Descripción de la categoría derivada de un álgebra de tipo $\mathbb{A}_3$ equiorientada con radical cuadrado cero

Lic. Bely Rodríguez Morales (b.rodriguez@matcom.uh.cu), Dr. José Fidel Hernández Advíncula (fidel@matcom.uh.cu)
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

Resumen

El presente trabajo está dedicado a exponer una representación diagramática de la categoría derivada de un álgebra no hereditaria. Se describe primeramente algunas propiedades de los triángulos de Auslander Reiten, los cuales constituyen una herramienta fundamental para la construcción del carcaj que representa a la categoría estudiada. Finalmente se expone el proceso de construcción del carcaj que representa a la categoría derivada.

Abstract

This work is dedicated to expose a diagrammatic representation for the derived category of a non-hereditary algebra. At first, the Auslander Reiten triangles and their properties are described. Finally, the construction process of the quiver which represents the derived category is explained.

1. Categorías de Krull Schmidt

Definición:

Se dice que $\mathcal{C}$ es una categoría de Krull-Schmidt si para todo objeto indescomponible $Z \in \mathcal{C}$ el anillo *End(Z)* es local, es decir, posee un único ideal maximal y además para cada $X,Y \in \mathcal{C}$ el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tiene estructura de *K*-espacio vectorial de dimensión finita.

Se puede probar que:

Teorema:

En toda categoría de Krull-Schmidt C se satisface el teorema de Krull-Schmidt, es decir, todo objeto de C se descompone como suma de objetos indescomponibles y esta descomposición es única salvo isomorfismos.

Definición:

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Krull Schmidt y $X,Y \in \mathcal{C}$. Se define $rad(X,y)$ como el subespacio de $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ formado por todos los morfismos no inversibles.

Y el conjunto $rad^2(X,Y)$ se define como los morfismos de la forma fg con $g \in rad(X,M)$, $f \in rad(M,Y)$ para cierto $M \in \mathcal{C}$. Además se denota

$$lrr(X,Y) = rad(X,Y)/rad^2(X,Y)$$

Definición:

Un morfismo $h:X \to Y$ se dice irreducible si:

- h no es sección,
- h no es retracción,
- Si $h = h_2\, h_1 h = h_2 h_1$ es una factorización cualquiera de h entonces se cumple que $h_2 h_2$ es retracción o $h_1 h_1$ es sección.

Se tiene entonces que:

Proposición:
Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Krull Schmidt y $X,Y \in \mathcal{C}$ objetos indescomponibles. Entonces $f: X \rightarrow Y$ es irreducible si y solo si $f \in rad(X,Y) \backslash rad^2(X,Y)$.

Ahora se presentará una forma de representar a C mediante un carcaj.

Definición:
Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Krull Schmidt entonces se define el carcaj $\Gamma(\mathcal{C})$ como sigue:

- Los vértices son las clases de isomorfismo de los objetos indescomponibles de $\mathcal{C}$, siendo $[X] = [X']$ si y solo si $X \simeq X'$.
- La cantidad de flechas del vértice $[X]$ a $[Y]$ viene dada por $d_{XY} = dimlrr(X,Y)$.

En caso de que $\mathcal{C} = \mathbf{mod}A$ entonces el carcaj $\Gamma(\mathbf{mod}A)$ recibe el nombre de carcaj de Auslander Reiten del álgebra A.

Para un estudio más profundo de las categorías de Krull Schmidt puede consultarse [1].

2. Triángulos de Auslander Reiten

Durante el resto de este trabajo $\mathcal{C} = (\mathcal{C}; \mathcal{T}; \boldsymbol{T})$ denotará una categoría triangulada y de Krull-Schmidt.

Definición (Categoría Derivada):
Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ la categoría de complejos sobre $\mathcal{A}$ cociente la relación de homotopía. Una categoría $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ se llama categoría derivada de $\mathcal{A}$ si existe un funtor $Q{:}\boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathcal{A}) \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$ que satisface:

(DC1) Si f es un cuasi-isomorfismo entonces $Q(f)$ es un isomorfismo.

(DC2) Cualquier funtor $F{:}\boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}$ que trasforme cuasi-isomorfismos en isomorfismos puede ser factorizado de forma única sobre $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathcal{A})$, es decir, existe un único funtor $G{:}\ \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = GQ$.

Nota: Si en la definición anterior se sustituye $\boldsymbol{\mathcal{K}}(\mathcal{A})$ por $\boldsymbol{\mathcal{K}}^b(\mathcal{A})$ se obtiene entonces la categoría derivada de complejos acotados que se denota por $\boldsymbol{\mathcal{D}}^b(\mathcal{A})$.

El teorema que asegura la existencia de la categoría derivada así como las propiedades fundamentales sobre categorías derivadas pueden ser consultados en [2].

En el caso en que A es un algebra de Artin se denota por $\boldsymbol{\mathcal{D}}^b(\mathcal{A})$ a la categoría derivada de complejos acotados de $\mathbf{mod}A$.

Esta sección se centrará en la descripción de herramientas que permitan estudiar el carcaj de Auslander Reiten de $\boldsymbol{\mathcal{D}}^b(\mathcal{A})$, el cual se denota por $\Gamma(\boldsymbol{\mathcal{D}}^b(\mathcal{A}))$.

Las demostraciones que no sean desarrolladas aquí se pueden estudiar en [1].

Durante todo este trabajo $\mathcal{C} = (\mathcal{C}; \mathcal{T}; \boldsymbol{T})$ denotará una categoría triangulada y de Krull-Schmidt.

Definición:
Se dice que un triángulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \mathbf{T}X$ es un triángulo de Auslander Reiten si:

(AR1) X y Z son indescomponibles,

(AR2) $w \neq 0$,

(AR3) Si $f{:}\ W \rightarrow Z$ no es retracción entonces existe $f'{:}\ W \rightarrow Z$ tal que $f = vf'$, visto en forma de diagrama conmutativo quedaría: $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

Definición:
Se dice que $\mathcal{C}$ tiene triángulos de Auslander Reiten si para todo objeto indescomponible $Z \in \mathcal{C}$ existe un triángulo de Auslander Reiten de la forma:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \mathbf{T}X$$

Proposición:
Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \mathbf{T}X$ es un triángulo de Auslander Reiten entonces u y v son irreducibles.

Si A es una K-álgebra se conoce entonces que el funtor de Nakayama

$$v = DHom_A(—,A):{}_AP\to {}_AI$$

induce una equivalencia entre las categorías ${}_AP$ e ${}_AI$, más aún, una cuasi-inversa para el funtor de Nakayama es $v^{-} = DHom_A(D(A_A),—)$. Es decir, existe una transformación natural inversible $\alpha_p:DHom(P,—)\to Hom(—,vP)$ o de forma equivalente, para cada $X \in \mathrm{mod}A$ existe una dualidad de espacios vectoriales

$$\langle\cdot,\cdot\rangle: \mathrm{Hom(P,X)} \times \mathrm{Hom(X,vP)}\to \mathrm{K},\ (\xi,\eta)\mapsto \langle\xi,\eta\rangle,$$

tal que $\langle\mu\, \xi,\eta\rangle = \langle\xi, \eta\mu\rangle$ y $\langle\xi\pi, \upsilon\pi\eta\rangle = \langle\xi, \eta\mu\rangle$ para todo morfismo $\mu\in$ **mod** $A\mu$ y todo morfismo $\pi\in{}_AP$.

Teorema:

Sea A una K-álgebra de dimensión finita y de dimensión global finita. Entonces la categoría $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ tiene triángulos de Auslander Reiten.

Demostración:

El funtor de Nakayama induce una equivalencia, que se seguirá denotando por v, entre las categorías $\mathcal{K}^b({}_AP)$ y $\mathcal{K}^b({}_AI)$ y una transformación natural inversible

$$\alpha_{P^\cdot}: DHom(P^\cdot,—)\to Hom(—,vP^\cdot).$$

De hecho si $X \in \mathcal{K}^b(\mathbf{mod}A)$, la dualidad asociada

$$\langle\cdot,\cdot\rangle: \backslash Hom(P^\cdot,X) \times Hom(X,vP^\cdot)\to K,$$

se define como

$$\langle\xi,\eta\rangle=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\langle\xi^i,\eta^i\rangle.$$

Como A tiene dimensión global finita entonces $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ es equivalente (como categoría triangulada) $\mathcal{K}^b({}_AP)$ y a $\mathcal{K}^b({}_AI)$. Luego todo objeto de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ puede ser escrito en la forma $P^\cdot$ donde $P^\cdot\in \mathcal{K}^b({}_AP)$.

Supóngase ahora que $P^\cdot$ es indescomponible en $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$y sea $\varphi \in D\ Hom(P^\cdot,P^\cdot)$ la forma lineal definida sobre $End(P)$ que se anula sobre $rad(End(P))$ y cumple $\varphi(id_p) = 1$. Considérese $\alpha_{P^\cdot}(\varphi) \in D\ Hom(P^\cdot,vP^\cdot)$, $\alpha_{P^\cdot}(\varphi)$ es una forma lineal no nula tal que $\alpha_{P^\cdot}(\varphi)\, f = 0$ siempre que el morfismo $f \in \mathcal{D}^b(A)$ no sea una retracción. Esto implica que

$$T^{-1}vP \longrightarrow Mc(T^{-1}\alpha P^\cdot(\varphi)) \longrightarrow P^\cdot \xrightarrow{\alpha P^\cdot(\varphi)} vP$$

satisface (AR3). Luego es un triángulo de Auslander Reiten.

El siguiente lema afirma que los triángulos de Auslander Reiten de una categoría triangulada $\mathcal{C}$ llevan la información del carcaj $\Gamma(\mathcal{C})$.

Lema:

Sea $\mathcal{C}$ una categoría triangulada de Krull Schmidt que posee triángulos de Auslander Reiten, X y M objetos indescomponibles en $\mathcal{C}$ y $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}\mathbf{T}X$ un triángulo de Auslander Reiten. Sea $Y=\oplus_{i=1}^{k}Y_i^{di}$ una descomposición de Y en objetos indescomponibles tales que $Y_i \simeq Y_i$ implica $i = j$. Entonces $lrr(X,M) \neq 0$ si y solo si $M_i \simeq Y_i$ para algún i y además se tiene $d_i = d_{XM}$.

3. Estudio de la categoría $\mathcal{D}^b(A)$

En esta sección se darán resultados y métodos para la construcción del carcaj de la categoría derivada de complejos acotados de **mod**A.

Proposición:

Si A es hereditaria entonces los objetos indescomponibles de $\mathcal{D}^b(A)$ son isomorfos a complejos concentrados cuyo objeto concentrado es indescomponible.

Demostración:

Como $\mathcal{D}^b(A)$ es equivalente a $\mathcal{K}^b({}_AI)$ basta probar que todo indescomponible en $\mathcal{K}^b({}_AI)$ es isomorfo a algún

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow Ij \xrightarrow{d^j} I^{j+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

siendo d^j epimorfismo.

Sea $I^\cdot$ un indescomponible de $\mathcal{K}^b({}_AI)$. Trasladando, en caso de que sea necesario, se puede asumir que $I^\cdot$ tiene la forma:

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \longrightarrow \ldots,$$

donde $I^0 \neq 0$. Sea $I^0 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} I^1$ una factorización de d^0 con g epimorfismo y h monomorfismo. Como A es hereditaria se tiene que X es inyectivo y h es una sección. Luego se tiene un isomorfismo en **mod**A de la forma $X\oplus C\xrightarrow{(h\ u)} I^1$.

Como $d^1h = 0$, se tiene un isomorfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0\oplus 0 \arrow[r, "\begin{pmatrix}0&0\\0&g\end{pmatrix}"'] & X\oplus 0 \arrow[r, "\begin{pmatrix}d^1u&0\\0&0\end{pmatrix}"'] \arrow[u, "(h\ u)"] & 0\oplus I^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix}d^2&0\\0&0\end{pmatrix}"'] & 0\oplus I^3 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

De donde

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es cero o

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^3 \longrightarrow \cdots$$

es cero. En el primer caso se deduce que el complejo $I^{\cdot}$ tiene longitud menor y se reitera el razonamiento. En el segundo caso $I^{\cdot}$ es isomorfo a

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Nota: En el caso de que *A* no sea una *K*-álgebra hereditaria se sigue cumpliendo que los concentrados de objetos indescomponibles serán siempre indescomponibles en $\mathcal{D}^b(A)$ pero, además existirá al menos un objeto indescomponible no isomorfo a un concentrado.

Proposición:

La séxtupla

$$T^{-1}I_a \xrightarrow{\binom{T^{-1}p}{-T^{-1}v'}} T^{-1}I_a/SOC(I_a)\oplus rad(P_a) \xrightarrow{(T^{-1}v\ i)} P_a \to I_a$$

es un triángulo de Auslander Reiten.

4. Análisis de la categoría $\mathcal{D}^b(A)$ en un álgebra no hereditaria

El proceso de construcción del carcaj que representa a la categoría $\mathcal{D}^b(A)$ para un álgebra no hereditaria suele ser en la mayoría de los casos muy complejo. Esto se debe a que no existe un método sencillo que permita describir $\Gamma(\mathcal{D}^b(A))$ para un álgebra no hereditaria como sucede en el caso hereditario.

Esta sección tiene como objetivo describir el proceso de construcción de $\mathcal{D}^b(A)$ cuando *A* es el álgebra dada por el carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ sujeto a las relaciones dadas por el ideal $\langle\beta\alpha\rangle$ el cual coincide con radical cuadrado del carcaj.

No se pretende ser demasiado exhaustivo en la justificación de todos los resultados sino más bien ilustrar las diferentes técnicas que se utilizan para la construcción de dicho carcaj.

Nota: Se tomará el convenio de identificar todo módulo $P\in$ **mod***A* con el complejo concentrado en 0 asociado a él en la categoría $\mathcal{D}^b(A)$. Así que cuando se diga que un módulo *P* en $\mathcal{D}^b(A)$ es vértice del carcaj deberá entenderse que

$$\cdots \to 0 \to P \to 0 \to \cdots \text{ es un vértice del carcaj.}$$

Del carcaj de Auslander Reiten del álgebra de *A*, cuya estructura es

$$\begin{tikzcd} & & & P_1 \arrow[dr] & \\ P_3 \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] \arrow[dr] & & S_2 \arrow[ur] \arrow[rr, phantom, "\cdots\cdots"] & & I_1 \\ & P_2 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

se tiene que los concentrados de los vértices de dicho carcaj son indescomponibles en $\mathcal{D}^b(A)$, es decir, son indescomponibles: P^3, P^2, P^1, S^2 e I^1. Conviene ahora buscar las expresiones que representan a S^2 y a I^1 en la categoría de complejos acotados de proyectivos que es equivalente a $\mathcal{D}^b(A)$ y para esto basta con calcular resoluciones proyectivas para estos módulos:

$$P_3 \to P_2 \to S_2 \to 0,$$

$$P_3 \to P_2 \to P_1 \to I_1 \to 0.$$

Entonces S_2 e I_1 en $\mathcal{D}^b(A)$ serían respectivamente

$$\cdots \to 0 \to P_3 \to P_2 \to 0 \to \cdots \text{ y}$$

$$\cdots \to 0 \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to 0 \to \cdots.$$

Se puede comprobar que $\cdots \to 0 \to P_2 \to P_1 \to 0 \to \cdots$ es indescomponible. Además analizando los morfismos no sobreyectivos de la forma $P_1^{S_1}\oplus P_2^{S_2}\oplus P_3^{S_3} \to P_1^{r_1}\oplus P_2^{r_2}\oplus P_3^{r_3}$ se puede probar que el complejo $\cdots \to 0 \to P^2 \to P^1 \to 0 \to \cdots$ es el único indescomponible no isomorfo a un concentrado. Además el complejo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial} P_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es isomorfo al cono del morfismo $\partial: P_2 \to P_1$, el cual se denota por $Mc(\partial)$.

Analizando el carcaj de Auslander Reiten de *A* se tiene la existencia de un morfismo irreducible $S_2 \to P_1$. Además se tiene el siguiente morfismo irreducible de $S_2[0] \to P_3[-1]$:

$$\begin{tikzcd} S_2 = & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ P_3[-1] & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Entonces la construcción de $\Gamma(\mathcal{D}^b(A))$ comenzaría:

$$\begin{tikzcd} & P_1[0] \\ S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & P_3[-1]. \end{tikzcd}$$

Luego de la resolución proyectiva que representa a I_1 se deduce la existencia del morfismo irreducible

$P_3[-1] \to Mc(\partial)[0]$ dado por:

$$\begin{tikzcd} P_3[-1] = & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ Mc(\partial)[0] = & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Se puede ver que el morfismo de $P_1[0] \to Mc(\partial)[0]$ dado por

$$\begin{tikzcd} P_1[0] = & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ Mc(\partial)[0] = & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

es irreducible. Entonces la construcción seguiría:

$$\begin{tikzcd} & P_1[0] \arrow[dr] & \\ S_2 \arrow[ur] & & Mc(\partial)[0] \arrow[dl] \\ & P_3[-1] \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Ahora se deben buscar morfismos que salgan del cono de ∂. Se tienen los morfismos irreducibles $Mc(\partial)[0] \to P_2[-1]$ y $Mc(\partial)[0] \to I_2[0]$ dados respectivamente por

$$\begin{tikzcd} Mc(\partial)[0] = & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\partial"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ P_2[-1] = & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} Mc(\partial)[0] = & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ I_1[0] = & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Entonces el proceso de construcción continúa:

$$\begin{tikzcd} & P_1[0] \arrow[dr] & & P_2[-1] \\ S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Mc(\partial)[0] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & P_3[-1] \arrow[ur] & & I_1[0] \end{tikzcd}$$

Aunque A no es hereditaria para los vértices j del carcaj asociado a A tales que el módulo E, descrito en la sección anterior, sea no nulo se cumplirá que el siguiente triángulo será de Auslander Reiten:

$$I_j \longrightarrow \mathrm{T}rad(P)_j \oplus I_j/SOC(I_j) \longrightarrow \mathrm{T}P_j \longrightarrow \mathrm{T}I_j$$

Donde T es el funtor de translación [-1].

Tal es el caso de los vértices 1 y 3 del carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$.

Y por tanto se tienen los triángulos de Auslander Reiten:

$$I_1[0] \longrightarrow S_2[-1] \longrightarrow P_1[-1] \longrightarrow I_1[-1]$$

$$P_2[0] = I_3[0] \longrightarrow S_2[0] \longrightarrow P_3[-1] \longrightarrow I_3[-1]$$

Aplicando una translación al último triángulo se tiene:

$$P_2[-1] = I_3[-1] \longrightarrow S_2[-1] \longrightarrow P_3[-2] \longrightarrow I_3[-2]$$

De la proposición enunciada en la sección referente a los triángulos de Auslander Reiten se tiene que los dos primeros morfismos que aparecen en los triángulos anteriores son irreducibles. Entonces el paso siguiente para construir el carcaj $\Gamma(\mathcal{D}^b(A))$ sería:

$$\begin{tikzcd} & P_1[0] & & P_2[-1] & & P_1[-1] \\ S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & Mc(\partial)[0] \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2[-1] \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & P_3[-1] & & I_1[0] & & P_3[-2] \end{tikzcd}$$

Pero aquí ya se ve una regularidad en el gráfico y razonando de la misma forma se continua desarrollando el carcaj a ambos lados. Luego el carcaj que representa a la categoría derivada de complejos acotados de módulos sobre $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ sujeto a las relaciones dadas por $\langle \beta\alpha \rangle$ es:

Bibliografía

HAPPEL, DIETER (1988): Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras. Cambridge University Press, 1988.

BARRY MITCHEL Theory of Cathegories ACADEMIC PRESS New York and London, 1965.

SERGEI I. GELFAND, YURI I. MANIN Methods of Homological Algebra. Springer, 1989.

C.CIBILS, F.LARRIÓN y L.SALMERÓN Métodos diagramáticos en Teoría de Representaciones. Monografía del Instituto de Matemáticas de la UNAM, No. 11, México, 1981.

M. AUSLANDER, I. REITEN, S. SMALO, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge studies in advanced mathematics, 36, 1995, Cambridge University Press.