Generalizaciones y caracterizaciones del concepto de métrica

Otilio Mederos Anoceto
(Universidad Autónoma de Coahuila, México) /
Rita Roldán Inguanzo
(Universidad de La Habana, Cuba)

Resumen: en el trabajo se proponen dos conjuntos de tareas didácticas necesarias, a juicio de los autores, para que los estudiantes participen en el aprendizaje de los conceptos de caracterización y generalización conceptual, respectivamente. Se construyen catorce caracterizaciones y cuatro generalizaciones (pseudométrica, semimétrica, quasimétrica y métrica sin identidad) del concepto de métrica. Se construyen, además, colecciones de elementos de las extensiones del concepto de métrica y de cada una de las generalizaciones, que se utilizan para probar que si la cardinalidad [M] del conjunto M, sobre el que están definidos los conceptos de métricas y sus generalizaciones, es finita (resp. infinita) entonces sus cardinalidades son 2[M] (resp. ℵ).

INTRODUCCIÓN

En nuestra práctica docente de pregrado y de posgrado, hemos observado que los estudiantes no saben aplicar correctamente las operaciones conceptuales, entre otras, la definición, la generalización y la clasificación. Hemos comprobado que no conocen estas operaciones porque en ninguna asignatura del currículo se definen ni se presentan tareas necesarias para su comprensión. Artículos sobre las operaciones de clasificación y generalización, relacionados con este trabajo, pueden verse en[Med1988, Med1997, Med2007, Med2009].

También hemos comprobado en nuestra práctica docente, que muchos de los estudiantes de carreras de matemáticas, al llegar a los años superiores no han adquirido el concepto de caracterización conceptual, ni han resuelto tareas preparadas para su comprensión.

Los objetivos de este trabajo son: 1. Presentar una definición de la operación generalización de conceptos y un conjunto de tareas necesarias para organizar y facilitar la participación de los alumnos en los procesos de generalización conceptual. 2. Mostrar cómo pueden aplicarse las tareas para realizar generalizaciones del concepto de métrica. 3. Presentar una definición de caracterización de un concepto y un conjunto de tareas, para que los estudiantes participen en la formación y desarrollo de este concepto. 4. Mostrar cómo pueden aplicarse las tareas para realizar caracterizaciones del concepto de métrica.

En la sección 1 se hacen algunas precisiones sobre los conceptos de definición científica y de concepto, necesarios para el desarrollo del trabajo. En el epígrafe 2.1 de la sección 2 se presenta la definición del concepto de caracterización conceptual que se utiliza en el trabajo, y en el epígrafe 2.2 se proponen seis tareas necesarias para que los estudiantes participen en el proceso de formación del concepto de caracterización conceptual.

En el epígrafe 3.1 presentamos una definición de la operación generalización de conceptos y en el epígrafe 3.2 se proponen ocho tareas necesarias para que los estudiantes participen en el proceso de generalización conceptual. Algunas de estas tareas fueron aplicadas con éxito a un grupo de seis estudiantes que participaron en el proceso de generalización del concepto de derivada[Med2009].

La sección 4 se dedica a la presentación de las definiciones de los conceptos de métrica y espacio métrico, y en la sección 5 se muestran, en forma de proposiciones con sus demostraciones, resultados imprescindibles para el desarrollo del resto de las secciones. En la sección 6 se construyen catorce caracterizaciones del concepto de métrica y en la sección 7 se realizan cuatro generalizaciones del concepto de métrica, y se construyen infinitos elementos de cada una de estas generalizaciones que no son métricas.

1. SOBRE EL CONCEPTO DE CONCEPTO

En [Aus2000](pp. 86), se señala: "Para nuestros propósitos, definiremos a los conceptos como objetos, acontecimientos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterios y que están diseñados en cualquier cultura dada mediante algún signo o símbolo aceptado. Casa, triángulo, guerra y verdad son algunos de los conceptos culturalmente aceptados que emplearemos". En esta definición hay dos elementos que consideramos muy importantes: los atributos de criterios y la utilización de signos o símbolos para designarlos.

En [Bruning2005] (pp. 53) aparece: "Los conceptos son las estructuras mentales mediante las que representamos categorías significativas. Objetos o hechos concretos se agrupan sobre la base de similitudes que se perciben entre ellos; los que 'encajan' en la categoría son ejemplos del concepto; los que no encajan son no-ejemplos".

Todo concepto tiene dos características muy importantes, su extensión y su contenido. Se denomina extensión de un concepto al conjunto E de todos los objetos que corresponden a ese concepto y contenido a una colección de propiedades $C = \{ pi, i \in I\}$, donde I es un conjunto, que cumplen todos los elementos de C y solo estos elementos. En este trabajo, teniendo en cuenta las necesidades al operar con los conceptos, se indica un concepto por el par (E, C), o simplemente por E.

La operación definición científica sobre la colección de conceptos parte de un concepto definido (E, C) y agregándole propiedades a la colección C osustituyendo algunas de las propiedades de C por propiedades más fuertes, se obtiene una nueva colección de propiedades C_1 a la que corresponde una subcolección E_1 de E. Si se cumple que C_1 implica C, C no implica C_1 y E_1 es una subcolección propia de E; se tiene un nuevo concepto (E_1, C_1) definido a partir de (E, C).

2. CARACTERIZACIONES DE UN CONCEPTO

En la práctica docente, no siempre se presta la atención debida al trabajo con diferentes caracterizaciones de un mismo concepto. Cuando esto ocurre, si se lepregunta a los estudiantes, e incluso a los graduados, de una carrera, el significado del concepto de caracterización de un concepto, por lo general, no pueden explicarlo satisfactoriamente.

2.1 Sobre el concepto de caracterización

Dado el concepto ya formado (E_1, C_1) que se ha definido a partir del concepto (E, C), pueden encontrarse diferentes colecciones P de propiedades que solo cumplen los elementos de E_1. Cualquier otra colección P, por la cual pueda sustituirse C_1 sin alterar E_1, recibe el nombre de caracterización del concepto (E_1, C_1). Esto es posible cuando las colecciones de propiedades P y C_1 son equivalentes, en el sentido de que cada una se puede obtener de la otra.

Si se parte de otro conjunto (F, D) para definir (E_1, C_1) y al imponer a los elementos de F las propiedades que forman C_1 se obtienela extensión E_1, se dice que los conceptos definidos a partir de (E, C) y de (F, D) respectivamente, son equivalentes. Se puede afirmar entonces que el concepto (E_1, C_1), definido a partir (F, D), es una caracterización del concepto (E_1, C_1), definido a partir de (E, C).

2.2 Tipos de tareas que se presentan en matemáticas

1. Dados un concepto (E_1, C_1) y un conjunto de propiedades P; determinar si P es una caracterización del concepto (E_1, C_1).
2. Dado un concepto (E_1, C_1), obtener una o varias caracterizaciones del mismo.
3. Si se dispone de un concepto (E_1, C_1) y varias caracterizaciones del mismo, determinar de dónde es más útil partir al realizar una acción, si de una caracterización o del contenido del concepto.
4. Hacer uso de diferentes definiciones de un mismo concepto, dejando fijo el concepto de partida y utilizando diferentes caracterizaciones del concepto como contenido.

5. Utilizar diferentes tipos de definiciones de un mismo concepto, dejando fijo el contenido y variando el conjunto de partida de la definición.

Para dar cumplimiento a una tarea del tipo 1, hay que probar que una condición necesaria suficiente para que se cumplan las propiedades de C_1 es que se cumplan las propiedades de P. La tarea 2 es compleja y para darle cumplimiento hay que tener cierto nivel de desarrollo en matemáticas. La tarea 3 es quizás la tarea más importante para el aprendizaje de los estudiantes, pero pocas veces en el proceso de enseñanza-aprendizaje se les presentan problemas que exijan la realización de este tipo de tarea. Las tareas 4 y 5 suelen resultar muy útiles para que los estudiantes comprendan la relatividad del conjunto de propiedades que se toma como contenido y el conjunto de partida del concepto que se define. Para ello se debe ejercitar a los estudiantes en el uso de diferentes definiciones de un mismo concepto, dejando fijo el concepto de partida y variando el contenido, o dejando fijo el contenido y variando el conjunto de partida.

Este tipo de ejercicio muestra a los alumnos cómo la elección de una definición influye en sus modelos de pensamiento y cómo la demostración de propiedades con una definición pueden resultar muy complicadas, mientras que con otra pueden simplificarse y viceversa. Un interesante artículo que muestra la relatividad del contenido del concepto de valor absoluto es el de Brumfiel [Brum1980], donde se analizan cinco definiciones diferentes del concepto de valor absoluto. Otros artículos importantes relativos al valor absoluto son los de Ahuja [Ahu1976] y Sink [Sink1979].

3. GENERALIZACIONES DE UN CONCEPTO

Para el estudio de muchos conceptos es necesario realizar una o varias generalizaciones, con el propósito de ampliar diferentes significados necesarios del concepto que se generaliza.

3.1. Sobre el concepto de generalización

A continuación se presenta una modificación de la definición, tomada de la tesis escrita por Martínez (ver [Mar20003]), del concepto de generalización. "Dado el concepto ya formado (E_1,C_1) que se ha definido a partir del concepto (E,C), la operación que permite construir, a partir de (E_1,C_1), el concepto (F_1,D_1) con las propiedades:

p_1. D_1 es un debilitamiento de C_1, ($C_1 \Rightarrow D_1$ y $D_1 \not\Rightarrow C_1$),

p_2. D_1 es más fuerte que C, ($D_1 \Rightarrow C$ y $C \not\Rightarrow D_1$) y

p_3. $\emptyset \subset E_1 \subset F_1 \subset E$,

se llama generalización del concepto (E_1,C_1) subordinada a (E,C)". El proceso de construcción de (F_1,D_1) a partir de (E_1,C_1) recibe el nombre de proceso de generalización; y el concepto (E_1,C_1) se denomina concepto de partida de la generalización. En la figura 1 se presenta un mapa de las extensiones E_1, F_1 y E.

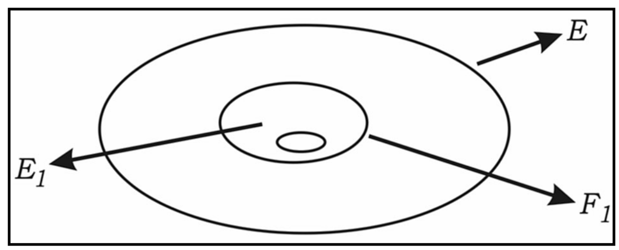


Fig. 1 *Mapa de las extensiones E_1, F_1 y E.*

Puede ocurrir que las propiedades p_1 y p_2 se cumplan y que no se cumpla la propiedad p_3. Por ejemplo, si se considera que (E,C) es el concepto de función con dominio A y codominio B, entonces el contenido D_1 del concepto de función inyectiva (F_1,D_1) cuando el cardinal de A es mayor que el cardinal de B, cumple las propiedades p_1 y p_2 con respecto al concepto de función biyectiva, (E_1,C_1); pero no cumple la condición p_3, ya que en este caso $E_1 = F_1 = \emptyset$. En este trabajo los debilitamientos D_1 con respecto a C_1 que se realizan, se obtienen eliminando una de las propiedades de C_1.

3.2. Tipos de tareas que se presentan en matemáticas

En el trabajo matemático se pueden presentar distintos tipos de tareas relativas a la generalización de conceptos (ver Mederos y Mederos (2009), entre las cuales están las siguientes:

1. Preparar el concepto (E_1, C_1) para su generalización.
2. Dados un concepto (E_1, C_1) y un conjunto D_1 de propiedades relativas a los elementos de E; determinar si D_1 es más débil que C_1.

3. Dado un concepto (E_1, C_1), obtener un debilitamiento D_1 de C_1.
4. Dado un concepto (E_1, C_1) y un debilitamiento D_1 de C_1; construir elementos de F_1/E_1 y E/F_1.
5. Dado un concepto (E_1, C_1) y un debilitamiento D_1 de C_1; construir la generalización (F_1, D_1) de (E_1, C_1).
6. Dado un concepto (E_1, C_1); realizar una o varias generalizaciones de (E_1, C_1), determinando los debilitamientos de C_1 correspondientes.
7. Dados un concepto (E_1, C_1) y varias generalizaciones (F_k,D_k), $k = 1,\ldots,m$; establecer las relaciones conjuntistas entre las extensiones F_k, $k = 1,\ldots,m$; y construir mapas de extensiones y de contenidos.
8. Dados dos conceptos (E_1, C_1) y (F_1, D_1), subordinados a un mismo concepto de partida (E, C), determinar si uno de ellos es una generalización del otro.
9. Dados dos conceptos (E_1, C_1) y (E_2, C_2) subordinados al concepto (E, C), tales que $E_1 \subset E_2$, una colección de generalizaciones (F_i,D_i), $i = 1{:}m$, de (E_1, C_1) y otra colección de generalizaciones (G_j,H_j), $j = 1{:}n$ de (E_2, C_2); determinar el mapa de las extensiones$\{F_i\} \cup \{G_j\}$ correspondientes a las dos colecciones de generalizaciones.

Para dar cumplimiento a una tarea del primer tipo se pueden realizar las subtareas siguientes:

1.1 Estudio conjuntista de E_1. En este estudio se deben determinar las condiciones para que E_1 sea un subconjunto propio de E, ya que si $E_1 = E$ no se tiene un concepto nuevo y si $E_1 = \varnothing$ se tendría un concepto que carece de interés. Es útil, además, determinar las cardinalidades de E_1 y de $E \backslash E_1$, y compararlas con la de E. Es muy importante la construcción de colecciones de elementos de E_1 y, en particular, de elementos de E_1 con propiedades singulares.

1.2 Estudio de $E \backslash E_1$. Este estudio debe estar dirigido tanto al estudio de las propiedades de sus elementos, como a la construcción de subcolecciones y elementos con propiedades singulares.

1.3 Estudio comparativo entre E_1 y las extensiones de otros conceptos subordinados a (E, C). Si (E_2, C_2) es otro concepto subordinado a (E, C), es importante determinar cuál de las relaciones $E_1 \subset E_2$, $E_2 \subset E_1$, $E_2 = E_1$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ con $E_1 \not\subset E_2$ y $E_2 \not\subset E_1$ se cumple. Si se cumple que $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, entonces se debe estudiar $E_1 \backslash E_2$, $E_2 \backslash E_1$ y $E_1 \cap E_2$. Si $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, entonces es importante estudiar $E \backslash (E_1 \cup E_2)$. Si $E_2 = E_1$, entonces los conceptos (E_1, C_1) y (E_2, C_2) coinciden. Toda generalización de (E_1, C_1) sin exceder los límites de E determina un concepto subordinado a (E, C).

1.4 Definir nuevos conceptos (E_2, C_2) a partir de (E_1, C_1). Una vez definido (E_2, C_2) se debe aplicar la tarea 1.1 para estudiar este conjuntoy la tarea 1.2 para estudiar $E_1 \backslash E_2$ y $E \backslash E_2$.

1.5 Dotar a E_1 de estructuras algebraicas. Si el concepto de partida E tiene determinadas estructuras algebraicas, se debe comprobar cuáles de esas estructuras hereda E_1 y qué estructuras tiene E_1 que no tiene E. Esta es una información muy importante, puesto que mientras más compleja es una estructura de E_1, más rápidamente puede ampliarse la subcolección de sus elementos conocidos utilizando esa estructura. Por ejemplo, si E_1 hereda la estructura de grupo de E para una operación interna T, entonces se puede asegurar que $aTb \in E_1$ si $a \in E_1$ y $b \in E_1$, que $aTb \in E \backslash E_1$ si $a \in E_1$ y $b \in E \backslash E_1$. Si $a,b \in E \backslash E_1$, entonces a Tb puede pertenecer o no pertenecer a E_1. Estos resultados permiten transformar una clase C_1 de elementos conocidos de E_1 en una clase C_2, $C_2 = \{aTb;\ a \in C_1$ y $b \in E \backslash E_1\}$, de elementos conocidos de $E \backslash E_1$. De esta forma se hace uso de operaciones internas para construir colecciones de elementos de extensiones conceptuales.

1.6 Dotar a E_1 de otras estructuras. Es importante conocer si E_1 tiene otras estructuras, por ejemplo métricas, topológicas o medibles. Dada una cadena $\varnothing \subset E_2 \subset E_1 \subset E$, si E tiene una de estas tres estructuras y los elementos de E_1 tienen cierta propiedad en correspondencia con esa estructura, que no cumplen los elementos de E_2; entonces se puede utilizar esta información para construir elementos interesantes de $E_1 \backslash E_2$.

Para dar cumplimiento a una tarea del segundo tipo, es necesario demostrar que C_1 implica D_1 y refutar la proposición D_1 implica C_1. Esta proposición puede refutarse mediante la construcción de un contraejemplo. La tercera tarea es de mayor complejidad que la segunda y se presenta cuando se quiere, por ejemplo, obtener un nuevo concepto que generalice algún significado del concepto que se desea generalizar.

La realización de la tarea cuatro puede requerir de un proceso complejo. Este es el caso cuando (E_1, C_1) es el concepto de métrica sobre un conjunto M con cardinal mayor o igual a 2; ya que el cardinal del concepto de métrica en este caso es mayor o igual que el continuo (ver secciones 5 y 7). Consecuentemente, para cualquier generalización (F_1, D_1) de (E_1, C_1) la construcción de un elemento de F_1/E_1 hay que realizarla para una cantidad de métricas mayor o igual que el continuo (ver secciones 5 y 7).

Una tarea del quinto tipo demanda un proceso de generalización consistente en considerar a D_1 como el contenido de un nuevo concepto, asociar a este contenido un conjunto F_1 formado por todos los objetos de E que satisfacen las propiedades de D_1, utilizar una notación adecuada para F_1 y emplear el par (F_1, D_1) para indicar el nuevo concepto, donde en lugar de F_1 se utiliza su notación. Cuando no hay dudas es usual utilizar la notación de F_1 para referirse al concepto (F_1, D_1).

En el epígrafe 4.2 de este artículo se realizan varias generalizaciones del concepto de métrica, determinando los debilitamientos necesarios, se establecen las relaciones conjuntistas de sus extensiones y se construyen algunos de los mapas correspondientes. Se muestra de esta forma cómo proceder para dar cumplimiento a tareas de los tipos 6, 7 y 8. No se da cumplimiento a la tarea 9 en este trabajo. En [Med2009] se muestra cómo realizar esta tarea.

4. EL CONCEPTO DE MÉTRICA Y DE ESPACIO MÉTRICO

Dado un conjunto M se denomina métrica sobre M a toda aplicación m: $M \times M \to [0, +\infty)$ que verifica para todos los elementos $x, y, z \in M$ las propiedades siguientes:

m_1) Si $x = y$, entonces $m(x, y) = 0$. (*Propiedad de identidad*)

m_2) $m(x, y) = m(y, x)$. (*Propiedad de simetría*)

m_3) $m(x, y) \leq m(x, z) + m(z, y)$. (*Propiedad triangular o de subaditividad*)

m_4) Si $m(x, y) = 0$, entonces $x = y$. (*Propiedad de definitoreidad*).

Para dos elementos cualesquiera $x, y \in M$ el número no negativo $m(x, y)$ se denomina distancia de x a y, y si hay posibilidades de confusión m-distancia de x a y. La propiedad m_1, 4: $m(x, y) = 0$ si, y solo si $x = y$, que resulta de considerar las propiedades m_1 y m_4 juntas se denomina identidad de indiscernibles.

El concepto de donde se parte para definir el concepto de métrica en la definición anterior es (F_M, C), donde F_M es la colección de todas las funciones con dominio $M\times M$ y codominio $[0, +\infty)$, que satisfacen las propiedades de $C=\{f_1, f_2\}$, tal que

f_1: para todo elemento $(x, y)\in M\times M$ existe un $r \in [0, +\infty)$ tal que $((x,y), r)$ pertenece al grafo de m;

f_2: si$((x,y), r_1)$ y $((x,y), r_2)$ pertenecen al grafo de m; entonces $r_1=r_2$.

La colección $C_1=\{m_i;\ i=1:4\}$, constituye el contenido del concepto de métrica (M_M, C_1). La colección M_M, la forman los elementos de F_M que satisfacen las propiedades de C_1.

5. RESULTADOS AUXILIARES

Presentamos a continuación algunos resultados necesarios para el desarrollo del trabajo que sirven, además, de preparación del concepto de métrica para su generalización. De esta forma se da cumplimiento a la tarea 1 de 3.2.

Si $M=\varnothing$, entonces aceptando que $M\times M=\varnothing$, se tiene que $F_M=\{\varnothing\}$. Como la aplicación vacía no incumple las propiedades m_i, i =1:4, entonces $M_M = F_M$. Se concluye que en este caso el concepto de métrica sobre M coincide con el concepto de función real no negativa definida sobre M x M, y por tanto, no es un concepto nuevo (ver [Med1997]). Esta es la razón por la cual al definir el concepto de métrica se debe considerar $M\neq\varnothing$. Esto es también obviamente válido para cualquier generalización del concepto de métrica.

Si $M=\{a\}$, entonces $M_M=\{m_o\}$, donde por m_o se indica la función con dominio $M\times M=\{(a,a)\}$ y con imagen $\{0\}$. Evidentemente, la colección M_M está estrictamente contenida en F_M; pero en general esta métrica m_o no es de interés.

Si $M=\{a,b\}$, entonces $M_M= \{m_r\}r \in [0,+\infty)$,

donde

$$m_r(a,a) = m_r(b,b) = 0 \text{ y } m_r(a,b) = m_r(b,a) = r, \quad (1)$$

y trivialmente se tiene que $F_M/M_M\neq\varnothing$, o sea, $\varnothing\subset M_M\subset F_M$.

Si M tiene más de dos elementos, entonces la colección $\{m_r\}r\in[0,+\infty)$ está estrictamente contenida en M_M.Obviamente, existen infinitos elementos de F_M que no pertenecen a M_M. Luego, $\varnothing\subset M_M\subset F_M$. De esta forma se da cumplimiento a parte de la subtarea 1.1.

Proposición 5.1. Si M tiene más de dos elementos, entonces toda función real no negativa m definida sobre $M\times M$, que satisface la condición m_1 y que cumple la desigualdad

$$a\leq m(x,\ y)\leq 2a,\quad a>0, \tag{2}$$

para todo $(x,\ y)\in MxM$ que no esté en la diagonal, cumple la propiedad m_3.

Demostración. Para cualquier subconjunto $\{x,y,z\}$ de M se tiene que

$$m(x,z)\ +\ m(z,y)\ \geq\ a+a\ =\ 2a\ \geq\ m(x,\ y).$$

Si $x=y$, $x=z$ o $y=z$, se tiene también trivialmente la condición m_3.

Q.e.d.

Como la propiedad m_4 es consecuencia de la desigualdad (2), se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 5.1. Si m es además simétrica, entonces pertenece a M_M.

Con el objetivo de responder a la pregunta sobre el cardinal de los conjuntos que estudiaremos, denotemos por $[A]$ al cardinal de un conjunto A y por $\boldsymbol{c}$ al cardinal del continuo ($[IR]=\boldsymbol{c}$). Se cumplen los siguientes resultados de carácter general:

Proposición 5.2. Dados un conjunto finito M y dos conceptos $(A_M,\ C_A)$ y $(B_M,\ C_B)$ tales que $A_M\subset B_M\subset F_M$. Si [AM] = $\boldsymbol{c}$ y si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre un subconjunto no numerable de los números reales y un subconjunto de $B_M\backslash A_M$, entonces $[B_M]=[B_M\backslash A_M]=\boldsymbol{c}$.

Demostración. Se conoce que $[F_M]=\boldsymbol{c}$, por lo que $[B_M]=\boldsymbol{c}$, por ser siempre $A_M\subset B_M\subset F_M$ y $[A_M]=[F_M]=\boldsymbol{c}$. Por otra parte, la correspondencia uno a uno entre un subconjunto no numerable de los números reales y un subconjunto de $B_M\backslash A_M$ garantiza que $[B_M\backslash A_M]=\boldsymbol{c}$.

Q.e.d.

Proposición 5.3. Dados un conjunto infinito M con $[M]=d$ y dos conceptos (A_M,C_A) y (B_M,C_B) tales que $A_M\subset B_M\subset F_M$. Si dados dos subconjuntos distintos N_1 y N_2 de M, tales que $[M\backslash N_i]\geq 3$ (i=1,2), existen dos funciones $f(N_1)$, $f(N_2)\in B_M\backslash A_M$ tales que $f(N_1)\neq f(N_2)$, entonces $[B_M]=[B_M\backslash A_M]=2^d$.

Demostración. Por ser $[M]=d$, resulta $[\wp(M)]=2^d$. Al imponer la condición

$$[M\backslash N_i]\geq 3\quad(i=1,2)\quad,$$

estamos quitando de $\wp(M)$ las colecciones

$$A_1=\{M\backslash\{\ x\}\}\ x\in M\qquad \text{y}$$

$A_1=\{M\backslash\{x\}\}(x,y)\in MxM$, que tienen cardinalidad $\boldsymbol{d}$. Por tanto, si $A=\wp(M)\backslash(A_1\cup A_2)$, se tiene $[A]=2^{\boldsymbol{d}}$. Como a todo elemento N de A se asocia un elemento f_N de $B_M\backslash A_M$, queda definida una función inyectiva f de A en $B_M\backslash A_M$ y, como $B_M\backslash A_M\subset F_M$, se tiene que $[B_M\backslash A_M]=2^d$ y de aquí resulta que $[B_M]=2^d$.

Q.e.d.

Corolario 5.2. Si se sustituye la condición

$$[M\backslash N_i]\geq 3\ (i=1,2),$$

por la condición $[M\backslash N_i]\geq 2$ (i =1,2) en la proposición anterior, se obtiene el mismo resultado.

Demostración. Se obtiene sustituyendo A en la demostración de la proposición anterior por $A=\wp(M)\backslash A_1$.

Q.e.d.

En el caso de las colecciones M_M y $F_M\backslash M_M$, si consideramos $A_M=\{m_r\}r>$ o, como $[\{m_r\}]=\boldsymbol{c}$, de la proposición 5.2 se deduce la siguiente:

Proposición 5.4. Si $1<[M]<\infty$; entonces

$$[M_M]=[F_M\backslash M_M]=\boldsymbol{c}.$$

En el caso en que la cardinalidad de M sea infinita, asociemos a todos los N subconjuntos no vacíos de M la función definida para $r>0$ sobre $M\times M$ por

$$\bullet\ m(N_r)=\begin{cases} r & (x=y)\\ 1 & \{x,y\}\subset N\\ 2 & \{x,y\}\not\subset N).\end{cases} \tag{3}$$

Esta función es una métrica sobre M si y solo si $r=0$, por ser simétrica, cumplir la condición m_1 y satisfacen la condición m_3 por la proposición 5.1, ya que $1\leq m_N(x,y)\leq 2$ para todo $(x,\ y)$ que no está en la diagonal de $M\times M$. Si $N_1\neq N_2$ son subconjuntos de M con más de dos elementos cada uno; entonces $m(N_1)\neq m(N_2)$, pues para $x\in N_1\backslash N_2$ e $y\in N_1$ resulta que $m_{N1}(x,y)\neq m_{N2}\ (x,y)$. Por lo tanto, se cumple la siguiente proposición:

Proposición 5.5. Si M es infinito, $[M_M]=\boldsymbol{d}$; entonces $[M_M]=[F_M\backslash M_M]= 2^{\boldsymbol{d}}$.

Demostración. Aplicando la proposición 5.3 a las combinaciones de conjuntos $A_M\{m(N_r)\}r>0$, $B_M=M_M$ y $A_M=M_M$, $B_M=F_M$ se deduce respectivamente $[M_M]= 2^d$ y $[F_M\backslash M_M]= 2^d$.

Q.e.d.

Con las proposiciones 5.4 y 5.5 se da cumplimiento a otras de las actividades de la subtarea 1.1.

Estos resultados permiten concluir que si un conjunto M tiene más de un elemento, entonces el número de elementos de F_M que son métricas sobre M es muy "grande", mayor que el número de elementos de M y, tan "grande" como el número de elementos de F_M que no son métricas. Sin embargo, resulta difícil encontrar una métrica con determinadas propiedades sobre un conjunto dado M, cuando no se dispone de herramientas para ello. Estas conclusiones compulsan al estudio de métodos para obtener nuevos elementos de M_M a partir de uno dado. Con este objetivo se considera la colección A de las funciones continuas de $[0,+\infty)$ en sí mismo no idénticamente nulas que satisfacen las condiciones

i) $f(0) = 0$,

ii) f es creciente,

iii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo $x,y\in[0,+\infty)$.

La colección A es:

a) No vacía. En efecto, son elementos de A las funciones f_i, $i=1,2,3$ definidas sobre $[0,\infty)$ por $f_1(t) = t/(t+1)$, $f_2(t) = \log(1+t)$ y $f_3(t) = \min(r,f)$ con $r\in[0,+\infty)$ y $f\in A$.

b) Un semigrupo que no es un monoide con la suma usual, y con la composición de funciones respectivamente [Med1999].

Se tiene además que si $f\in A$, entonces $\alpha f\in A$ para todo número real $\alpha>0$. Por tanto, cualquier combinación lineal finita con escalares positivos

$$\alpha_i, \sum_{(i=1)}^{n} \alpha_i\, g_i$$

y toda composición finita g_n o…o g_1 de elementos g_i de A, pertenecen a la colección A.

Lema 5.1. Todo elemento f de A satisface la condición: Si $f(x) = 0$, entonces $x = 0$.

Demostración. Supongamos que existe un número real $r>0$ tal que $f(r)=0$; entonces f se anula sobre $[0,r]$ por ser f creciente. Como f cumple la condición iii) se tiene que f se anula sobre $[0,2r]$. Continuando en esta forma se tiene que f es idénticamente nula. Luego la suposición es falsa y, consecuentemente si $f(x)=0$ entonces $x=0$.

Q.e.d.

Proposición 5.6. Si M es un conjunto no vacío y m es un elemento de M_M; entonces

$$fom \in M_M \text{ para todo } f\in A.$$

Demostración. Obviamente $fom\in F_M$. Esta función cumple las condiciones m_1, m_2, m_3 y m_4 por ser m una métrica sobre M y por cumplir f la condición *i)*, ser una función, satisfacer las condiciones *ii)* e *iii)*, y cumplir la condición *iv)* respectivamente.

Q.e.d.

Después que se ha formado un concepto, una de las tareas fundamentales que debe realizarse es la de ampliar la colección de elementos conocidos de su extensión. La proposición 5.6 permite ampliar la colección C_M de elementos conocidos de M_M a la colección $\cup A_m$, $m\in C_M$, donde $A_m=\cup\{fom : f\in A\}$. Con esta proposición se reduce el problema de la ampliación de C_M al problema más sencillo de ampliar la clase de las funciones continuas conocidas de $[0,+\infty)$ en sí mismo, no idénticamente nulas y que satisfacen las condiciones i)-iv).

Las condiciones impuestas a los elementos f de A son suficientes, pero no necesarias, para que dado un elemento m de M_M se cumpla que fom pertenezca a M_M. A continuación se analizan cuáles de estas condiciones son necesarias:

La condición de ser f no idénticamente nula es necesaria, ya que si se supone lo contrario y M tiene más de un elemento, entonces fom incumple la condición m_4. La condición i) también es necesaria, pues si se supone lo contrario, entonces fom incumple la condición m_1. La función definida sobre $[0,+\infty)$ por

$$f(x) = \left\{ (0 \cong x \cong 1+ \right.$$

donde $1<\lambda\leq 2$,es decreciente para $x>\lambda$. Si m es una métrica con imagen en $[1,+\infty)$ para todo (x, y) que no está en la diagonal de $M\times M$; entonces *fom* es también una métrica, pues evidentemente cumple m_1, m_2 *y* m_4, y cumple m_3 por tomar valores entre 1 y 2 para todo (x,y) que no está en la diagonal de $M\times M$. Luego la condición *ii*) no es necesaria. La función f definida sobre $[0,+\infty)$ por $f(x)=x^2$ incumple la condición *iii*) y, sin embargo, para toda métrica m tal que $m(x,y)\in[1,\sqrt{2}]$ para todo (x, y) que no está en la diagonal de $M\times M$, se tiene que $fom\in M_M$.

Los elementos de la colección de métricas que se construyó para demostrar la proposición 5.5 tienen características singulares que permiten dar cumplimiento a otra de las actividades de la subtarea 1.1. La proposición 5.6 facilita la construcción de elementos singulares de M_M.

Proposición 5.7. En todo espacio métrico (M, m), donde $[M]>2$ y $m\neq m_o$, existen tres elementos a, b y c tales que $m(a,b)\neq m(a,c)+m(c,b)$.

Demostración. Supongamos que para tres elementos x, y, zdiferentes cualesquiera se cumple que:

$$m(x,y) = m(x,z) + m(c,y), \tag{5}$$

$$m(x,z) = m(x,y) + m(y,z), \tag{6}$$

$$m(y,z) = m(y,x) + m(x,z). \tag{7}$$

Restando ordenadamente las igualdades (5) y (6), y simplificando, resulta que $m(x,y)=m(x,z)$. De esta igualdad y de la igualdad (5) se tiene que $m(z,y)=0$. Realizando las mismas acciones con las igualdades (5) y (7) y teniendo en cuenta que $m(z,y)=0$, se obtiene que $m(x,y)=m(y,z))=0$. De esta última igualdad y de la igualdad $m(x,y)=m(x,z)$, obtenemos $m(x,y)= m(x,z)=m(y,z)=0$. De aquí se concluye que $m=mo$, lo que escontrario a una de las hipótesis. Por tanto nuestra suposición es falsa.

Q.e.d.

El conjunto $[0,+\infty)$ con la operación adición es un semigrupo conmutativo que no es un grupo. Esta estructura la hereda M_M. Para todo número real positivo α y todo m de M_M se cumple que $\propto m \in M_M$. Estos resultados corresponden a la subtarea 1.5.

6. CARACTERIZACIONES DEL CONCEPTO DE MÉTRICA

Para todo elemento f de F_M, la propiedad, $f(x,y)>0$ si, y solo si, $x\neq y$, para todo $x,y\in M$, se indica por m_5 y se denomina propiedad de no negatividad. Trivialmente se prueba que la colección $P_1=\{m_2, m_3$ y $m_5\}$ es una caracterización del concepto de métrica.

Lindenbaum [Lind1926] probó que la colección de condiciones $C_1=\{m_i,\ i=1:4\}$, de la definición de métrica es equivalente a la colección $P_2=\{m_1,m_{23}, m_4\}$, donde por m_{23} se indica la propiedad $m(x,y)\leq m(z,x) + m(z,y)$, para x, y, z cualesquiera de M. En efecto, considerando $z=y$ en la condición m_{23} resulta la desigualdad $m(x, y)\leq m(y, x)$ y cambiando los roles de x e y en la condición m_{23} y haciendo $z=x$ se obtiene la desigualdad $m(y, x)\leq m(x, y)$. De estas dos desigualdades se obtiene la condición m_2. De la condición m_2 y m_{23} resulta la propiedad m_3. La demostración de la implicación $C_1\Rightarrow P_2$ es inmediata. Luego, la colección P_2 es una caracterización del concepto de métrica.Se muestra de esta forma un ejemplo de aplicación de la tarea 1 del epígrafe 2.2.

La colección $P_3=\{m_{14}, m_{23}\}$, donde por m_{14} se indica la propiedad $m(x, y)=0$ si, y solo si, $x=y$, es otra caracterización del concepto de métrica. Si se plantean la desigualdad triangular y la propiedad m_{23} solo para los casos en que x, y, z son diferentes dos a dos y se indican estas nuevas propiedades por m'_3 y m'_{23} entonces las colecciones $P_4= \{m_2, m'_3, m_5\}$, $P_5= \{m_1, m_2, m'_3, m_4\}$, $P_6=\{m_1, m'_{23}, m_4\}$ y $P_7=\{m_{14}, m'_{23}\}$ son caracterizaciones del concepto de métrica. Los ejemplos P_i, $i=3:7$, se puede utilizar para dar cumplimiento a las tareas de la 1 a la 5 del epígrafe 2.2.

La no negatividad de m es una consecuencia de las condiciones m_2 y m_3. En efecto, m_3 nos permite asegurar que para todo y de M se cumple que $m(x, y) \leq m(x, y) + m(y,y)$. De esta desigualdad resulta trivialmente que $m(y, y)\geq 0$ para todo y de M. De las propiedades m_2 y m_3 se tiene, para x e y cualesquiera de M, que $m(x, x)\leq 2m(x,y)$. Luego, por ser $m(x, x)\geq 0$, se obtiene que $m(x,y)\geq 0$ para todo $x,y\in M$. Consecuentemente, se obtienen siete caracterizaciones del concepto de métrica m sobre M considerando una función de MxM en R que cumple cualesquiera de las colecciones de propiedades C_1, P_i, $i=1:7$. Estas siete caracterizaciones del concepto de métrica se pueden utilizar para dar cumplimiento a la tarea 6 de la sección 2.2.

7. GENERALIZACIONES DEL CONCEPTO DE MÉTRICA

En esta sección se estudian las cuatro generalizaciones del concepto de métrica que se obtienen eliminando una sola de las propiedades de su contenido. Se obtienen los cuatro espacios (X, f), donde X es un conjunto y f es una función real no negativa definida sobre $X\times X$, que satisface uno de los cuatro conjuntos de propiedades $\{m_i\}_{i\in N4j}$, $j\in N_4$, donde $N_4=\{1, 2, 3, 4\}$, $N_{4j}=N\setminus\{j\}$ y $j\in N_4$.

Nótese que si $M=\varnothing$, y G_M es la extensión de una generalización del concepto de métrica con contenido N_{4j} para $j=1,\ldots,4$, entonces es $M_M=G_M=F_M=\{\varnothing\}$. Así mismo, si $M=\{a\}$, se tiene que $M_M=G_M=\{0\}\subset F_M$. Por ello solo resulta de interés estudiar estas generalizaciones del concepto de métrica para conjuntos M con más de un elemento.

En el caso en que M tiene dos elementos; es decir, $M = \{a,b\}$, el análisis depende de que las propiedades m_1 y m_2 formen o no parte del contenido de la generalización del concepto. En general se tendrá que $G_M=\{m_{r1\ r2\ r3\ r4} \mid r_i\geq 0,\ i=1:4\}$, donde

$$m_{r1\ r2\ r3\ r4}(a,b) = r_1,\ m_{r1\ r2\ r3\ r4}(b,a) = \\ = r_2,\ m_{r1\ r2\ r3\ r4}(a,a) = r,\ m_{r1\ r2\ r3\ r4}(b,b) = r_4. \tag{8}$$

Si se cumple m_1 y m_2, se observa fácilmente que tiene que ser $r_3 = r_4 = 0$ y $r_1 = r_2 = r$, de donde $m_{rr00}=m_r$ y $M_M = \{m_r,\ r>0\} = G_M\subset F_M$, para las funciones m_r de (1),por lo que G_M no es una generalización de M_M. Ello no sucede si no se cumple m_2, pues en ese caso se puede definir la función

$$q_{kr} = (x, y)\begin{cases} 0 & x = y \\ r & (x, y) = (a, b),\quad 0<k\neq r \\ k & (x, y) = (b, a) \end{cases} \tag{9}$$

Fácilmente se comprueba que esta función coincide con la definida en (8) con $r_3=r_4=0$ y $r_1=r$ y $r_2=k$ y cumple las propiedades m_1, m_3 y m_4, pero no cumple m_2. Tampoco sucede si no se cumple m_1, pues la función

$$\varphi_{rst}= (x, y)\begin{cases} s & (x, y) = (a, b) \\ t & (x, y) = (b, b),\quad 0 < s, t \leq 2r \\ r & (x\neq y) \end{cases} \tag{10}$$

coincide con la definida en (8) con $r_3=s$, $r_4=t$, $r_1=r_2=k$ que cumple las propiedades m_2, m_3 y m_4, pero no cumple m_1.

7.1. El concepto de pseudométrica

Un elemento p de F_M que satisface las condiciones m_i, $(i=1:3)$, se denomina pseudométrica sobre M y el par (M, p) se denomina espacio pseudométrico. La extensión del concepto de pseudométrica se indica por P_M.

Si M tiene tres o más elementos entonces $\varnothing\subset M_M\subset P_M\subset F_M$. En efecto,si $M=\{a,b,c\}$,toda función pr:$M\times M\rightarrow[0,+\infty)$, tal que $r>0$ y

$$pr(x,x)=pr(a,b)=pr(b,a)=0 \text{ si } x\in M, \tag{11}$$

$$pr(a,c)= pr(c,a)= pr(c,b)= pr(b,c)=r, \tag{12}$$

pertenece a P_M/M_M. Note que en este caso se ha obtenido una colección de elementos de P_M/M_M que está en correspondencia uno a uno con el conjunto (no numerable) de los números reales positivos. Entonces la proposición 5.2 garantiza que $[P_M]=[P_M\setminus M_M]=\boldsymbol{c}$, si $2<[M]<\infty$.

En el caso general, sea M un conjunto (finito o infinito) con más de tres elementos y N un subconjunto de M, tal que $[M\setminus N]\geq 2$.

Sean x_0, $y_0\in M\setminus N$, $x_0\neq y_0$, y sea p_N la función definida sobre $M\times M$ para $r>1$por

$$p_{N_r}(x, y) = \begin{cases} 1 & x\neq y \quad \{x, y\}\subset N \\ r & x\neq y,\ \not\subset N, (x, y)\notin\{(x_0, y_0),(y_0, x_0)\}. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{13}$$

Esta función no es métrica, pues $p_N(x_0, y_0)=0$. Las propiedades m_1 y m_2 se comprueban fácilmente; si $p_N(x, y)=r$, para todo $z\in M$ se tiene que $p_N(x, z)=r$ o $p_N(z, y)=r$, mientras que si $p_r(x, y)=1$, es $p_N(x, z)+ p_N(z, y) =1$ o $2r$ para todo $z\in M$, por lo que se cumple m_3 y p_N es entonces una pseudométrica. Si consideramos ahora las funciones p_{N_1} y p_{N_2} del tipo (13) para dos conjuntos $N_1\neq N_2$ tales que $[M\setminus N_1]\geq 2$ y $[M\setminus N_2]\geq 2$. Obviamente es $p_{N1}\neq p_{N2}$ y la proposición 5.3 garantiza que si M es un conjunto infinito con $[M]=\boldsymbol{d}$, entonces $[P_M]=[P_M\setminus M_M]=2^d$.

Los espacios pseudométricos fueron investigados por Birkhoff [Birk 1936].

7.2. El concepto de semimétrica

Un elemento s de F_M que satisface las condiciones m_1, m_2 y m_4 de la definición de métrica se denomina semimétrica sobre M. La extensión del concepto de semimétrica sobre un conjunto M se indica por S_M. Todo par (M,s), donde M es un conjunto con más de dos elementos y s es una semimétrica sobre M se denomina espacio semimétrico.

Si $[M]=2$, como el concepto de semimétrica satisface las propiedades m_1 y m_2, se tiene que $S_M=M_M$. Sea M un conjunto con más de dos elementos y sean a y b dos elementos diferentes de M, entonces la proposición 5.1 garantiza que la colección de funciones $s\alpha$, $\alpha>0$, definidas sobre $M\times M$ por

$$p_\propto (x, y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ \propto & (x, y) \in\{(a, b)\} y\ x \neq y\,. \\ 2\propto & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (14)$$

es una colección de métricas sobre M. Considerando ahora una función f definida en $[0,+\infty)$ con valores no negativos, que cumpla que $f_\alpha(0)=0$, $f_\alpha(\alpha)=4\alpha$ y $f_\alpha(2\alpha)=\alpha$, resulta sencillo comprobar que la composición $f_\alpha o s_\alpha$ es una semimétrica que no es métrica.

De manera análoga a la generalización del epígrafe anterior, se ha obtenido aquí una colección de elementos de S_M/M_M que está en correspondencia uno a uno con el conjunto (no numerable) de los números reales positivos. Entonces la proposición 5.2 permite afirmar que $[S_M]=[S_M\backslash M_M]=\boldsymbol{c}$, si $2<[M]<\infty$.

El conjunto F_M/S_M contiene a la colección de las funciones constantes, por lo que también es $[F_M\backslash S_M]=\boldsymbol{c}$. En este caso se cumple la cadena de inclusiones $\varnothing\subset M_M\subset S_M\subset F_M$ y la igualdad $P_M\cap S_M=M_M$.

Otro ejemplo de utilidad para determinar la cardinalidad de S_M cuando M es infinito, se construye a partir de la métrica (3) presentada en la proposición 5.5, en composición con una función f de $[0,+\infty)$ en sí mismo que cumpla que $f(0)=0$, $f(1)=5$ y $f(x)=1$ si $x\notin\{0,1\}$.La composición fom_N es una semimétrica sobre M que no es métrica. En efecto, de las definiciones de f y m_N se prueba que la función fom_N satisface las propiedades m_1, m_2 y m_4. Si $x\neq y$, $x,y\in N$, $z\notin N$ se tiene que

$$fom_N(x,y) > fom_N(x,z) + fomN(z,y)\ ,$$

lo que indica que fom_N no cumple la propiedad m_3. Si consideramos ahora dos subconjuntos diferentes N_1 y N_2 de M con $[M\backslash N_1]\geq 2$ y $[M\backslash N_2]\geq 2$ y sean las semimétricas sobre M del tipo anterior correspondientes fom_{N1} y fom_{N2} las, entonces ellas son diferentes, ya que si $x\in N_1\backslash N_2$ e $y\in N_1$, entonces

$$fom_1(x,y)=f(1)=5 \quad \text{y} \quad fom_2(x,y)=f(2)=1.$$

La proposición 5.3 garantiza entonces que si M es un conjunto infinito con $[M]=\boldsymbol{d}$, entonces $[S_M]=[S_M\backslash M_M]=2^{\boldsymbol{d}}$. Si M es un conjunto infinito, entonces se cumplen las inclusiones $\varnothing\subset M_M\subset S_M\subset F_M$ y $P_M\cap S_M=M_M$. Como $(P_M\backslash S_M)\subset(F_M\backslash S_M)$ y $[PM\backslash SM]=2^{\boldsymbol{d}}$, se tiene que $[F_M\backslash S_M]=2^{\boldsymbol{d}}$.De igual forma, como $(S_M\backslash P_M)\subset(F_M\backslash S_M)$ y $[S_M\backslash P_M]=2^{\boldsymbol{d}}$, se tiene que $[F_M\backslash P_M]=2^{\boldsymbol{d}}$.

Se concluye que sobre un conjunto M con tres o más elementos las colecciones de las semimétricas que no son métricas y de las funciones que no son semimétricas son amplísimas. Los orígenes de la palabra semimétrica pueden verse en [Men1927, Men1931, Men1931a, Chit1917].

7.3. El concepto de quasimétrica

Una quasimétrica sobre un conjunto M es un elemento de F_M que satisface las condiciones, m_1, m_3 y m_4 [Steen1995]. La extensión del concepto de quasimétrica sobre M se indica por Q_M. El par (M,q), donde M es un conjunto con al menos dos elementos y q es una quasimétrica sobre M se denomina espacio quasimétrico.

Las funciones definidas en (9) nos muestran una colección de elementos de Q_M/M_M que está en correspondencia uno a uno con el conjunto (no numerable) de los números reales positivos en el caso en que $[M]\geq 2$. Entonces la proposición 5.2 garantiza que en ese caso es $[Q_M]=[Q_M\backslash M_M]=\boldsymbol{c}$ y en general se cumple:

Proposición 7.1. Si $[M]=2$, entonces

$$M_M=\{m_r,\ r>0\}=P_M\subset Q_M\subset F_M \text{ y si } 2<[M]<\infty,$$

entonces $\varnothing\subset M_M\subset Q_M\subset F_M$ y $P_M\cap Q_M=M_M$.

Otro ejemplo de utilidad para determinar la cardinalidad cuando M es infinito, se construye del siguiente modo: Sea N un subconjunto de M, tal que $[M\backslash N]\geq 2$, y sean $x_0,y_0\in M\backslash N$ con $x_o\neq y_o$. Se define sobre $M\times M$ la función q_N por

$$q_N(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & \{x,y\}\subset N\\ 3/2 & (x,y)=(x_0,y_0).\\ 2 & \text{en otro caso}\end{cases}\qquad(15)$$

La función q_N cumple las propiedades m_1 y m_4 por definición y la propiedad m_3 por la proposición 5.1. Sin embargo, no es simétrica porque $q_N(x_0,y_0)=3/2$ y $q_N(y_0,x_0)=2$. Se concluye que $q_N\in Q_M/M_M$. Si N_1 y N_2 son dos subconjuntos diferentes de M con $[M\setminus N_1]\geq 2$ y $[M\setminus N_2]\geq 2$, entonces las funciones q_{N1} y q_{N2} son diferentes, pues para $x\in N_1\setminus N_2$ e $y\in N_2$, resulta que $q_{N1}(x,y)\neq q_{N2}(x,y)$. La proposición 5.3 garantiza entonces que si M es un conjunto infinito con $[M]=\boldsymbol{d}$, entonces $[Q_M]=[Q_M\setminus M_M]=2^{\boldsymbol{d}}$. Se cumple que $[F_M\setminus Q_M]=2^{\boldsymbol{d}}$, por ser $(S_M\setminus M_M)\subset(F_M\setminus Q_M)$ y $[S_M\setminus M_M]=2^{\boldsymbol{d}}$.

Para todo conjunto M con más de dos elementos se cumple que $P_M\cap Q_M=S_M\cap Q_M=M_M$.

Algunos resultados interesantes sobre las quasimétricas se pueden encontrar, por ejemplo, en [Rom1999, Rod2005]. Fue Wilson, W. A. [Wils 1931], quien introdujo el término de quasimetric spaces y determinó propiedades de estos espacios y relaciones con los espacios métricos y topológicos.

7.4 El concepto de métrica sin identidad

Una métrica sin identidad sobre un conjunto M es un elemento de F_M que satisface las condiciones m_2, m_3 y m_4. La extensión del concepto de métrica sin identidad sobre M se indica por I_M. Todo par (M,φ), donde M es un conjunto con más de dos elementos y φ es una métrica sin identidad sobre M se denomina espacio métrico sin identidad.

Las funciones definidas en (10) nos muestran que cuando $M=\{a,b\}$, se cumple la cadena de inclusiones $M_M=\{m_r;\ r>0\}=P_M\subset I_M\subset F_M$. Si M es un conjunto con más de dos elementos, es evidente que las funciones constantes no nulas constituyen una colección de elementos de I_M/M_M que está en correspondencia uno a uno con el conjunto (no numerable) de los números reales positivos. Entonces la proposición 5.2 garantiza que $[I_M]=[I_M\setminus M_M]=\boldsymbol{c}$, si $2<[M]<\infty$.

El conjunto F_M/I_M contiene a la colección de las funciones φ_r definidas para $r>0$ y $x_0\neq y_0$ por

$$\varphi_r(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ r & (x,y)=(x_0,y_0).\\ 2r & \text{en otro caso}\end{cases}\qquad(16)$$

las cuales cumplen las propiedades m_1, m_3 y m_4, pero incumplen m_2. Entonces también es $[F_M\setminus S_M]=\aleph$. En este caso se cumple $\emptyset\subset M_M\subset I_M\subset F_M$ y la igualdad $Q_M\cap I_M=P_M\cap I_M=S_M\cap I_M=M_M$.

En el caso en que M es infinito, sea N un subconjunto de M, tal que $M\setminus N=\{x_0,y_0\}$. Se define sobre $M\times M$ la función φ_N por

$$\varphi_N(x,y)=\begin{cases}1 & \{x,y\}\subset N\\ 2 & \{x,y\}=\{x_0,y_0\}.\\ 3 & \text{en otro caso}\end{cases}\qquad(17)$$

Es obvio que la función φ_N cumple las propiedades m_2 y m_4. La propiedad m_3 se comprueba fácilmente analizando los casos posibles. Sin embargo, φ_N no es métrica porque $\varphi_N(x_0,x_0)\neq 0$. Entonces $\varphi_N\in I_M/M_M$. Si N_1 y N_2 son dos subconjuntos diferentes de M con $[M\setminus N_1]=2$ y $[M\setminus N_2]=2$, entonces las funciones φ_{N1} y φ_{N2} son diferentes, pues para $x\in N_1\setminus N_2$ e $y\in N_1\cap N_2$, resulta que $1=\varphi_{N1}(x,y)\neq$. La proposición 5.3 garantiza entonces que si M es un conjunto infinito con $[M]=\boldsymbol{d}$, entonces $[I_M]=[I_M\setminus M_M]=2^{\boldsymbol{d}}$.

7.5 CONCLUSIONES

A modo de conclusiones se muestran los mapas de extensiones, simbólicos y de cardinalidades de las métricas y sus generalizaciones.

Mapas simbólicos

- Caso $[M]=2$:

$P_M=S_M=M_M$, $I_M\cap Q_M=M_M$,
$\emptyset\subset F_M\setminus(I_M\cup Q_M)\subset F_M$, $I_M\setminus M_M\neq\emptyset$, $QM\setminus IM\neq\emptyset$

No existen los conceptos P_M y S_M.

- Caso $[M]>2$:

$I_M\cap P_M\cap Q_M\cap S_M=M_M$, $F_M(I_M\cup P_M\cup Q_M\cup S_M)\neq\emptyset$,
$I_M\setminus M_M\neq\emptyset$, $P_M\setminus I_M\neq\emptyset$, $Q_M\setminus M_M\neq\emptyset$, $S_M\setminus M_M\neq\emptyset$,

Mapas de cardinalidades

- Caso $[M]=2$:

$[M_M]=[I_M\setminus M_M]=[Q_M\setminus M_M]=[F_M\setminus(I_M\cup Q_M)]=\aleph$.

- Caso $[M]>2$:

$$[M_M]=[I_M\backslash M_M]=[P_M\backslash M_M]=[Q_M\backslash M_M]=[S_M\backslash M_M]$$

$$=[F_M\backslash(I_M\cup P_M\cup Q_M\cup S_M)]=\begin{cases} \boldsymbol{c} & [M]<\infty \\ 2^{\boldsymbol{d}} & [M]=d, d \text{ infinito} \end{cases}$$

Mapas de extensiones

- Para $[M]=2$ la colección

$$\{F_M\backslash(I_M\cup Q_M),\ I_M\backslash M_M,\ Q_M\backslash M_M,\ M_M\} \tag{18}$$

es una partición de F_M (ver figura 2a).

- Para $[M]>2$ la colección

$$\{F_M\backslash(I_M\cup P_M\cup Q_M\cup S_M),\ I_M\backslash M_M, P_M\backslash M_M,\ Q_M\backslash M_M,\ S_M\backslash M_M,\ M_M\} \tag{19}$$

es una partición de F_M (ver figura 2b).

Por tanto, las generalizaciones I_M, Q_M si $[M]=2$ e I_M, P_M, Q_M, S_M si $[M]>2$ del concepto de métrica M_M, junto con M_M generan una clasificación del concepto de F_M, que está formada por los conceptos que tienen por extensión cada uno de los conjuntos de las colecciones (18) y (19) respectivamente.

REFERENCIAS

[Ahu1976] Ahuja, M. (1976). An approach to the absolute value problems. *Mathematics Teacher*. 69. USA.

[Aus2000] Ausubel, D. P., Novak J. D. y H. Hanesian. (2000). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Trillas, México.

[Birk1936] Birkhoff, G. (1936). On the combination of topologies. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 26, pp.156.

[Brum1980] Brumfiel, C. (1980). "Teaching the absolute value function", *Mathematics Teacher,* 73 January 24-30. USA.

[Brun2005] Bruning, R. H. y otros. (2005). "*Psicología cognitiva y de la instrucción*". 4ta edición. Pearson Educación, S. A. Madrid. Printice Hall. ISBN. 84-205-4346-2

[Chit1917] Chittenden, W. (1917). *On the Equivalence of Ecart and Voisinage. Transactions of American Mathematical Society*. Vol. 18, No. 2, pp. 161-166.

[Lind 1926] Lindenbaum,A. (1926). Contributions à l'etude de l'espace métrique. I, Fundamenta Mathematicae, Vol. 8, pp 209-222.

[Mar2003] Martínez, A. (2003). Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominio Numérico y Series en la Educación Superior. Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas. Facultad de matemática, Física y Computación. Universidad Central, "Marta Abreu", Santa Clara. Cuba.

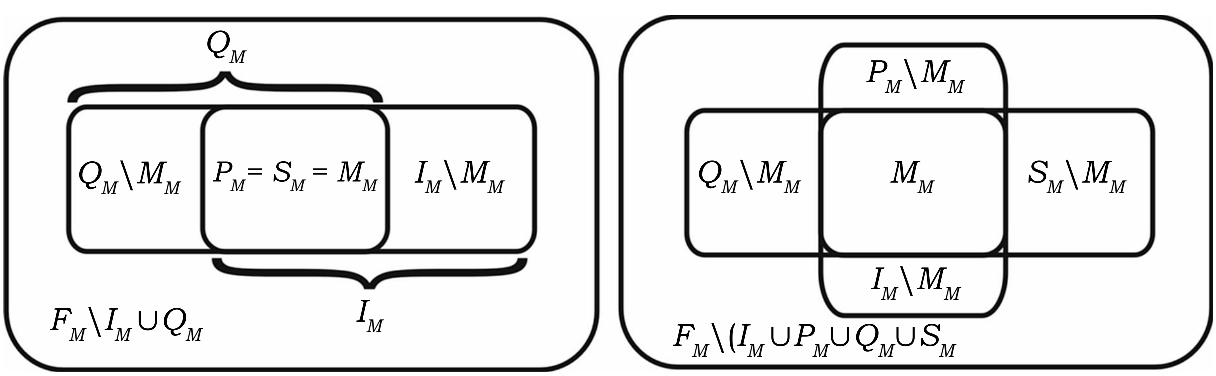
[Med1988] Mederos, O.B. y Martínez, M.A. (1988). Clasificación de las funciones elementales. *Revista Cubana de Educación Superior*. Vol. VIII, No. 3.

[Med1997] Mederos, O. B. y Martínez, A. (1997). Las operaciones generalización y restricción de conceptos. *Boletín de Matemática*. Universidad Nacional de Colombia. Volumen IV, Numero 2.

[Med1999] Mederos, O. B. y González, B. E. (1999). Una variante metodológica parael estudio de los conceptos a partir de una generalización. Foro de la *Revista Electrónica del Departamento de Matemáticas*. Facultad de Ciencias, UNAM. FORO.RED-MAT, Vol. 9.

[Med2007] Mederos, O. B. y Ruiz, A. M. (2007). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. *Revista NÚMEROS*. Número 67, Ideas y recursos para el aula.

[Med2009] Mederos, O. B. Mederos, B. J. (2009). Los ejemplos y contra ejemplos como herramientas para



a) Caso: $[M]=2$ b) Caso: $[M]>2$

Fig. 2. *Mapas de las extensiones de métricas y sus generalizaciones en dependencia del número de elementos de M.*

facilitar el proceso de generalización conceptual. Acta Latinoamericana de matemática educativa. Vol. 22. pp. 257-266.

[Men1927] Menger, K. (1927). Bemerkungen zur zweiten Untersuchung über allgemeine Metrik. Proc. Amsterdam, Vol. 30, pp. 710-714

[Men1931] Menger, K. (1931). Beiträge zur Gruppentheory I. Über einen Abstand in Gruppen. Math. Zeitschrift, Vol. 33, pp. 396-418

[Men1931a] Menger, K.(1931). Bericht über metrische Geometrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol. 40. pp. 201-219

[Pep1993] Peper, F. Shirazi, Mehdi y Nudihidiki, (1993). A noise suppressing Distance Measure for Competitive Learning Neural Networks IEEE Transactions on neural networks. Vol. 4 No. 1 January. 151-153.

[Rod2005] Rodríguez-López, J., Romaguera, S. y Sopena, A. (2005). Casi-métricas Difusas y Dominios de computación. Invstigación financiada por Generalitat Valenciana, mediante la ayuda GRUPOS03/027.

[Rom1999] Romanguera, S. y Schellekens, M. (1999). Quasi.metric properties of complexity spaces. Topology Appl. Vol. 18. pp. 311-322.

[Sink1979] Sink, S. (1979) "Understanding absolute value". *Mathematics Teacher* 72, March. 191-95.

[Steen 1995] Steen L.A. y Seebach J.A. (1995) Counterexamples in Topology. Holt, Reinehart and Winston Inc. New York. Pp. 34.

[Wils1931] Wilson, W.A. (1931). On quasi-Metric Spaces. *American Journal of Mathematics*, vol. 53, No. 3, pp. 675-684.

Abstract: In this paper, two sets of necessary teaching tasks are proposed, according to the authors point of view, to engage students in learning the concepts of characterization and conceptual generalization, respectively. Fourteen characterizations and four generalizations (pseudometric, semimetric, quasi-metric and metric without identity) of the concept of metricsare built. They are constructed also collections of elements of the extensions of the concept of metrics and each of the generalizations, which are used to prove that if the cardinality $[M]$ of the set M, on which are defined the concepts of metric and generalizations, is finite (resp. infinite) then their cardinalities are $2[M]$ (resp. $\aleph$).