docentes una herramienta para:

1. Diagnosticar dificultades específicas en la comunicación matemática.
2. Diseñar actividades dirigidas al desarrollo de cada aspecto.
3. Evaluar multidimensionalmente el progreso estudiantil.
4. Promover la metacognición sobre el propio proceso de resolución.

La implementación consistente de esta evaluación formativa permite transformar la práctica docente desde un enfoque centrado en resultados hacia uno centrado en procesos, desarrollando no solo habilidades técnicas sino también competencias comunicativas esenciales para la formación matemática de calidad.

Conclusiones

El desarrollo de esta investigación permite establecer las siguientes conclusiones fundamentales. La combinación estratégica de métodos de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden constituye un enfoque didáctico efectivo que amplía la cultura matemática del estudiante y perfecciona su capacidad para abordar problemas complejos en contextos aplicados. La articulación de métodos analíticos, numéricos y aproximativos proporciona una visión integral que supera las limitaciones de los enfoques fragmentados tradicionales.

La implementación de la estrategia didáctica propuesta, basada en la selección crítica de métodos según las características de la EDO, demostró su eficacia en el contexto experimental con estudiantes de Ingeniería Civil. Los resultados evidenciaron una mejora significativa en la capacidad de los estudiantes para: identificar el método más adecuado, justificar su selección y combinar diferentes métodos cuando la situación problemática lo requiera.

El sistema de indicadores de comunicación matemática particularizado para el contexto de resolución de EDO resultó ser una herramienta valiosa para la evaluación formativa. Los cuatro indicadores propuestos (precisión terminológica, argumentación metodológica, jerarquización del proceso y análisis de soluciones) permitieron evaluar dimensiones del aprendizaje tradicionalmente omitidas en la evaluación convencional, proporcionando una visión más comprehensiva del desarrollo de competencias matemáticas.

El abordaje de EDO con parámetros pequeños mediante el análisis de regularidad y estimación del error constituye un aporte significativo para la comprensión de problemas singulares de pertinencia en aplicaciones ingenieriles. La metodología que incluye: planteamiento del problema límite, verificación de regularidad a través de la ecuación complementaria característica, y cuantificación del error, provee a los estudiantes de herramientas para evaluar críticamente aproximaciones en contextos de modelación.

La integración de herramientas tecnológicas para visualización, cálculo numérico y análisis de error se reveló como

un componente esencial de la estrategia didáctica, facilitando la comprensión conceptual y permitiendo abordar problemas que exceden las posibilidades de los métodos puramente analíticos.

Como perspectivas de desarrollo futuro, se identifican: la extensión de esta estrategia didáctica a sistemas de ecuaciones diferenciales, el desarrollo de materiales didácticos específicos para el trabajo con parámetros pequeños, y la profundización en el análisis de los procesos metacognitivos que subyacen a la selección estratégica de métodos de solución. Esta investigación contribuye así a cerrar la brecha entre el conocimiento teórico y la aplicación efectiva en la resolución de problemas.

Suplementos

Este artículo no cuenta con información suplementaria.

Conflictos de interés

Se declara que no existen conflictos de interés.

Contribución de autoría

Conceptualización A.C.M., A.N.A.E., A.E.A.

Curación de datos A.C.M., A.N.A.E.

Análisis formal C.E.M.R.

Investigación A.C.M., A.N.A.E.

Metodología A.E.A.

Supervisión C.E.M.R.

Redacción: preparación del borrador original A.C.M.

Redacción: revisión y edición A.C.M., A.N.A.E., A.E.A., C.E.M.R.

Referencias

- [1] Báez, N., L.M. Blanco y W. Heredia: *Los problemas de optimización en el cálculo diferencial de una variable*. Transformación, 18(2):317–335, 2022, ISSN 2077-2955. http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S2077-29552022000200317&script=sci_arttext.
- [2] Báez, N., M. Lalondriz, and R. Blanco: *From process to concept, exemplified in the functional limit*. The Educational Review, 7(2):121–130, 2023. <https://www.hillpublisher.com/ArticleDetails/1427>.
- [3] Batard, L.F.: *Análisis de la convergencia de las Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, lineales y no homoéneas con parámetro pequeño*. Ciencias Matemáticas, 11(2), 1990.

- [4] Collante, A.: *Un estudio de la Ecuación Diferencial Ordinaria con estudiantes de Ingeniería Mecánica mediante una situación problema*. Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, 2019. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/14520>.
- [5] Comet, A.: *Estimación del error cometido en la simplificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de segundo y tercer orden*. Informe técnico, Universidad Central de las Villas Martha Abreu, Santa Clara, Cuba, 2018.
- [6] Comet, A.: *Estructuración del PEA de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con parámetro pequeño*. Tesis de maestría, Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba, 2022.
- [7] Comet, A., L.F. Batard y C. Mola: *Alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con parámetro pequeño*. Paradigma, 44(1):527–551, 2023. <https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1307>.
- [8] Espindola, A., C.M. Marín y C. Mola: *Dedicación al estudio en jóvenes universitarios: Responsabilidad compartida entre docentes y estudiantes*. REFCaLE: Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa, 8(2):234–247, 2020. <https://refcale.uileam.edu.ec/index.php/refcale/article/view/3237>.
- [9] Gutiérrez, A.E.: *Ecuaciones diferenciales ordinarias aplicadas I*. Editorial Idicap Pacífico, 2022. <https://idicap.com/ojs/index.php/editorialeip/article/view/99/120>.
- [10] Guzmán, P.L.: *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros*. Tesis de maestría, Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México, 2016.
- [11] Sobrado, E. y A. Sarduy, D. Espindola: *Estrategia didáctica para mejorar la calidad de la comunicación en matemática*. Transformación, 14(2):272–285, 2018. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-29552018000200012.
- [12] Sobrado, E., D. Sarduy y N. Montes de Oca: *Evaluación de la expresión del profesor en formación al comunicarse en matemática*. Transformación, 12(1):101–111, 2016. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-29552018000200012.
- [13] Vergel, M., O.L. Rincón y E. Ibargüen: *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Editorial Universidad de Nariño, 2022. <https://sired.udenar.edu.co/7344/1/Ecuaciones%20diferenciales.pdf>.
- [14] Zill, D.: *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. Editorial Brooks/Cole Publishing, 6ª edición, 2006. <https://share.google/UJPyUt4iFSjaN6kA3>.

