Articulo Original

Comparación asintótica de sucesiones numéricas infinitas y complejidad temporal de algoritmos, una propuesta didáctica

Asymptotic comparison of infinite numerical sequences and time complexity of algorithms, a didactical proposal

Antonio Rey Roque [1*] http://orcid.org/0000-0003-1205-4981
Alexander Rodríguez Rabelo [1]. https://orcid.org/0000-0002-3591-1045

[1]Universidad de las Ciencias Informáticas.

*Autor para la correspondencia: antrey@uci.cu

RESUMEN

El estudio de la complejidad de algoritmos, en particular la complejidad temporal es imprescindible en la formación del ingeniero en informática. Tanto el lenguaje que se utiliza, como el propio análisis asintótico que es la esencia en la comparación algoritmos no articula con el que tradicionalmente se aplica en el tema de Sucesiones y series numéricas, por esta razón el propósito del presente trabajo es presentar una propuesta didáctica para el tema en Matemática I que incluya los elementos necesarios para integrar el estudio de las sucesiones con la complejidad algorítmica utilizando la notación de Bachmann-Landau, para lo cual se estudió el programa analítico de la disciplina Programación, la bibliografía sobre la complejidad algorítmica y la didáctica de la Matemática. Se constató que el proceso de aprendizaje al estudiar el tema de complejidad de algoritmos fluyó mucho mejor en los estudiantes sujetos de la investigación.

Palabras clave: secuencia didáctica, sucesiones y series, notación asintótica, complejidad algorítmica, comparación asintótica

ABSTRACT

The study of the complexity of algorithms, in particular the temporal complexity, is essential in the training of the computer engineer. Both the language that is used, as well as the asymptotic analysis itself, which is the essence in the comparison of algorithms, does not articulate with the one that is traditionally applied in the subject of Sequences and numerical series, for this reason the purpose of this work is to present a didactic proposal for the subject Mathematics I that includes the necessary elements to integrate the study of sequences with algorithmic complexity using the Bachmann-Landau notation, for which the analytical program of the Programming discipline, the bibliography on algorithmic complexity and the didactics of Mathematics was studied. It was verified that the learning process when studying the topic of algorithm complexity flowed much better in the students who were the subjects of the research.

Keywords: didactic sequence, sequences and series, asymptotic notation, algorithmic complexity, asymptotic comparison.

Recibido: 10/7/23

Aceptado: 5/9/23

INTRODUCCIÓN

La disciplina Técnicas de Programación por Computadoras incluye entre sus temáticas el estudio de la complejidad temporal de algoritmos, la comprensión de esta materia pasa por tener una adecuada noción del infinito matemático, el comportamiento de sucesiones numéricas infinitas, la comparación asintótica de sucesiones, la notación asintótica entre otros temas que debe tratar la Matemática en el ciclo básico de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas de la universidad homónima.

En el recién implementado Plan E de la carrera, el diseño de las asignaturas de la disciplina Matemática fue concebido de manera que cada una de ellas centrara uno de los conceptos esenciales: Transformaciones lineales en Álgebra; Límite en Matemática I; Derivada en Matemática II e Integral definida en Matemática III, y en las últimas tres el concepto de límite como eje transversal.

La novedad más importante está en colocar el estudio de las sucesiones y series numéricas para la primera de las tres asignaturas de Cálculo, orden que no es usual en las carreras de ingeniería, aunque autores como (Valdés y Sánchez, 2017) y programas de ingeniería informática de algunas universidades (Universidad de Murcia, 2023) lo incluyen en la primera asignatura de Cálculo.

Incluir el estudio de las sucesiones y series en el primer año de la carrera es útil además para articular con la Matemática Discreta y el manejo de patrones, listas y arreglos en las asignaturas de Programación.

Parte de la eficiencia de un algoritmo está en el tiempo de ejecución del mismo, lo que se conoce como complejidad temporal, para comprender y utilizar las herramientas que permiten medir la eficiencia en los códigos es importante la llamada notación asintótica (Ramesh y Gowtham, 2017), que también se relaciona con la Inteligencia Artificial, en particular con el maching learning (Russell, 2010), (Lim, Loh y Shih, 2000).

El propósito de este trabajo es presentar una propuesta didáctica para el estudio de las sucesiones y series numéricas en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas, que articule adecuadamente con el estudio de la complejidad temporal de algoritmos que incluye la disciplina Técnicas de Programación por Computadoras y de esta forma resolver el problema que constituye la falta de coherencia entre el lenguaje y el enfoque no asintótico, utilizado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las sucesiones y series en la asignatura Matemática I.

DESARROLLO

Materiales y métodos

La investigación partió del estudio del programa de la disciplina Técnicas de Programación del Plan de estudios E de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas, para identificar los elementos que de la Matemática eran necesarios para la comprensión adecuada de la temática relacionada con la complejidad temporal de algoritmos. Fue necesario, además, el estudio de la notación asintótica, en particular la notación O-grande y cómo introducirla en el tema de sucesiones y series de manera que se articulara para que los estudiantes entendieran la complejidad temporal de algoritmos, no solo desde punto de vista conceptual sino también el lenguaje de este tipo de notación.

El trabajo integrado de los autores, uno de formación pedagógico-matemática y el otro ingeniero en Ciencias Informáticas, pero con vasta experiencia en la enseñanza de la Matemática, fue determinante para la concepción, diseño e implementación de la propuesta didáctica para el tema de sucesiones y series.

La observación de clases, el análisis de los resultados docentes en las asignaturas de Programación, las entrevistas a estudiantes y profesores sobre la efectividad de la propuesta también fueron métodos empleados en el trabajo.

ESULTADOS Y DISCUSIÓN

De los algoritmos correctamente construidos se espera que en un tiempo finito produzcan los resultados esperados, pero con eficiencia la cual se expresa en la cantidad de recursos que requiere para su ejecución: tiempo y cantidad de memoria. El estudio de la eficiencia de un algoritmo se conoce como *análisis de la complejidad algorítmica*, el trabajo se centra en el coste de tiempo, es decir, en la complejidad temporal y permite comparar los costes de diferentes algoritmos para resolver un mismo problema (Gómez y Cervantes, 2014).

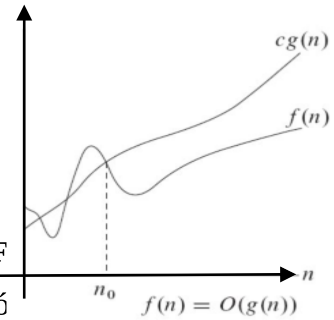
El tiempo de ejecución de un algoritmo se expresa matemáticamente mediante una función $T:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ donde n número de operaciones o tamaño de los datos de entrada. De acuerdo con el *Principio de invariancia* el tiempo de ejecución de dos implementaciones del mismo algoritmo son proporcionales entre sí, por lo que el tiempo T de ejecución de un algoritmo depende solo de la naturaleza del mismo y no de su implementación. Se define por tipo de algoritmo un orden temporal para lo cual se establece la comparación asintótica con funciones T. Se dice que el tiempo de ejecución de un algoritmo es del orden de $T(n)$, asintóticamente, si existen constantes reales c y n_0 tal que para la implementación I la corrida ocurre a lo sumo en $cT(n)$ unidades de tiempo $\forall n \geq n_0$ (Gómez y Cervantes, 2014).

Entonces es necesario comparar asintóticamente funciones infinitas $T:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$, es decir, establecer un orden para las funciones $T(n)$ o establecer *cotas de complejidad* o *medidas asintóticas* para medir cuán rápido crece el tiempo de ejecución del algoritmo al aumentar el número de datos del mismo. Para ello se utiliza la notación asintótica o de Bachmann-Landau, en particular las notaciones O,Ω,Θ, todas considerando el *peor caso*, el cual es el que se estudia en la carrera y que se define por Villalpando (2003) como el caso en que el tiempo es el mayor posible.

Cota asintótica superior: Notación:

Se dice que la función $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ es un $O-grande$ de g si:

$\exists c\in\mathbb{R}^{+},\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0, f(n)\leq cg(n)$



F

Cota asintótica inferior: Notació

Se dice que la función $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ es un Ω de g si:

$\exists c\in\mathbb{R}^{+},\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0, f(n)\geq cg(n)$

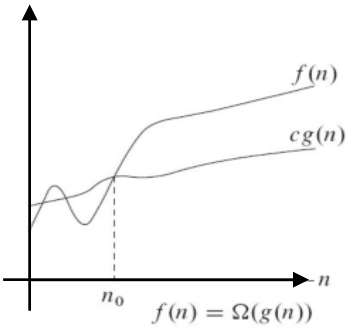


Figura 2 (Villalpando, 2003)

Cota asintótica ajustada: Notación Θ

Se dice que la función $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ es un Θ de g si:

$\exists c\in\mathbb{R}^{+},\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0, c_1g(n)\leq f(n)\leq c_2g(n)$

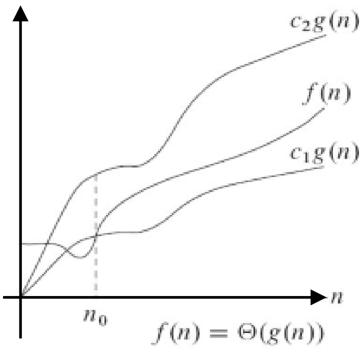


Figura 3 (Villalpando, 2003)

La complejidad de algoritmos se estudia en la asignatura Estructura de Datos I de la disciplina Técnicas de Programación por Computadoras de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas, particularmente en algoritmos iterativos y recursivos, considerando el peor caso y utilizando cotas asintóticas superiores principalmente, es decir, la notación $O - grande$ (Programa analítico, 2023).

Una vez realizado el análisis del contenido sobre complejidad algorítmica que enfrentan los estudiantes en la asignatura Estructura de Datos I, la cual reciben en el tercer período, se decidió presentar al colectivo de la carrera la variante en la cual el tema de *Sucesiones y series* pasa a la asignatura Matemática I, concebida para trabajar el concepto de *límite*, pero a diferencia de lo tradicionalmente hecho en todas las variantes de programas para la disciplina Matemática en la carrera y con el propósito de articular con el tema de complejidad algorítmica, el tratamiento de la comparación de sucesiones infinitas se realiza mediante la comparación asintótica utilizando la notación de Bachmann-Landau.

Se estructuró el sistema de cocimientos del tema *Sesiones y series* en una secuencia didáctica, entendiendo como tal un “conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos” (Albarracín, 2022):

- Definición de sucesión numérica como una función real en los naturales: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($f(n) = a_n$)
- Definición y análisis de la convergencia de una sucesión, límite de una sucesión: $\lim_{n\to\infty} a_n$

Para las sucesiones convergentes se cumple que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y de los casos de divergencia interesa prestar atención cuando $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, para introducir la comparación asintótica a partir del *orden* de los infinitos como indicador de la rapidez de *crecimiento al infinito* de la sucesión.

Sean dos sucesiones divergentes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, para establecer la comparación se utiliza el límite del cociente pues el resultado permite colocar en orden al numerador con respecto al denominador, en este caso *no algebraicamente*, sino por tratarse del límite, *asintóticamente*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \leftrightarrow ord(a_n) > ord(b_n) \leftrightarrow a_n > b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \leftrightarrow ord(a_n) < ord(b_n) \leftrightarrow a_n < b_n$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \leftrightarrow ord(a_n) = ord(b_n) \leftrightarrow a_n = b_n$

Después del análisis de varios ejemplos se estable el orden ascendente de infinitos por su tipología funcional:

logaritmos – potencias – exponenciales – factoriales – potenciales-exponenciales

$\log(n) - n^p (p \geq 1) - a^n (a > 1) - n! - n^n$

Se introduce la notación asintótica enfatizando en $O - grande$ que es la que trata la asignatura de Estructura de Datos, aunque se muestran y explican las demás:

$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \geq 0$ o ∞ entonces $a_n = O(b_n)$ es decir, b_n es una cota superior asintótica de a_n, esto es: $a_n \leq k \cdot b_n$, para el caso en que $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ se trata de una cota estricta y suele usarse la notación $o - pequeña$. Si $0 < c < \infty$ es preferible utilizar la notación Θ, aquí $k_1 \cdot b_n < a_n < k_2 \cdot b_n$.

Si $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces $a_n = \omega(b_n)$, $a_n > k \cdot b_n$.

En resumen:

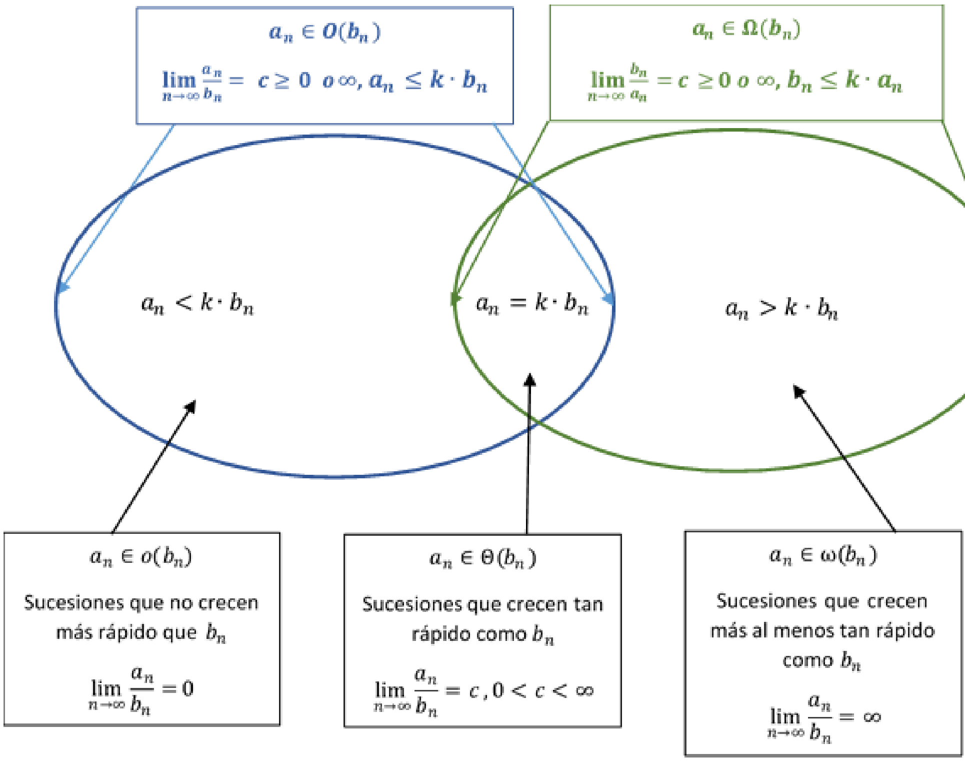


Figura 4 (Elaboración de los autores)

El análisis asintótico teniendo en cuenta el orden conocido de las sucesiones infinitas genéricamente clasificadas permite evaluar límites de cocientes con la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ con relativa facilidad a la vez que prepara a los estudiantes para comprender mejor lo que estudiará sobre complejidad temporal de algoritmos. En la propia asignatura de Matemática I y en el mismo tema de sucesiones y series este enfoque es utilizado para la aplicación del criterio de comparación al estudiar la convergencia de series.

A los efectos de que la visualización gráfica contribuya a la mejor comprensión de las comparaciones entre infinitos, se elaboró para utilizar como medio de enseñanza y a la vez herramienta para resolver problemas y ejercicios, un objeto digital con el software Geogebra, que además permite trabajar el resto de las otras seis indeterminaciones:

Comparando $\{2n-3\}$ y $\{3n^2-5n\}$

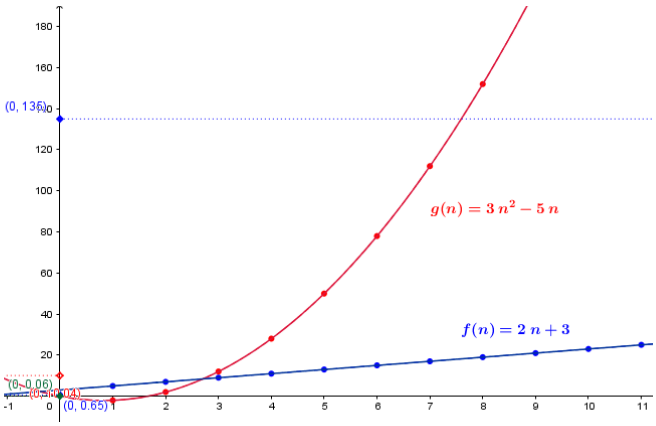


Figura 5 (Elaboración de los autores con Geogebra)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2n-3}{3n^2-5n} = 0$, entonces $2n-3 = O(3n^2-5n)$

Aquí la relación es estricta, es decir: $2n-3 < 3n^2-5n$ para $n \geq 3$

Comparando $2n-3$ y $n+8$

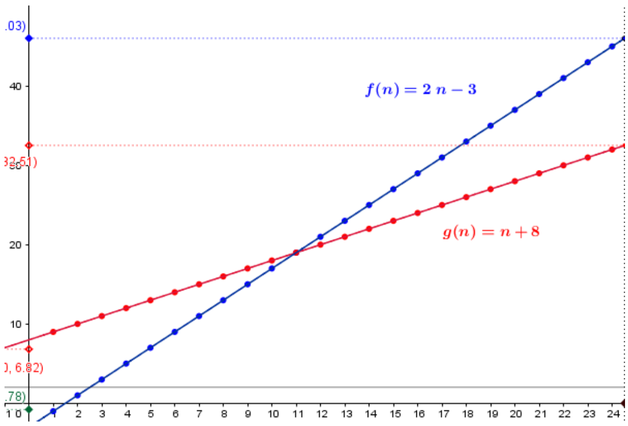


Figura 6 (Elaboración de los autores con Geogebra)

$\lim_{x\to\infty}\frac{2n-3}{n+8}=2$, entonces $2n-3=\Theta(n+8)$

Se trata de dos infinitos del mismo orden, ambos pertenecen a la clase $O(n)$

La secuencia didáctica descrita se aplicó a las cohortes del curso 2020-2021, estudiantes que actualmente cursan el cuarto año de la carrera, en resumen, el impacto constatado en los resultados y opinión de estudiantes y profesores fue el siguiente:

- Los estudiantes reconocieron la notación asintótica y aunque no la recordaban del todo ni todos, resultó más natural su comprensión al relacionarla con el estudio de las sucesiones hecho en Matemática I.
- Para los profesores de Programación resultó muy interesante impartir la temática de *complejidad algorítmica* partiendo de lo que los estudiantes estudiaron en Matemática.

CONCLUSIONES

El enfoque tradicional en el proceso de enseñanza del tema Sucesiones y series en la disciplina Matemática no integra los elementos necesarios para que el estudio de la complejidad algorítmica en la disciplina de Técnicas de Programación logre una articulación coherente en cuanto a lenguaje e interpretación del infinito matemático.

El tratamiento asintótico en la comparación de sucesiones infinitas utilizando la notación de Bachmann-Landau no solo articula correctamente con el tema de *complejidad algorítmica*, también para dar mayor significación al propio estudio de las sucesiones y series numéricas.

A partir de una mayor integración entre las disciplinas, sobre este tema en particular, se continúa profundizando, mediante el trabajo científico-metodológico conjunto, que incluya la participación de profesores de una u otra disciplina en cada asignatura, aprovechando la fortaleza de que varios de los profesores de Matemática son ingenieros en Ciencias Informáticas,

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albarracín Tobar, A. N. (2022). Secuencias didácticas como estrategia pedagógica en la enseñanza de las ciencias naturales. *Revista Latinoamericana De Educación Científica, Crítica Y Emancipadora, 1*(1), 505–523. Recuperado de https://www.revistaladecin.com/index.php/LadECiN/article/view/48

Gómez, M. C., Cervantes, J. (2014). *Introducción al análisis y diseño de algoritmos*. México: Publidisa

Lim, T. S. Loh, W. Y. Shih, Y. S. (2000). A comparison of prediction accuracy, complexity, and training time of thirty-three old and new classification algorithms. *Machine learning*, *40*(3), 203-228. https://doi.org/10.1023/A:1007608224229

Programa analítico de la asignatura Estructura de Datos I (2023). Universidad de las Ciencias Informáticas.

Ramesh, V. P. Gowtham, R. (2017). Asymptotic notations and its applications. *Ramanujan Math. Soc., Math. News, 28* (4), 10–16. Recuperado de http://www.math-analytics.org/vpramesh/articles/RMS.pdf

Russell, S. J. (2010). Artificial intelligence a modern approach. Pearson Education, Inc.

Universidad de Murcia. Recuperado de https://www.um.es/web/estudios/grados/informatica/2022-23/guías

Valdés, C., Sánchez, C. (2017). *Análisis de funciones de una variable real*. Habana. Félix Varela.

VillalpandoB., J. F., (2003). Análisis asintótico con aplicación de funciones de Landau como método de comprobación de eficiencia en algoritmos computacionales. *e-Gnosis,* (1),0. Recuperado de http://www.e-gnosis.udg.mx/index.php/e-gnosis/article/viewFile/17/16

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existe conflicto de intereses. Ambos autores del artículo declaramos que estamos de total acuerdo con lo escrito en este informe y aprobamos la versión final.

Contribución de autoría

La concepción del trabajo científico fue realizada por Antonio Rey Roque, quien además lideró lo relacionado con los temas de Matemática y el diseño y elaboración con GeoGebra del objeto de enseñanza aprendizaje.

Alexander Rodríguez Rabelo, lideró lo relacionado con la complejidad algorítmica y la Programación.

Ambos se encargaron de la revisión final del artículo.