Acotación uniforme. Estabilidad y estabilidad uniforme de las soluciones de un sistema íntegro-diferencial tipo Volterra

José R. Velázquez Codina (velazquez@facinf.uho.edu.cu)
Universidad de Holguín, Cuba

Resumen

En este trabajo se obtienen condiciones suficientes para garantizar la acotación uniforme, de las soluciones de un sistema íntegro-diferencial tipo Volterra, así como para la estabilidad y la estabilidad uniforme de la solución nula del correspondiente sistema no perturbado. Se usa como método de trabajo, la construcción de Funcionales de Liapunov.

Abstract

In this paper enough conditions are obtained to guarantee that all the solutions of an integro-differential system of Volterra type are uniform bounded, and the zero solution of unperturbed system is stable, and uniformly stable. It is used as working method, the construction of Functional of Liapunov.

1. Introducción

Una de las técnicas de trabajo que se emplean para el estudio de diversas propiedades cualitativas de las soluciones de ecuaciones y sistemas integrales e íntegro-diferenciales tipo Volterra se fundamenta en los resultados dados por W. E. Mahfoud en [6], los que se obtienen con el apoyo de la solución de un sistema lineal auxiliar y la construcción de una adecuada Funcional de Liapunov.

En ese trabajo, se consideran los sistemas íntegro-diferenciales:

$$x'(x) = A(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)\,ds + F(t), \tag{I}$$

$$y'(t) = A(t)y(t) + \int_0^t B(t,s)y(s)\,ds, \tag{II}$$

donde $A(t)$ y $B(t,s)$ son matrices cuadradas de orden n continuas, $n \geq 1$, $0 \leq s \leq t <+\infty$ y $f\colon [0,+\infty[\to \mathbf{R}^n$, es continua. Se obtienen condiciones suficientes para que las soluciones del sistema perturbado sean uniformemente acotadas y la solución nula del sistema no perturbado sea uniformemente estable, o que posean otras propiedades cualitativas.

En [7], con la construcción de adecuadas Funcionales de Liapunov, se obtuvieron resultados referidos a la acotación uniforme de las soluciones del sistema (I), así como para la estabilidad y la estabilidad uniforme de la solución nula del sistema (II), y la pertenencia de estas soluciones a $L^1[0,+\infty[$. Para ello se introdujo una función $P(t)$ que es una matriz cuadrada de orden $n \geq 1$ derivable, acotada y no singular. Se utilizó la misma ecuación lineal auxiliar que la dada en [6], pero se cambió la condición $Y(s) = I$, por $P(s).Y(s) = I$. En el presente trabajo, se cambia la ecuación lineal auxiliar y la condición Y(s) = I, por $P(s).Y(s) = I$.

2. Resultados

Sean $E(t)$ y $L(t,s)$ matrices cuadradas de orden $n \geq 1$, continuas $0 \leq s \leq t <+\infty$.

Considérense la ecuación auxiliar

$$Y'(t) = \left[\frac{P'(t)}{P(t)} + E(t)\right] Y(t), \tag{1}$$

donde $1 \le |P(t)| \le P. \quad P(s).Y(s) = I$

y $M(t,s)$ que es una matriz cuadrada de orden $n \ge 1$, que satisface la condición

$$\frac{\partial M(t,s)}{\partial t} = \left[\frac{2P'(t)}{P(t)} + E(t)\right] M(t,s) + L(t,s) \tag{2}$$

Si $Z(t,s)$ es la solución de la ecuación (1), entonces es inmediato que

$$M(t,s) = P(t)\left[Z(t,s)M(s,s) + \int_s^t Z(t,u)L(u,s)\,du\right] \tag{3}$$

En efecto, para ello basta derivar la igualdad (3) respecto a sustituir en la misma a (1) y comparar la expresión obtenida, con la igualdad (2).

Sea $M(s,s) = A(s) - \left[\frac{2P'(s)}{P(t)} + E(s)\right]$ (4)

$$\text{y} \quad V(t,x(.)) = \frac{x(t) - \int_0^t M(t,s)x(s)\,ds}{P(t)} \tag{5}$$

La derivada respecto a t de $V(t,x(\,.\,))$ a lo largo de una solución $x(t) = x(t,t_0,\phi)$ del sistema (I) se expresa como:

$$V(t,x(.)) = \frac{P'(t)}{P(t)}\left[x(t) - \int_0^t M(t,s)x(s)\,ds\right] +$$
$$+\frac{1}{P(t)}\left[x'(t) - \int_0^t \frac{\partial M(t,s)}{\partial t}x(s)\,ds - M(t,t)x(t)\right]$$

Nótese que al sustituir el sistema (I), (2) y (1) en la última expresión, esta se transforma en

$$V'(t,x(.)) = \left[\frac{P'(t)}{P(t)} + E(t)\right]V(t,x(.)) + \tag{6}$$
$$+\frac{\int_0^t [B(t,s) - L(t,s)]}{P(t)}x(s)\,ds + \frac{f(t)}{P(t)}$$

Por consiguiente,

$$V(t,x(.)) = Z(t,t_0)V(t_0,\phi) + \int_{t_0}^t Z(t,u)g(u,x(.))\,du \tag{7}$$

donde

$$g(t,x(.)) = \frac{\int_0^t [B(t,x) - L(t,s)]}{P(t)}x(s)\,ds + \frac{f(t)}{P(t)}$$

Teorema 1

Sea Z(t,s) solución de la ecuación (1). Supóngase que existen constantes positivas K_1, K_2, y K_3 de manera que se cumplen las condiciones:

(a) $|Z(t,t_0)| < K_1$

$$(b) \quad |P(t)|\int_0^t \left| Z(t,s)\left\{A(s) - \left[\frac{2P'(s)}{P(s)} + E(s)\right]\right\} + \int_s^t Z(t,u)B(u,s)\,du \right| ds \le K_2 < K_1$$

$$(c) \quad \left|\int_{t_0}^t \frac{Z(t,u)f(u)}{P(u)}du\right| \le K_3$$

Entonces todas las soluciones del sistema (I), son **uniformemente acotadas** y la solución nula del sistema (II), es **uniformemente estable**.

Demostración

Sea $L(t,s) = B(t,s)$, entonces de (3), (4) y de (b) resulta que

$$\int_0^t |M(t,s)|ds \le K_2 < K_1$$

Además, (7) permite escribir,

$$|V(t,x(.))| \le |Z(t,t_0)\|V(t0,\phi)| + \tag{8}$$
$$+\left|\int_{t0}^t Z(t,u)g(u,x(.))\,du\right|$$

como $L(t,s) = B(t,s)$ evidentemente

$$g(t,x(.)) = \frac{f(t)}{P(t)} \tag{9}$$

Por otra parte, de (5) se infiere que

$$|v(t0,\phi)| \le \frac{|\phi(t)| + \int_0^t |M(t,s)\|\phi(s)|ds}{|P(t_0)|}$$

Dado que $|P(t_0)| \ge 1$ entonces,

$$|V(t_0,\phi)| \le (1 + K_2)\|\phi\| \tag{10}$$

Aplicándose (a), (c), (8), (9) y (10) se obtiene finalmente la estimación

$$|V(t,x(.))| \le 4, \text{ donde } K_4 = \frac{K_1(1+K_2).\|\phi\|}{P(t_0)} + K_3,\ K_4 \in \mathbf{R}_+^*$$

Obsérvese que

$$\frac{|x(t)| - \int_0^t |M(t,s)\|x(s)|ds}{|P(t)|} \le |V(t,x(.))| \le K_4$$

y como $|P(t)| \le P$, se tiene que

$$|x(t)|-\int_0^t|M(t,s)||x(s)|ds\le K_4|P(t)|\le PK_4=K \tag{11}$$

donde $K\in\mathbf{R}_+^*$

Ahora, o existe una constante $B_2>0$ tal que $|x(t)|<B_2$, para todo $t\ge t_0$ y esto significa que las soluciones del sistema (I) son **uniformemente acotadas**, o existe una sucesión monótona $\{t_n\}\to+\infty$, tal que:

y $|x(t_n)|=\max\limits_{0\le t\le t_n}|x(t)|$ y $|x(t_n)|\longrightarrow+\infty$, cuando $t_n\longrightarrow+\infty$.

Supóngase que se cumple esta última condición. Entonces, al relacionar la premisa (b) con la desigualdad (11) resulta que:

$$|x(t_n)|-|x(t_n)|K_2\le|x(t_n)|-|x(t_n)|\left|\int_0^{t_n}|M(t_n,s)|ds\right.$$

Es decir,

$$|x(t_n)|(1-K_2)\le|x(t_n)|-\int_0^{tn}|M(t_n,s)||x(s)|ds\le K$$

que es una contradicción, pues de acuerdo con lo supuesto, debe ocurrir que $|x(t_n)|(1-K_2)\longrightarrow+\infty$, cuando $t_n\longrightarrow+\infty$.

De esta forma se ha demostrado la **acotación uniforme** de las soluciones del sistema (I).

Además la solución nula del sistema (II), es **uniformemente estable.**

En efecto, considérese $V(t,y(.))s$ de la forma siguiente:

$$V(t,y(.))=\frac{y(t)-\int_0^t M(t,s)y(s)ds}{P(t)} \tag{5*}$$

donde $y(t)$ es solución del sistema no perturbado (II).

Realizándose un trabajo similar al efectuado desde (5) hasta (10) y teniéndose en cuenta que para el sistema (II), $f(t)=0$, se obtiene la estimación:

$$|V(t,y(.))|\le|Z(t,t_0)|.|V(t_0,\phi)|\le|Z(t,t_0)|\|\phi\|[1+K_2]$$

Sea $\varepsilon>0$ cualquiera,

$$\delta=\delta(\varepsilon)<\frac{(1-K_2)}{K_1(1+K_2)P}\varepsilon \text{ y } \|\phi\|_{t_0}<\delta(\varepsilon)$$

Supóngase que existe $t_1>t_0$ tal que $|y(t_1)|=\varepsilon$ y en $|y(t)|<\varepsilon$.

De la igualdad (5*) se obtiene que:

$$|Y(t)|\le|P(t)||V(t,Y(.))|+\int_0^t|M(t,s)||Y(s)|ds$$

para todo $t\in[t_0,t_1]$.

Dado que $f(t)=0$ entonces (8) se transforma en

$$|V(t,x(.))|\le|Z(t,t_0)|.|V(t_0,\phi)|$$

y por la condición (a) y (10) resulta que

$$|V(t,x(.))|\le K_1\|\phi\|[1+K_2]$$

Luego,

$$|Y(t)|<PK_1(1+K_2)\frac{(1-K_2)}{K_1(1+K_2)P}\varepsilon+K_2\varepsilon=\varepsilon$$

Es decir, $|y(t_1)|<\varepsilon$ lo que es una contradicción con lo supuesto.

En esta última parte se ha probado la **estabilidad** de la solución nula del sistema (II) y como δ es independiente de t_0, entonces la misma es **uniformemente estable**.

Del teorema precedente se obtiene el siguiente corolario.

Corolario

Si $n=1$, C, J y M son constantes positivas, tales que:

$$(i)\ \ |P(t)|\int_0^t\left|\begin{matrix}\left[A(s)-\dfrac{P'(s)}{P(s)}+C\right]\exp[-C(t-s)]+\\ +\displaystyle\int_s^t\exp[-C(t-u)]B(u,s)du\end{matrix}\right|ds\le J<1$$

$$(ii)\left|\int_0^t\frac{\exp[-C(t-u)]}{P(u)}f(u)du\right|\le M$$

Entonces, las soluciones del sistema (I) son **uniformemente acotadas**.

Demostración

Sea $\dfrac{P'(t)}{P(t)}+E(t)=-C$ luego la solución de la ecuación (1) se expresa como:

$$Z(t,s)=\exp[-C(t-s)]\text{, por lo tanto}$$
$$|Z(t,s)|=|\exp[-C(t-s)]|\le K_1,\ K_1\in\mathbf{R}_+^* \tag{12}$$

Lo anteriormente señalado, posibilita escribir la condición *(i)* de la forma siguiente:

$$|P(t)|\int_0^t\left|\begin{matrix}\left[A(s)-\dfrac{P'(s)}{P(s)}+C\right]\exp[-C(t-s)]+\\ +\displaystyle\int_s^t\exp[-C(t-u)]B(u,s)du\end{matrix}\right|ds=$$

$$=|P(t)|\int_0^t\left|\begin{matrix}\left\{A(s)-\left[\dfrac{2P'(s)}{P(s)}+E(s)\right]\right\}\exp[-C(t-s)]+\\ +\displaystyle\int_s^t\exp[-C(t-u)]B(u,s)du\end{matrix}\right|ds= \tag{13}$$

$$=|P(t)|\int_0^t\left|\begin{matrix}Z(t,s)\left\{A(s)-\left[\dfrac{2P'(s)}{P(s)}+E(s)\right]\right\}+\\ +\displaystyle\int_0^t Z(t,u)B(u,s)du\end{matrix}\right|ds\le J<1$$

Sin dificultad, con el uso de la premisa *(ii)* se llega a:

$$\left|\int_0^t\frac{Z(t,u)f(u)}{P(u)}du\right|\le 2M \tag{14}$$

Obsérvese que (12), (13) y (14) son las mismas que las premisas del **Teorema 1**.

Este resultado es una generalización respecto al corolario dado en [6], como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación escalar

$$x'(t) = A(t)x(t) - \frac{\beta^2}{4}\int_0^t \exp[-\beta(t-s)]\psi(t,s)\,ds + f(t)$$

donde A, f, ψ son funciones continuas,

$$|f(s)| \le k\exp\left(\frac{\beta}{2}-\gamma\right)(t-s),\ k\in\mathbf{R}_+,\ 0<\alpha\le\psi(t,s)\le 1$$

es una función no nula, derivable y tal que

$$1 \le P(t) \le \frac{\beta}{2}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right),\ 0\le A(t)-\frac{P'(t)}{P(t)}\le 1,\ 0<\gamma<\frac{\beta}{2}$$

Se muestra primeramente, que se satisfacen las premisas del corolario y por tanto, que las soluciones de dicha ecuación, son **uniformemente acotadas.**

Sea $C=\frac{\beta}{2}$, entonces de (1) se obtiene que

$$Z(t,s) = \exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-s)\right].$$

La expresión

$$\left[A(s)-\frac{P'(s)}{P(s)}+C\right]\exp[-C(t-s)] + \int_s^t \exp[-C(t-u)]B(u,s)\,du$$

es positiva.

En efecto

$$\left[A(s)-\frac{P'(s)}{P(s)}+C\right]\exp[-C(t-s)]+$$
$$+\int_s^t \exp[-C(t-s)]B(u,s)\,du =$$
$$=\left[A(s)-\frac{P'(s)}{P(s)}+\frac{\beta}{2}\right]\exp[-C(t-s)]\exp$$
$$\exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-s)\right]-\frac{\beta^2}{4}\int_0^t \psi(u,s)\exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-u)\right]\exp \qquad (*)$$
$$\exp[-\beta(u-s)]ds \ge \frac{\beta}{2}\exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-s)\right]-$$
$$-\frac{\beta^2}{4}\exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-s)\right]\int_s^t \exp\left[-\frac{\beta}{2}(u-s)\right]du =$$
$$=\frac{\beta}{2}\exp[-\beta(t-s)] > 0$$

Además,

$$\left[A(s)-\frac{P'(s)}{P(s)}+C\right]\exp[-C(t-s)]+$$
$$+\int_s^t \exp[-C(t-s)]B(u,s)\,du =$$
$$=\exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-s)\right]\left[\begin{matrix}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\alpha\beta}{2}\exp \\ \exp\left(\frac{\beta}{2}s\right)\left(\begin{matrix}\exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)- \\ -\exp\left(-\frac{\beta}{2}s\right)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right] = \qquad (**)$$
$$=\exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-s)\right]\left[\begin{matrix}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\alpha\beta}{2}\exp \\ \exp\left(-\frac{\beta}{2}(t-s)\right)-\frac{\alpha\beta}{2}\end{matrix}\right]$$

Teniendo en cuenta (*) y (**), es posible escribir

$$|P(t)|\int_0^t\left|\begin{matrix}\left[A(s)-\frac{P'(s)}{P(s)}+C\right]\exp[-(t-s)]+ \\ +\int_s^t \exp[-C(t-u)]B(u,s)\,du\end{matrix}\right|ds \le$$
$$\le \frac{\beta(\alpha+2)}{2(\beta+2)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\beta}{2}(t-s)\right]\left|\begin{matrix}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)+ \\ +\frac{\alpha\beta}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2}(t-s)\right)- \\ -\frac{\alpha\beta}{2}\end{matrix}\right|ds =$$
$$=\frac{\beta(\alpha+2)}{2(\beta+2)}\left\{\begin{matrix}\left(\frac{2}{\beta}+1-\alpha\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\beta}{2}t\right)\right]+ \\ +\frac{\alpha}{2}[1-\exp(-\beta t)]\end{matrix}\right\} \le$$
$$\le \frac{\beta(\alpha+2)}{2(\beta+2)}\left(\frac{2}{\beta}-\frac{\alpha}{2}+1\right) < 1$$

Lo que es evidente, pues de (*) y (**) se infiere que $\left(\frac{2}{\beta}-\frac{\alpha}{2}+1\right)>0$ ya que $\frac{\beta}{2}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)>0$ pero $\alpha\beta>4$, que es consecuencia de la relación $\frac{\beta}{2}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)>1$

Es fácil comprobar que

$$\left(\frac{2}{\beta}-\frac{\alpha}{2}+1\right)+\frac{\alpha(\alpha\beta-4)}{2\beta(\alpha+2)} = \frac{2}{\beta}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)$$

y como $\frac{\alpha(\alpha\beta-4)}{2\beta(\alpha+2)}>0$

resulta que

$$0<\frac{2}{\beta}-\frac{\alpha}{2}+1<\frac{2}{\beta}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)$$

como se quería.

Por otro lado, del hecho que

$$1\le P(t)\le\frac{\beta}{2}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)$$

y que

$$\left|\int_0^t \exp[-C(t-u)]f(u)\,du\right| \le M$$

se infiere la estimación

$$\left|\int_0^t \frac{\exp[-C(t-u)]}{P(u)}f(u)\,du\right| \le M$$

Por tanto, se satisface la otra premisa del corolario y con ello se garantiza que las soluciones de esta ecuación, sean **uniformemente acotadas**. Sin embargo, bajo la condición de que $A(t) \ge \frac{\alpha\beta}{4}$ no es aplicable el corolario dado en [6].

Teorema 2

Si $\frac{P'(t)}{P(t)} + E(t) = C$, C es una matriz constante y estable y J una constante positiva tal que:

$$(a)\ |P(t)|\int_t^{+\infty}\left|\begin{matrix} Z(u-t)\left[A(t)-\frac{P'(t)}{P(t)}-C\right]+ \\ +\int_t^u Z(u-s)B(s,t)\,ds\end{matrix}\right|du \le J < 1$$

Entonces, para toda solución *y(t)* del sistema (II), se cumple que $y(t) \in L^1[0,+\infty[$

Demostración

Sea $C(t) = C$ una matriz constante y estable, D la única matriz simétrica, definida positiva, que satisface la condición $C^T D + DC = -I$, C^T es la matriz transpuesta de C, I es la matriz idéntica de orden $n \ge 1$, α^2 y β^2 el menor y mayor valor propio de D respectivamente, entonces se cumple que (Ver (20) de [6]):

$\alpha^2|z|^2 \le z^T Dz \le \beta^2|z|^2$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$.

Sea $W(t,y(.)) = [V^T DV]^{\frac{1}{2}} + \phi(t,y(.))$ donde:

$$\phi(t,y(.)) = \int_0^t \left\{\int_t^{+\infty}\frac{1}{|P(u)|}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2\beta}|M(u,s)|+ \\ +\frac{1}{\alpha}|D[B(u,s)-L(u,s)]|\end{matrix}\right\}du|y(s)|\right\}ds$$

La derivada de $W(t,y(.))$ respecto a una solución $y(t) = y(t,t_0,\phi)$ del sistema (II) es

$$W'(t,x(.)) \le \frac{|y(t)|}{2\beta|P(t)|} + \\ +\frac{1}{|P(t)|}\int_0^t\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2\beta}|M(t,s)|+ \\ +\frac{1}{\alpha}|D[B(t,s)-L(t,s)]|\end{matrix}\right\} \\ |y(s)|ds + \phi'(t,y(.)) \tag{15}$$

Aquí,

$$\phi'(t,y(.)) = \int_t^{+\infty}\frac{1}{|P(u)|}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2\beta}|M(t,s)|+ \\ +\frac{1}{\alpha}|D[B(u,t)-L(u,t)]|\end{matrix}\right\} \\ du|y(t)| - \frac{1}{|P(u)|}\int_0^t\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2\beta}|M(u,s)|+\frac{1}{\alpha} \\ |D[B(t,s)-L(t,s)]|\end{matrix}\right\}|y(s)|ds \tag{16}$$

Si se escoge $L(t,s) = B(t,s)$ y se sustituye además (16) en (15), se obtiene:

$$W'(t,y(.)) \le \frac{|y(t)|}{2\beta|P(t)|}\int_t^{+\infty}\frac{1}{|P(u)|}\left\{\frac{1}{2\beta}|M(u,t)|\right\}du|y(s)|$$

Por otra parte, las relaciones (3), (4) y $\frac{P'(t)}{P(t)} + E(t) = C$, convierten la desigualdad anterior en:

$$W'(t,y(.)) \le \frac{1}{2\beta|P(t)|} \\ \left\{-1+|P(t)|\left[\int_t^{+\infty}\left|\begin{matrix}Z(u-t)\left[A(t)-\frac{P'(t)}{P(t)}-C\right]+ \\ +\int_t^u Z(u-s)L(s,t)\,ds\end{matrix}\right|du\right]\right\}|y(t)|$$

Al usar (a) y tener en cuenta que $1 \le |P(t)| \le P$, de la desigualdad precedente, se llega a la acotación

$$W'(t,x(.)) \le \frac{(J-1)|y(t)|}{2\beta|P(t)|} \le \frac{(J-1)|y(t)|}{2\beta\ P} < 0$$

para todo $t \ge t_0$.

Integrándose desde t_0 hasta t ambos miembros de esta última desigualdad, se obtiene:

$$0 \le W(t,y(.)) \le W(t_0,\phi) + \frac{(J-1)}{2\beta\ P}\int_{t_0}^t |y(s)|ds$$

pues *W(t,x(.))* es definida positiva. De esta forma se concluye que $y(t) \in L^1[0,+\infty[$.

Teorema 3

Sea $A(t) - \frac{P'(t)}{P(t)} = R$, R es una matriz constante y estable, D, α^2 y β^2 son como antes y existe una constante positiva N tal que:

$$\int_t^{+\infty}|DP(u)B(u,t)|du \le N < \frac{\alpha}{2\beta} \tag{17}$$

Entonces, para toda solución *y(t)* del sistema (II) se cumple que: $y(t) \in L^1[0,+\infty[$ y la solución nula de dicho sistema, es **estable**.

Demostración

Al sustituir (16) en (15) se obtiene:

$$W'(t,y(.)) \leq -\frac{|y(t)|}{2\beta|P(t)|} + + \int_t^{+\infty} \frac{1}{|P(u)|} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\beta}|M(u,t)| + \\ + \frac{1}{\alpha}|D[B(u,t) - L(u,t)]| \end{array} \right\} du |y(t)| \quad (18)$$

Sean $C = R$ y $L(t,s) \equiv 0$ entonces de (4) y (5) resulta que $M(t,s) \equiv 0$ por lo que (18) se transforma en

$$W'(t,y(.)) \leq -\frac{|x(t)|}{2\beta P} + \frac{1}{\alpha}\int_t^{+\infty} |DB(u,t)| du |y(t)| \quad (19)$$

En consecuencia, al tener en cuenta (17) y (19), es inmediato que:

$$W'(t,y(.)) \leq \left(-\frac{1}{2\beta\, P} + \frac{N}{\alpha}\right)|y(t)| < 0$$

y como $W(t,y(.))$ es definida positiva, es válida la tesis del teorema.

Referencias bibliográficas

[1] GRIMMER, R y G. SEIFERT. Stability properties of Volterra integrodifferential equations, J. Differential Equations 19 (1975) 142 – 166.

[2] BURTON, T. A., Perturbed Volterra Equations. J. Differential Equations 43 (1982) 168 – 183.

[3] HALLE, J.K. Ordinary differential equations, Wiley, New York (1969).

[4] HALLE, J.K. Construction of Liapunov Functionals for Volterra equations, J. Math., Analysis Applic 85 (1982) 90-105.

[5] HALLE, J.K. Examples of Lyapunov functionals for non-differentiated equations, Proccedings of the First World Congress of Nonlinear Analysis. Tampa, Florida, August 19-26, (1992) 1203-1214.

[6] MAHFOUD, W.E. Boundedness properties in Volterra integro-differential systems, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987) 37-45.

[7] NÁPOLES, J.E. y J.R.VELÁZQUEZ, Generalizaciones de un resultado de Mahfoud sobre el comportamiento cualitativo de un Sistema Integro-Diferencial de tipo Volterra. Comunicaciones Científicas y Tecnológicas 1998, Universidad Nacional del Noreste, Argentina, Tomo IV, No 8 (1998) 17 -20.

[8] VELÁZQUEZ J. R, Sobre el Comportamiento Cualitativo de ciertos Sistemas Integrodiferenciales tipo Volterra". Revista Ciencias Matemáticas, U. H. Cuba, Vol. 20, No.1 (2002) (22-33).

[9] VELÁZQUEZ J. R, (2005) Algunos tipos de Estabilidad con el empleo de la Fórmula de Variación de los Parámetros".Boletín de la Sociedad Nacional de Matemática-Computación. COMPUMAT 2005 Volumen 3 y No 1 del 2005) ISSN: 17286042.

[10] VELÁZQUEZ J.R, (2007) Acotación y Estabilidad de las soluciones en un sistema de Ecuaciones integrodiferenciales (X Congreso Nacional de Matemática y Computación. Holguín 2007).