

DOMINANCIA DE GRAFOS EN Z_p^n Y EN $Z_3^n \times Z_2^m$

Eduardo Piza Volio*, Centro de Investigación en Matemática Pura y Aplicada (CIMPA)
Universidad de Costa Rica, Costa Rica

RESUMEN

En este artículo se describe el problema de la dominación de los grafos del tipo Z_p^n y mezclas del tipo $Z_3^n \times Z_2^m$ a través de subconjuntos dominantes de vértices de tamaño mínimo. Se introduce un algoritmo del tipo de recocido simulado para calcular cotas superiores de la cardinalidad de estos subconjuntos dominantes minimales. Se demuestra la eficiencia del algoritmo al comparar los resultados obtenidos con los ya conocidos correspondientes a algunas clases de grafos, entre ellos los llamados grafos del "football pool problem". Se establecen cotas superiores en algunos de los grafos del tipo Z_p^n , con $p \geq 4$.

ABSTRACT

In this paper we describe the problem of finding minimal domination subsets for graphs of the kind Z_p^n and $Z_3^n \times Z_2^m$. We use a simulating annealing algorithm to compute upper bounds of the cardinality of sub-minimal dominating subsets. We demonstrate the effectiveness of the algorithm by comparing the results with a previously, studied class of graphs, including the so-called "football pool" graphs and others. We give some new upper bounds for graphs of the kind Z_p^n , with $p \geq 4$.

Key words: Graph domination, combinatorics, simulating annealing, football pool problem.

MCS: 68R05, 68R10, 05C69, 90C27.

1. INTRODUCCIÓN

El tema de la dominación de grafos por dominios de torre ha sido profusamente estudiado en los últimos años [Blokhuis-Lam (1984), Davies-Royle (1997), Härmäläinen-Rankinen (1991), Koschnick (1993), Van Laarhoven et al. (1989), Östergård-Härmäläinen (preprint), Östergård (1994) y Wille (1987)], encontrándose diversidad de soluciones apropiadas (en ocasiones exactas) a los problemas planteados. Dentro de la amplia gama de métodos utilizados para hallar subconjuntos mínimos dominantes, los más promisorios parecieran ser aquellos métodos heurísticos basados en técnicas de la optimización combinatoria, tales como *búsqueda tabú*, recocido simulado y algoritmos genéticos. Este artículo precisamente describe un método para hallar subconjuntos dominantes cercanos al mínimo, utilizando un algoritmo del tipo recocido simulado [Aarts-Korst (1990), Van Laarhoven (1989) y Piza et al. (1998)].

A lo largo de este artículo p denotará a un número natural ≥ 2 y n y m serán números naturales, con $n + m \geq 1$. Estaremos trabajando concretamente con los grafos F_p^n y $F_{3,2}^{n,m}$, los cuales se definen de la siguiente manera:

- Los conjuntos de vértices de F_p^n y $F_{3,2}^{n,m}$ son respectivamente $V = Z_p^n$ y $V = Z_3^n \times Z_2^m$.
- En ambos casos estipulamos que dos vértices cualquiera son adyacentes si tienen *distancia Hamming* igual a 1, esto es, si difieren en solamente una de las coordenadas.

Obsérvese que en cada caso los vértices se representan como vectores: de n coordenadas en el del grafo F_p^n y de $n + m$ coordenadas en el caso del grafo $F_{3,2}^{n,m}$. Ambos grafos han sido extensivamente estudiados en relación con el tema de la dominación, particularmente el grafo F_3^n , en donde el problema de hallar un subconjunto mínimo dominante es denominado el "football pool problem".

E-mail: *epiza@cariari.ucr.ac.cr

La terminología "dominación por dominios de torre" se refiere exclusivamente al tipo de métrica empleada (distancia de Hamming) y proviene del contexto del ajedrez, en el cual el grafo F_8^2 ; coincide precisamente con los movimientos de la torre en el tablero de ajedrez, como se ilustra en la Figura 1. Por otra parte, la terminología "football pool problem" proviene de un tipo de lotería existente en algunos países (por ejemplo: "Lotto" en Francia e Italia, "Totogol" o "Pega 6" en Costa Rica), en la cual los apostadores deben vaticinar los resultados de n juegos del fútbol dominical, cada uno de los cuales admite tres posibles resultados: victoria del equipo casa, derrota del equipo casa, o empate. Un subconjunto dominante de F_3^n corresponderá entonces a un conjunto de boletas de lotería llenas con los vaticinios de los n juegos, de forma tal que se garantice -bajo todas las eventualidades de resultados- que por lo menos una de las boletas contendrá al menos $n - 1$ vaticinios correctos, o lo que es lo mismo, a lo sumo un vaticinio incorrecto. Si bien en tal caso el apostador no se hará millonario acertando a los n juegos, no obstante ganara con certeza el segundo premio. el cual por lo general no es nada despreciable.

Si la lotería anterior ('football pool') contemplara adicionalmente m juegos de otro deporte, en el cual cada uno de ellos tenga 2 posibles resultados (victoria o derrota del equipo casa, por ejemplo), entonces estaríamos frente al grafo $F_{3,2}^{n,m}$. Un subconjunto dominante de este grafo nos garantizara que ante cualquier eventualidad siempre tendremos una boleta con a lo sumo un desacierto (quizás ninguno), de forma tal que con certeza ganaremos el segundo premio y en ocasiones el primero.

Hallar un subconjunto de vértices que sea mínimo y dominante para estos grafos F_p^n y $F_{3,2}^{n,m}$ es un problema combinatorio identificado como difícil, no solo por el tamaño monstruoso del espacio de configuraciones que involucra sino también por la complejidad algorítmica intrínseca que plantea. Un esfuerzo considerable ha sido dedicado por varios autores a la búsqueda de subconjuntos dominantes para estos grafos, en especial para $F_{3,2}^{n,m}$ y los grafos F_3^n y F_2^m . Algunos de esos esfuerzos involucran o bien construcciones, combinatorias, o bien búsquedas heurísticas, o una combinación entre ambas técnicas. En la práctica solamente se conoce la solución exacta para muy pocos valores pequeños de n , m y p . En la mayoría de los casos estudiados solamente se conoce una cota superior de la cardinalidad del subconjunto mínimo dominante. Un listado de las soluciones conocidas, tanto exactas como cotas superiores, puede consultarse en las obras de Hämäläinen y Rankinen (1991) y Östergard y Hämäläinen (preprint).

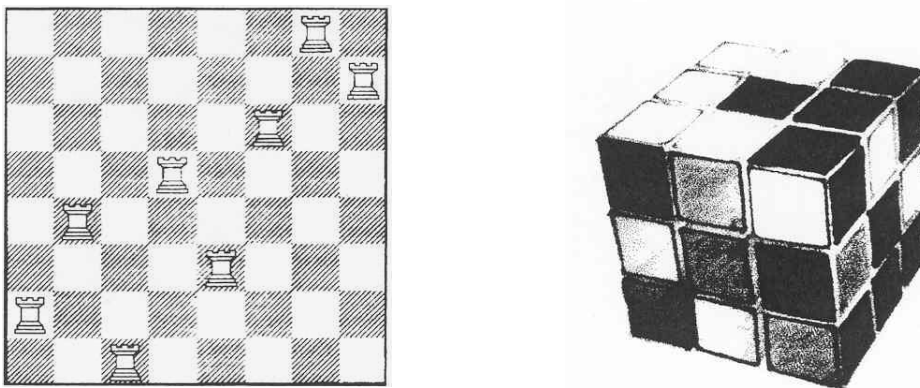


Figura 1. Dos de los objetos más populares de F_p^n : los movimientos de las torres en el tablero de ajedrez, en el grafo $F_8^2 = (\mathbf{Z}_8^2, H)$ y el cubo Rubik $F_3^3 = (\mathbf{Z}_3^3, H)$, donde H es la distancia de Hamming. En el caso del ajedrez, en la figura se muestra una de las soluciones exactas al problema de dominación: 8 torres son necesarias y suficientes para dominar todos los escaques del tablero. En el caso del cubo Rubik, se requieren 5 "vértices" (pequeños cubos) para dominar el grafo; por ejemplo: 012, 021, 100, 211, 222.

Denotemos por σ_3^n el tamaño del mínimo subconjunto dominante para el "football pool problem" con n juegos. El menor de los problemas para el cual el valor exacto de σ_3^n aun se desconoce es el grafo de 729 vértices F_3^6 . En 1989 van Laarhoven, Aarts, van Lint y Wille [11] encontraron un subconjunto dominante

de F_3^6 con 73 vértices, utilizando para ello un algoritmo del tipo de recocido simulado. Por lo tanto, $\sigma_3^6 \leq 73$. Hasta el momento ese es el récord oficial y aunque se sospecha que $\sigma_3^6 = 72$ (ver Östergård [1995]) sin embargo nadie lo ha logrado demostrar y es posible que nunca se llegue a esclarecer cual es el verdadero valor. Para comprender mejor la magnitud de este problema, en el grafo F_3^6 de 729 vértices existen $\binom{729}{72} \approx 0.57 \times 10^{101}$ distintos subconjuntos de 72 vértices, una cantidad monstruosa que hace imposible cualquier intento de comprobación exhaustiva. En la Figura 2 se presenta un subconjunto dominante de F_3^6 con 73 vértices (esto es, iguala el record) encontrado por el autor.

Mediante el empleo de nuestro algoritmo de recocido simulado hemos hallado algunas cotas superiores para el tamaño del mínimo subconjunto dominante de F_p^n , para valores de $p \geq 4$. Con el algoritmo también se volvieron a igualar algunas de las cotas superiores ya conocidas para el problema análogo en los grafos $F_{3,2}^n$, F_2^m y F_3^n , poniendo de manifiesto la bondad del algoritmo.

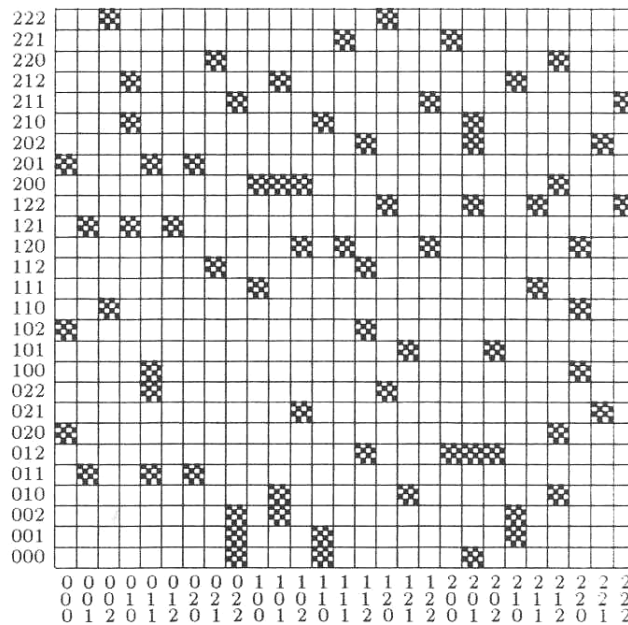


Figura 2. Un subconjunto dominante de Z_3^6 , por 73 vértices, hallado por el autor.

En este gráfico las posiciones de los vértices (6-tuplas de Z_3^6) se han representado tomando las primeras 3 coordenadas como las abscisas y las últimas 3 coordenadas como las ordenadas.

2. DEFINICIONES, NOTACIONES Y RESULTADOS BÁSICOS

En un grafo $G = (V, E)$ decimos que un vértice $v \in V$ *domina* los vértices del *vecindario cerrado* $N[v] = \{v\} \cup \{u \in V : (u, v) \in E\}$. Los vértices dominados por un subconjunto del conjunto de vértices $V' \subseteq V$ son aquellos contenidos en el conjunto

$$\text{dom } V' := \bigcup_{v \in V'} N[v].$$

Un *subconjunto dominante* del grafo G es un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $\text{dom } V' = V$. Un *subconjunto mínimo dominante* del grafo G es aquel que tenga el menor número posible de vértices. En general, el problema de hallar un subconjunto mínimo dominante de G y su cardinalidad es un problema *NP-hard* bien identificado (Garey-Johnson [1979]).

Cada vértice de Z_p^n puede ser identificado con un vector de n coordenadas, cada una de las cuales toma valores en $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Luego, la distancia Hamming implica que en el grafo F_p^n dos vértices serán adyacentes si difieren en exactamente una de sus n coordenadas. Análogamente, en el grafo $F_{3,2}^{n,m}$ cada elemento de $V = Z_3^n \times Z_2^m$ puede ser identificado con un vector de $n+m$ coordenadas, en donde las primeras n coordenadas son triádicas (toman valores en Z_3) y las últimas m son binarias (toman valores en Z_2). En consecuencia, en el grafo $F_{3,2}^{n,m}$ dos vértices serán adyacentes si difieren en exactamente una de sus coordenadas.

El grafo F_p^n es *regular* (todos los vecindarios cerrados $N[v]$ tienen el mismo tamaño) y tiene *valencia* $n(p-1)$ (número de vértices adyacentes a cada vértice dado). Denotemos por σ_p^n el tamaño del mínimo subconjunto dominante del grafo F_p^n . Como cada vértice $v \in Z_p^n$ domina a $n(p-1)+1$ vértices, entonces se verifican las desigualdades

$$\frac{p^n}{n(p-1)+1} \leq \sigma_p^n \leq p^{n-1}. \quad (1)$$

La desigualdad de la derecha en (1) se justifica viendo el problema en términos de n juegos con p distintos resultados, pues tendremos que p^{n-1} es una cantidad de vértices suficiente para dominar el grafo con $n-1$ juegos. La expresión de la izquierda en (1) brinda una cota inferior para σ_p^n que generalmente se denomina la *cota del empaquetamiento esferoidal* para F_p^n . Un subconjunto de vértices que exactamente satisface la cota del empaquetamiento esferoidal es llamado un *código perfecto* y tal código domina cada vértice del grafo F_p^n exactamente una vez.

Análogamente, el grafo $F_{3,2}^{n,m}$ es también *regular* y tiene valencia $2n+m$. Denotamos por $\kappa(n, m)$ el tamaño¹ del mínimo subconjunto dominante de $F_{3,2}^{n,m}$. Como cada vértice $v \in Z_3^n \times Z_2^m$ domina $2n+m+1$ vértices, entonces se verifican las desigualdades

$$\frac{3^n 2^m}{2n+m+1} \leq \kappa(n, m) \leq 3^{n-1} 2^m. \quad (2)$$

La desigualdad de la derecha en (2) se justifica al considerar todos los posibles resultados de $n-1$ juegos en Z_3 y m juegos en Z_2 , de forma tal que en total se garanticen $n+m-1$ vaticinios correctos. La expresión de la izquierda en (2) brinda una cota inferior para $\kappa(n, m)$ llamada también la *cota del empaquetamiento esferoidal* para $F_{3,2}^{n,m}$. Un subconjunto de vértices del grafo $F_{3,2}^{n,m}$ para la cual la desigualdad izquierda en (2) sea una igualdad se llama también *código perfecto* y tal código domina cada vértice del grafo $F_{3,2}^{n,m}$ exactamente una vez.

Los grafos F_2^m y F_3^n son llamados respectivamente *grafo del hipercubo* y *grafo del "football pool"*. Se sabe que contienen códigos perfectos cuando n y m toman ciertos valores (ver Cameron-Van Lint (1991)). En particular, si $m = 2^r - 1$ entonces el grafo del hipercubo F_2^m contiene un código perfecto de tamaño $2^{2^r - r - 1}$. Luego, $\sigma_2^3 = 2$ y $\sigma_2^7 = 16$. Análogamente, cuando $n = (3^r - 1)/2$ entonces el grafo del "football pool" F_3^n contiene un código perfecto de tamaño $3^{(3^r - 2r - 1)/2}$. Por consiguiente, tenemos que $\sigma_3^4 = 9$ y $\sigma_3^{13} = 50049$.

Por otra parte, se sabe que para valores grandes de n , la cantidad σ_p^n tiende a la cota del empaquetamiento esferoidal (ver Biggs (1974), Cameron-Van Lint (1991)), esto es, para todo $p \geq 2$ se cumple

¹Esta terminología es la tradicionalmente empleada en la literatura. Obsérvese que por definición tenemos

$$\kappa(n, 0) = \sigma_3^n, \text{ mientras } \kappa(0, m) = \sigma_2^m.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_p^n}{n(p-1)+1} \lim = 1. \quad (3)$$

Además, de la formulación del grafo $F_{3,2}^{n,m}$ en términos de juegos triádicos y binarios, es evidente la desigualdad $2\kappa(n+1, m) \leq 3\kappa(n, m+1)$, que al reescribirla obtenemos la siguiente desigualdad, muy útil para encontrar cotas superiores gruesas para $\kappa(n, m)$ para ciertos valores de n y m :

$$\kappa(n, m) \leq \frac{3}{2} \kappa(n-1, m+1) \quad (4)$$

Dado cualquier grupo aditivo G junto con un subconjunto generador H que satisfaga $H = H^{-1}$, se define el *grafo de Cayley* de G con respecto a H como el grafo $X(G, H)$ cuyos vértices son los elementos de G , donde por definición g es adyacente a gh , para todo $g \in G$ y $h \in H$. En particular, tomando \mathbf{Z}_p^n como el grupo aditivo G_1 y seleccionando $H_1 = \{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}$, donde e_i es el i -ésimo vector base canónico, entonces el grafo F_p^n es justamente el grafo de Cayley de G_1 con respecto a H_1 . Análogamente al tomar $\mathbf{Z}_3^n \times \mathbf{Z}_2^m$ como el grupo aditivo G_2 y seleccionando $H_2 = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n, \pm e_{n+1}, \dots, \pm e_{n+m}\}$, donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica, entonces el grafo $F_{3,2}^{n,m}$ es justamente el grafo de Cayley de G_2 con respecto a H_2 . Esta observación jugará un rol importante más adelante. Para más detalles acerca de los grafos de Cayley se puede consultar la obra de Biggs [1974].

3. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Nuestro objetivo es hallar valores exactos o cotas superiores mínimas para σ_p^n y $\kappa(n, m)$, junto con los códigos asociadas de los subconjuntos dominantes de los grafos F_p^n y $F_{3,2}^{n,m}$ respectivamente. Para simplificar, vamos a concentrarnos en la explicación de la metodología empleada en el caso del grafo F_p^n , ya que para el grafo $F_{3,2}^{n,m}$ las ideas son completamente análogas.

Sea V' un subconjunto cualquiera del conjunto de vértices $V = \mathbf{Z}_p^n$ del grafo F_p^n . Quizás V' no domina al grafo F_p^n , sin embargo el subconjunto $V' \cup (V - \text{dom } V')$ inducido por V' siempre domina a F_p^n . Por lo tanto, andamos buscando un subconjunto V^* del conjunto de vértices V que sea solución al problema de optimización combinatoria siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } c(V') &:= |V'| + |V - \text{dom } V'| \\ \text{sujeto a } V' &\subseteq V. \end{aligned} \quad (5)$$

Por consiguiente, $\sigma_p^n = c(V^*)$, esto es, el número de vértices de la solución V^* de (5). Nuestro algoritmo de recocido simulado utiliza una codificación adecuada de cada uno de los p^n vértices de V , así como una codificación completa en la memoria del computador de los vecindarios cerrados $N[v]$ para cada vértice. Para ello, es necesario utilizar intensivamente algoritmos de codificación-decodificación de base decimal a base p y a base $3^n \times 2^m$ (cuando trabajamos con el grafo $F_{3,2}^{n,m}$), esquemas de codificación que explicaremos más adelante.

El algoritmo comienza seleccionando un subconjunto V' de vértices al azar, de forma tal que se satisfaga la desigualdad (1) con $c(V') := |V'| + |V - \text{dom } V'|$ en vez de σ_p^n . A continuación se repite la siguiente secuencia de pasos, utilizando un parámetro t_k de "temperatura" del sistema, la cual ocasionalmente se va decrementando para que t_k tienda lentamente a 0 cuando $k \rightarrow \infty$:

1. Se escoge al azar un vértice $v \in V$, el cual dará origen a un nuevo subconjunto de vértices V'' de la siguiente forma; $V'' = V' \cup \{v\}$, si $v \notin V'$, mientras que $V'' = V' - \{v\}$, si $v \in V'$.

2. Se calcula $c(V'')$ aprovechando el cálculo ya realizado para $c(V')$, actualizándolo de acuerdo a los vértices que domine o deje de dominar v . En la memoria del computador se encuentra almacenada la lista de todos los vecinos de cada vértice del grafo, de forma tal que este cálculo es rápido.
3. Se toma la decisión de aceptar V'' con probabilidad igual a $\min\{1 \cdot e^{-\Delta c/t_k}\}$, donde $\Delta c = c(V'') - c(V')$. Esta regla de aceptación es llamada *regla de Metrópolis* [Aarts-Korst (1990)].

Aquí Δc es el cambio en la función de costo producida por la inclusión o exclusión del vértice v seleccionado. La regla de aceptación de Metrópolis establece que si el vértice v da origen a un nuevo subconjunto V'' que tiene costo menor que V' , entonces es aceptado con probabilidad 1, pero de lo contrario V'' es aceptado solamente con probabilidad $e^{-\Delta c/t_k}$. Los detalles específicos del plan de enfriamiento del sistema se explican a continuación:

- (a) **Decremento de la temperatura:** cada cierto número de pasos el sistema es "enfriado" un poco, disminuyendo el valor de la temperatura t_k mediante el esquema de enfriamiento geométrico: $t_{k+1} = \lambda \cdot t_k$, con λ una constante fija previamente escogida entre $[0.92, 0.98]$ ($\lambda = 0.95$ ha resultado ser una buena selección en prácticamente todas nuestras pruebas). Esto hace que la regla de Metrópolis sea cada vez más rigurosa en la aceptación de vértices que incrementen el costo.
- (b) **Largo de las cadenas de temperaturas:** el enfriamiento de la temperatura se realiza cada NLIMIT pasos, o bien cuando ya han sido aceptados NOVER nuevos subconjuntos V'' para los cuales $c(V'') \geq c(V')$. Hemos utilizado valores de $\text{NOVER} \in [10^5, 10^6]$ y $\text{NOVER} \in [5000, 50000]$ dependiendo del tamaño del problema.
- (c) **Temperatura inicial:** la temperatura inicial t_0 es seleccionada de manera que al principio la regla de Metrópolis sea bastante tolerante, aceptando alrededor del $\chi \times 100\%$ de los subconjuntos V'' para los cuales $c(V'') \geq c(V')$. Aquí χ es una constante previamente escogida. Con este criterio, $t_0 = (n + 1) / 2\ln(1/\chi)$. Generalmente hemos utilizado $\chi = 0.7$ con buenos resultados en nuestras pruebas.
- (d) **Criterio de finalización del algoritmo:** a lo sumo se realizan 150 ciclos de temperatura, pues en la práctica $t_k = (t_0)^k$ es casi nulo independientemente del valor inicial de t_0 . No obstante, si para las últimas NCAD cadenas de temperatura no han surgido mejores subconjuntos dominantes V'' , el proceso se detiene. Hemos empleado $\text{NCAD} = 3$ en nuestras pruebas con buenos resultados.

Para la generación de números aleatorios utilizamos un algoritmo de tipo aditivo propuesto por Knuth (1981). El método de recocido simulado converge en teoría a un mínimo global de la función objetivo $c(V)$ que se está minimizando (Aarts-Korst [1990]) aunque en la práctica una sola corrida del algoritmo es insuficiente. Para obtener buenas cotas de σ_p^n o $\kappa(n, m)$ se realizaron muchas corridas sucesivas del algoritmo. Por ejemplo, $\sigma_3^6 \leq 73$ fue obtenido luego de 5 corridas, pero para hallar $\sigma_3^7 \leq 186$ fueron necesarias 150 corridas del algoritmo. Buena parte del éxito de estos métodos se basa en una buena calibración de los parámetros del sistema, aspecto que nunca se termina de aprender.

En la Figura 3 se presentan los principales resultados obtenidos con el grafo F_p^n , y en la Figura 4 con el grafo $F_{3,2}^{n,m}$. Como se aprecia en las tablas de las figuras, solamente se han estudiado los casos correspondientes a valores pequeños de p , n y m .

n	Z ₂ ⁿ	Z ₃ ⁿ	Z ₄ ⁿ	Z ₅ ⁿ	Z ₆ ⁿ	Z ₇ ⁿ	Z ₈ ⁿ	Z ₉ ⁿ	Z ₁₀ ⁿ
1	a ₁	a ₁	a ₁	a ₁	a ₁	a ₁	a ₁	a ₁	a ₁
2	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈	a ₉	a ₁₀
3	e ₂	e ₅	e ₈	e ₁₃	e ₁₈	e ₂₅	e ₃₂	e ₄₁	e ₅₀
4	e ₄	e ₉	e ₂₄	e ₅₂	b ₇₂	b ₁₂₃	b ₂₂₄	b ₃₉₀	
5	e ₇	e ₂₇	e ₆₄	b ₂₀₀	b ₅₄₀				
6	e ₁₂	b,c ₇₃	b ₃₃₄						
7	e ₁₆	c ₁₈₆							
8	e ₃₂	c ₄₈₆							
9	c ₆₂	c ₁₃₄₁							
10	c ₁₂₀	c ₃₆₄₅							
11	c ₁₉₂	c ₉₄₇₇							
12	c ₃₈₀	c ₂₇₇₀₂							
13	c ₇₃₆	s ₅₉₀₄₉							
14		c ₁₇₇₁₄₇							

Figura 3. Mejores soluciones conocidas al problema del recubrimiento de Z_p^n por dominios de torre. En la tabla se anota el tamaño del subconjunto mínimo conocido que domina Z_p^n . Los super-índices a la izquierda de cada número tienen el siguiente significado: "a" indica una solución trivial y exacta; "e" indica una solución exacta hallada por el algoritmo en el 100% de las corridas; "b" es la mejor cota conocida, encontrada por el autor; "c" es la mejor cota conocida, hallada por otros; "s" es una solución exacta tipo "empaquetamiento esferoidal".

3.1. Representaciones en base p y en base $3^n \times 2^m$

Debido a que buena parte del éxito del algoritmo radica a que se mantiene en memoria central la lista completa de los vecinos de cada nodo, codificados en decimal, es necesario contar con algoritmos eficientes para llevar a cabo esta codificación. Probablemente el lector se encuentre familiarizado con la representación en base p de los números naturales; no así con la representación en base $3^n \times 2^m$ de los mismos. Hagamos un breve resumen.

3.1.1. Representación en base p

Sea s un número natural. Escribimos $[s]_p^n$ para denotar la representación de s en base p, empleando n dígitos p-ádicos d_1, d_2, \dots, d_n . Esto es,

$$[s]_p^n := \underbrace{(d_n, \dots, d_2, d_1)}_{\text{base p}} = \sum_{i=1}^n d_i p^i,$$

donde cada $d_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. El máximo número natural que se puede representar con este esquema es $p^n - 1$. El algoritmo eficiente clásico para hallar los dígitos p-ádicos d_i , consiste en la aplicación sucesiva del algoritmo de la división euclidea. La representación p-ápica obtenida es compatible con el orden lexicográfico \leq de Z_p^n , esto es,

$$0 \leq s \leq s' \Rightarrow [s]_p^n \leq [s']_p^n.$$

3.1.2. Representación en base $3^n \times 2^m$

Sean $s < 3^n$ y $s' < 2^m$ dos números naturales. Escribimos $([s]_3^n, [s']_2^m)$ para denotar la representación de un entero a con n + m dígitos, de los cuales los primeros n dígitos son triádicos (base 3) mientras que los últimos m dígitos son binarios (base 2). Esto es,

$$([s]_3^n, [s']_2^m) := \underbrace{(d_n, \dots, d_2, d_1)}_{\text{base 3}} \underbrace{(r_m, \dots, r_2, r_1)}_{\text{base 2}} := \sum_{i=1}^m r_i 2^{i-1} + \sum_{i=1}^n d_i 3^{i-1} 2^m.$$

Lo anterior queda justificado con el siguiente resultado.

Proposición 1. (Base $3^n \times 2^m$). Todo natural $a < 3^n 2^m$ se puede representar de manera única como un vector de $n + m$ componentes en la forma

$$a = ([q_a]_3^n, [r_a]_2^m), \quad (6)$$

donde en las primeras n componentes se codifica un natural $q_a < 3^n$ en base 3, mientras que en las últimas m componentes se codifica un natural $r_a < 2^m$ en base 2. Los números q_a y r_a son únicos.

Demostración: Considérese el cociente q_a y el residuo r_a de la división euclídeana de a por 2^m . Por consiguiente, tenemos que q_a y r_a son los únicos enteros que satisfacen $a = 2^m q_a + r_a$, con $0 \leq r_a < 2^m$. Luego, claramente r_a admite una representación única en base 2 empleando m dígitos, denotada por $[r_a]_2^m$. Por otra parte,

$$0 \leq 2^m q_a \leq a < 3^n 2^m,$$

de donde $0 \leq q_a < 3^n$. Por lo tanto q_a admite una representación única en base 3 empleando n dígitos, denotada por $[q_a]_3^n$. ■

La representación anterior en base $3^n \times 2^m$ es también compatible con el orden lexicográfico ordinario " \prec " de $\mathbf{Z}_3^n \times \mathbf{Z}_2^m$, en el siguiente sentido:

$$0 \leq a \leq a' < 3^n 2^m \Rightarrow ([q_a]_3^n, [r_a]_2^m) \prec ([q_{a'}]_3^n, [r_{a'}]_2^m).$$

4. CONSTRUCCIÓN COMBINATORIA

El menor subconjunto dominante conocido de F_3^8 tiene tamaño 486 y fue encontrado por Laarhoven y colaboradores [1989] empleando recocido simulado, luego de una construcción combinatoria ingeniosa que redujo el problema a un grafo de menor dimensión. Estas construcciones combinatorias fueron originalmente formuladas por Blokhuis & Lam [1984] y pueden ser aplicadas a cualquier grafo F_p^n y cualquier grafo $F_{3,2}^{n,m}$.

En esta sección trabajaremos con vectores columna, en vez de vectores fila, por conveniencia de notación. Exponemos a continuación la construcción combinatoria que en algunos casos ayuda a simplificar el estudio del grafo F_p^n .

Definición 2. Sea $A = [a_1 | a_2 | \dots | a_n]$ una matriz $q \times n$ de rango q con entradas en \mathbf{Z}_p . Decimos que el conjunto $S \subseteq \mathbf{Z}_p^q$ recubre \mathbf{Z}_p^q usando A si

$$\mathbf{Z}_p^q = \{s + \alpha a_i; s \in S, \alpha \in \mathbf{Z}_p, 1 \leq i \leq n\}.$$

Obsérvese que cuando $q = n$ y A es la matriz identidad, entonces S recubre \mathbf{Z}_p^q usando A si y solo si S es un subconjunto dominante de F_p^n . En general, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3. Si S recubre \mathbf{Z}_p^q usando A , entonces $W = \{w \in \mathbf{Z}_p^n: Aw \in S\}$ es un subconjunto dominante de F_p^n de tamaño $|W| = |S| p^{n-q}$.

Demostración: Sea $w \in \mathbf{Z}_p^n$. Entonces tendremos que $Aw \in \mathbf{Z}_p^q$. En virtud que S recubre \mathbf{Z}_p^q usando A , existen $s \in S$, $\alpha \in \mathbf{Z}_p$ y $1 \leq i \leq n$ tales que $Aw = s + \alpha a_i$. Sea e_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbf{Z}_p^n . Luego, $a_i = Ae_i$, de donde

$$Aw = s + \alpha Ae_i,$$

y por tanto $A(w - \alpha e_i) \in S$. Pero por definición esto significa que $u' - \alpha e_i \in W$, de donde w es dominado por W en F_p^n . Finalmente, por hipótesis A tiene rango q , en virtud de lo cual $|W| = |S|p^{n-q}$, ya que para cada $w \in S$ la imagen inversa $A^{-1}(\{w\})$ es un subespacio vectorial de dimensión $n - q$ por tanto tiene p^{n-q} elementos distintos. ■

Por ejemplo, en el grafo F_3^8 del "football pool", el conjunto $S \subseteq F_3^4$ de 6 vértices

$$S = \{(2, 2, 2, 2)^t, (2, 1, 2, 1)^t, (2, 0, 1, 1)^t, (0, 2, 1, 1)^t, (2, 0, 1, 2)^t, (1, 1, 2, 2)^t\}$$

recubre Z_3^4 usando la siguiente matriz A de tamaño 4×8 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí $q = 4$. De esta forma Laarhoven y colaboradores [1989] encontraron la cota superior $\sigma_3^8 \leq |S| \cdot 3^4 = 486$.

En la práctica es bastante difícil hallar $q < n$ y un conjunto $S \subseteq Z_p^q$ junto con una matriz A de tamaño $q \times n$, de forma que S recubre Z_p^q usando A . Este problema también se puede formular como un problema de optimización combinatoria de la siguiente forma:

Para un entero positivo dado k y una selección de $r \in \{1, \dots, n - 1\}$ hallar un subconjunto $S \subseteq Z_p^n$ consistente en k r -túpleros y una matriz $r \times n$ tal que el tamaño del conjunto

$$Z_p^r - \{s + \alpha a_i : s \in S, \alpha \in Z_p, 1 \leq i \leq n\} \tag{7}$$

sea mínimo.

De nuevo empleamos un algoritmo de recocido simulado para resolver este problema de optimización: una "movida" es en este caso o bien el reemplazo de uno de los r -túpleros de S seleccionado al azar por otro r -tuplo que no sea elemento de S , o bien el reemplazo de una columna de A seleccionada al azar por otra columna que no esté en A . Si el algoritmo encuentra un subconjunto S y una matriz A para los cuales S es un recubrimiento de Z_p^r usando A , entonces el valor de k es decrementado por 1 y el algoritmo se ejecuta de nuevo. La ejecución se finaliza cuando k es tal que el algoritmo no encuentra un subconjunto S y una matriz A para el cual el conjunto en (7) sea vacío.

Si definimos $G = Z_p^n$ y $H = \{\pm a_1, \dots, \pm a_n\}$ entonces podemos ver que S es simplemente un subconjunto dominante del grafo de Cayley $X = X(G, H)$. Este grafo X tiene los mismos vértices que F_p^n aunque es más denso. De los resultados conocidos acerca de automorfismos de grafos de Cayley podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $a_i = e_i$ para $1 \leq i \leq n$, de forma que A consiste en un primer bloque de la matriz identidad de tamaño $q \times q$ seguida de algunas columnas adicionales. Luego, X coincide con F_p^n , con algunas aristas adicionales determinadas por las columnas extras.

Los beneficios de estas construcciones combinatorias residen en el hecho que nos permiten buscar subconjuntos dominantes en grafos más pequeños y densos, donde los algoritmos de recocido simulado funcionan mejor. Cualquier subconjunto dominante encontrado en X induce otro subconjunto dominante para F_p^n . Sin embargo, este procedimiento podría no hallar todos los subconjuntos dominantes de F_p^n ; pues quizás no todos ellos tienen esta forma. Por consiguiente, con esta técnica podríamos fallar en obtener el mínimo subconjunto dominante de F_p^n o cotas superiores para la cardinalidad σ_p^n del mismo.

El algoritmo arriba descrito se simplifica un poco si ya contamos con la matriz A. Davies y Royle [1997] reportan el siguiente resultado, aunque sin una adecuada justificación teórica para encontrar la matriz A se estudian las órbitas del grupo proyectivo $PGL(q, p)$, extrayendo de él un conjunto de n puntos (vectores) proyectivos a_1, \dots, a_n de q componentes. Estos vectores forman las columnas de la matriz A. Emplean para estos menesteres el paquete computacional de teoría de grupos denominado CAYLEY.

Para el grafo $F_{3,2}^{n,m}$ tendremos una construcción combinatoria completamente análoga, que se describe a continuación.

Definición 4. Sea $A = [a_1 | a_2 | \dots | a_n]$ una matriz de tamaño $q \times n$ de rango q con entradas en \mathbf{Z}_3 . Similarmente, sea $B = [b_1 | b_2 | \dots | b_m]$ una matriz de tamaño $r \times m$ de rango r con entradas en \mathbf{Z}_2 . Entonces $S \subseteq \mathbf{Z}_3^q \times \mathbf{Z}_2^r$ se dice que **recubre $\mathbf{Z}_3^q \times \mathbf{Z}_2^r$ usando A y B** si

$$\mathbf{Z}_3^q \times \mathbf{Z}_2^r = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 + \alpha a_i \\ s_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in S, \alpha \in \mathbf{Z}_3, 1 \leq i \leq n \right\} \\ \cup \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 + \alpha b_j \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in S, \alpha \in \mathbf{Z}_2, 1 \leq j \leq m \right\}$$

Proposición 5: Si S recubre $\mathbf{Z}_3^q \times \mathbf{Z}_2^r$ usando A y B, entonces

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_3^n \times \mathbf{Z}_2^m : \begin{pmatrix} Aw_1 \\ Bw_2 \end{pmatrix} \in S \right\}$$

es un subconjunto dominante de $F_{3,2}^{n,m}$ de tamaño $|W| = |S| 3^{n-q} 2^{m-r}$.

Demostración: Para cualquier $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_3^n \times \mathbf{Z}_2^m$ tenemos que $\begin{pmatrix} Ax_1 \\ Bx_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_3^q \times \mathbf{Z}_2^r$. Luego podemos hallar $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in S$ de forma tal que se cumpla una de las igualdades siguientes:

$$\begin{pmatrix} Ax_1 \\ Bx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + \alpha a_i \\ s_2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{Z}_3, 1 \leq i \leq n.$$

o bien

$$\begin{pmatrix} Ax_1 \\ Bx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 + \alpha b_j \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{Z}_2, 1 \leq j \leq m.$$

En el primer caso, al tomar e_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbf{Z}_3^n , tendremos

$$\begin{pmatrix} A(x_1 - \alpha e_i) \\ Bx_2 \end{pmatrix} \in S,$$

de donde $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, lo cual significa que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es dominado por W en $F_{3,2}^{n,m}$. En el segundo caso, tomando e_j como el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbf{Z}_2^m , obtenemos

$$\begin{pmatrix} Ax_1 \\ B(x_2 - \alpha e_j) \end{pmatrix} \in S,$$

de donde $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ e_j \end{pmatrix} \in W$ y en consecuencia $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es dominado por W en $F_{3,2}^{n,m}$. ■

5. ALGUNAS CONCLUSIONES

En la Figura 3, correspondiente al grafo F_p^n , se presenta la lista de cotas superiores de σ_p^n , para valores pequeños de p y n . Algunas de ellas son novedosas y fueron obtenidas con nuestro algoritmo de recocido simulado. Otras cotas superiores para σ_p^n ya son conocidas.

En la Figura 4 se presentan los resultados conocidos para las cotas superiores de $\kappa(n, m)$ en el grafo $F_{3,2}^{n,m}$. Algunas de estas cotas superiores fueron también halladas en forma independiente a través de nuestro algoritmo de recocido simulado.

Queda aún mucho trabajo por realizar, en particular sobre el grafo $F_p^n \geq 4$, para el cual las cotas estudiadas han sido encontradas gracias a la aplicación directa del algoritmo de recocido simulado, sin la utilización de las construcciones combinatorias descritas en la sección precedente. En la actualidad se trabaja en una reprogramación más eficiente del algoritmo de recocido simulado que incorpore estas construcciones combinatorias, con la esperanza de hallar cotas superiores de σ_p^n para otros valores de p y n mayores a los ya estudiados y tal vez mejorar algunos de los ya estudiados.

$Z_2^m \rightarrow$

$Z_3^n \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0		^e 1	^e 2	^e 2	^e 4	^e 7	^e 12	^e 16	^e 32	^e 62	120	192	380	736
1	^e 1	^e 2	^{e,d} 3	^{e,d} 6	^e 8	^e 16	^{e,d} 24	^{e,d} 48	^e 84	160	284	548	1024	
2	^{e,d} 3	^{e,d} 4	^e 6	^{e,d} 12	^e 20	^{e,d} 36	^e 64	124	232	408	768	1504		
3	^e 5	^{e,d} 9	^e 16	^e 24	^e 48	92	171	312	576	1080	2016			
4	^e 9	^e 18	^{e,d} 36	^{e,d} 72	128	238	432	^d 864	1296	2592				
5	^{e,d} 27	^{e,d} 54	96	168	324	639	1188	^d 1944	^d 3888					
6	73	132	^d 252	468	864	1620	^d 2916	^d 5832						
7	186	333	648	^d 1296	2304	^d 4374	8586							
8	486	^d 972	1728	^d 3456	6480	^d 12879								
9	1341	^d 2592	4860	9639	17496									
10	3645	7047	13122	25192										
11	9477	18894	^d 37788											
12	27702	52488												
13	^e 59049													

Figura 4.

Mejores soluciones conocidas al problema de dominación del grafo $Z_3^n \times Z_2^m$ por dominios de torre. En la tabla se anota el tamaño del mínimo subconjunto conocido que domina al grafo. Los superíndices a la izquierda de cada número tienen el siguiente significado:
 "e" indica una solución exacta hallada por el algoritmo en el 100% de las corridas;
 "d" indica una cota superior consecuencia de la desigualdad $K(n, m) \leq \frac{3}{2} K(n-1, m+1)$.

APÉNDICE

Códigos de algunos subconjuntos dominantes

Se presentan los códigos de algunos de los subconjuntos dominantes hallados por el autor. Con el fin de mantener consistencia con los códigos reportados por otros autores, emplearemos aquí la notación comprimida de Östergård & Härmäläinen [preprint]. Considérese todos los vectores de \mathbf{Z}_p^n y de $\mathbf{Z}_3^n \times \mathbf{Z}_2^m$ listados de acuerdo con sus respectivos órdenes lexicográficos. Entonces, para especificar un código simplemente se van enumerando la cantidad de posiciones consecutivas que deben omitirse en los listados completos.

Así, por ejemplo, un código consistente en "11, 0, 5, 2,..." significa que se omiten los primeros 11 vectores. luego se selecciona el vector siguiente, luego el siguiente, luego se omiten 5 vectores y se selecciona el siguiente vector, luego se omiten 2 vectores y se selecciona el siguiente vector. etc.

Existe un hostal en Internet con el resto de los códigos de subconjuntos dominantes para el grafo $F_{3,2}^{n,m}$, que puede consultarse a través de ftp en `ftp.cs.uwa.ed.au` en el directorio `pub/graphs/pools`.

6.1. $\sigma_{10}^3 = 50$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

1, 24, 11, 3, 44, 22, 43, 10, 7, 25, 13, 41, 13, 0, 23, 13, 18, 4, 13, 34, 20, 18, 15, 10, 37, 27, 44, 3, 11, 14, 28, 33, 6, 13, 20, 11, 20, 7, 4, 40, 32, 34. 13, 14, 13, 12, 15, 8, 15, 40.

6.2. $\sigma_9^3 = 41$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

7, 3, 25, 42, 21, 9, 19, 7, 3, 19, 7, 33, 34, 19, 14, 16, 7, 7, 37, 3, 21, 7, 11, 19, 7, 21, 34, 31, 7, 15, 5, 12, 14, 15, 25, 30, 28, 7, 14, 14, 7.

6.3. $\sigma_9^4 \leq 390$. Mejor cota superior conocida, hallada con el algoritmo

19, 8, 9, 6, 32, 5, 31, 0, 30, 9, 20, 23, 32, 30, 2, 18, 13, 24, 34, 21, 7, 7, 4, 12, 18, 46, 12, 31, 7, 2, 21, 25, 20, 3, 15, 2, 20, 13, 27, 9, 11, 23, 4, 23, 8, 21, 33, 3, 6, 12, 5, 30, 23, 14, 12, 24, 12, 3, 48, 1, 0, 3, 28, 19, 9, 0, 33, 19, 1, 1, 25, 23, 33, 6, 23, 0, 24, 27, 10, 28, 0, 4, 5, 14, 12, 36, 21, 27, 5, 11, 12, 22, 6, 5, 23, 22, 1, 2, 6, 3, 9, 29, 12, 29, 22, 42, 27, 6, 25, 4, 19, 24, 16, 1, 21, 12, 38, 16, 5, 37, 14, 5, 3, 12, 44, 9, 29, 3, 21, 27, 5, 15, 38, 42, 4, 9, 10, 21, 4, 16, 14, 26, 11, 11, 24, 21, 10, 27, 31, 32, 12, 16, 4, 10, 30, 6, 4, 19, 11, 14, 9, 5, 24, 9, 18, 8, 16, 15, 15, 24, 4, 9, 33, 11, 20, 7, 6, 22, 13, 4, 6, 42, 0, 4, 4, 6, 17, 20, 15, 0, 0, 3, 15, 34, 30, 15, 9, 33, 3, 29, 11, 13, 2, 11, 29, 6, 16, 7, 16, 25, 7, 4, 10, 27, 55, 0, 22, 7, 5, 12, 38, 15, 18, 5, 6, 54, 15, 16, 15, 9, 52, 24, 3, 30, 5, 8, 18, 18, 18, 12, 24, 2, 12, 5, 18, 36, 9, 1, 2, 25, 16, 9, 6, 3, 5, 33, 15, 17, 15, 21, 10, 7, 19, 7, 5, 48, 18, 13, 14, 13, 2, 41, 37, 13, 11, 36, 11, 7, 7, 18, 28, 5, 4, 20, 11, 22, 0, 15, 25, 16, 9, 6, 0, 10, 3, 20, 34, 28, 28, 20, 36, 6, 25, 9, 19, 5, 19, 11, 3, 42, 6, 21, 14, 28, 22, 15, 18, 1, 18, 10, 3, 9, 37, 10, 9, 31, 10, 9, 9, 43, 4, 14, 9, 8, 13, 23, 5, 33, 12, 20, 36, 2, 20, 9, 28, 3, 33, 10, 9, 1, 29, 1, 26, 31, 0, 4, 23, 28, 7, 28, 13, 6, 5, 31, 14, 4, 9, 26, 10, 13, 15, 32, 0, 19, 40, 22, 9, 41, 7, 4, 13, 24, 8, 12, 5, 21, 14, 6, 15, 40.

6.4. $\sigma_8^3 = 32$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

3, 5, 30, 22, 18, 11, 5, 16, 30, 8, 4, 19, 31, 3, 10, 14, 11, 14, 27, 13, 13, 3, 29, 14, 28, 6, 9, 11, 14, 6, 38, 11.

6.5. $\sigma_8^4 = 226$. Mejor cota superior conocida hallada con el algoritmo

5, 34, 23, 18, 0, 24, 18, 16, 26, 8, 24, 8, 4, 5, 19, 2, 21, 6, 28, 23, 10, 32, 33, 7, 9, 14, 1, 29, 9, 20, 16, 6, 34, 20, 2, 5, 30, 24, 9, 28, 0, 19, 17, 18, 15, 33, 9, 16, 36, 2, 28, 9, 19, 18, 20, 18, 14, 9, 46, 8, 19, 8, 26, 6, 9, 1, 40, 7, 26, 0, 8, 14, 37, 3, 19, 20, 1, 21, 38, 10, 24, 2, 17, 14, 25, 4, 36, 10, 8, 35, 18, 42, 9, 4, 10, 6, 27, 45, 3, 6, 21, 23, 3, 4, 29, 23, 8, 27, 4, 17, 17, 7, 20, 31, 8, 25, 15, 5, 1, 28, 0, 23, 6, 34, 20, 8, 33, 18, 3, 34, 9, 36, 2, 28, 26, 12, 21, 7, 2, 40, 23, 35, 2, 44, 10, 24, 30, 4, 3, 22, 32, 6, 20, 6, 0, 17, 11, 10, 23, 36, 16, 6, 2, 37, 29, 12, 31, 23, 2, 31, 46, 3, 26, 28, 10, 24, 30, 8, 19, 8, 8, 2, 25, 10, 12, 34, 3, 18, 4, 42, 5, 25, 8, 26, 21, 1, 12, 33, 8, 44, 23, 34, 16, 6, 33, 10, 33, 6, 2, 10, 14, 23, 2, 8, 31, 23, 3, 34, 35, 6, 26, 31, 4, 24.

6.6. $\sigma_7^3 = 25$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

1, 9, 29, 2, 10, 2, 26, 9, 21, 1, 9, 31, 9, 8, 19, 3, 28, 10, 2, 10, 25, 3, 22, 8, 1.

6.7. $\sigma_7^4 = 123$. Mejor cota superior conocida, hallada con el algoritmo

1, 39, 13, 29, 31, 24, 0, 4, 39, 18, 9, 10, 32, 0, 29, 8, 17, 2, 26, 29, 13, 39, 23, 0, 29, 7, 29, 19, 17, 2, 39, 24, 0, 14, 9, 10, 30, 31, 16, 31, 10, 13, 11, 32, 23, 8, 0, 36, 21, 13, 1, 24, 31, 0, 20, 15, 3, 27, 14, 8, 19, 30, 25, 10, 7, 37, 22, 5, 38, 24, 32, 12, 10, 7, 27, 15, 3, 18, 38, 18, 14, 8, 30, 32, 4, 30, 33, 22, 23, 23, 24, 23, 19, 13, 1, 33, 31, 7, 31, 0, 18, 13, 11, 11, 16, 0, 36, 17, 14, 8, 27, 10, 7, 21, 30, 23, 15, 3, 33, 32, 0, 38, 29, 22.

6.8. $\sigma_6^3 = 25$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

6, 9, 6, 15, 22, 4, 14, 6, 0, 28, 0, 9, 14, 25, 4, 5, 22, 7.

6.9. $\sigma_6^4 = 72$. Mejor cota superior conocida, hallada con el algoritmo

0, 10, 40, 8, 30, 12, 15, 14, 28, 10, 8, 0, 34, 0, 42, 14, 28, 10, 19, 8, 30, 12, 2, 10, 38, 12, 31, 6, 6, 8, 43, 16, 4, 2, 43, 10, 28, 14, 3, 6, 38, 16, 9, 4, 44, 6, 33, 8, 26, 8, 7, 4, 44, 6, 13, 6, 38, 16, 25, 14, 16, 10, 27, 16, 4, 2, 51, 6, 6, 8, 39, 12.

6.10. $\sigma_6^5 = 540$. Mejor cota superior conocida, hallada con el algoritmo

7, 18, 1, 9, 9, 27, 6, 11, 27, 8, 26, 7, 18, 24, 7, 15, 21, 0, 27, 15, 19, 23, 2, 9, 13, 13, 19, 2, 9, 37, 7, 5, 8, 31, 8, 35, 10, 2, 4, 15, 24, 14, 19, 6, 32, 14, 1, 26, 15, 2, 9, 9, 23, 13, 42, 1, 14, 6, 12, 14, 9, 18, 9, 16, 13, 31, 24, 3, 8, 21, 8, 34, 27, 7, 25, 11, 14, 4, 22, 21, 20, 4, 1, 31, 3, 10, 7, 15, 27, 18, 14, 7, 4, 19, 25, 4, 28, 32, 7, 7, 26, 6, 13, 16, 9, 21, 1, 12, 0, 2, 40, 5, 6, 2, 12, 14, 11, 26, 31, 10, 6, 2, 23, 16, 2, 38, 25, 9, 14, 18, 7, 5, 4, 13, 42, 20, 3, 7, 10, 3, 4, 7, 7, 17, 9, 3, 29, 13, 1, 15, 20, 9, 1, 10, 28, 15, 11, 19, 15, 6, 41, 9, 18, 16, 7, 24, 1, 6, 12, 9, 16, 16, 23, 8, 6, 6, 27, 12, 17, 6, 14, 22, 6, 4, 5, 18, 20, 6, 26, 20, 10, 0, 7, 29, 18, 10, 6, 13, 31, 8, 5, 17, 14, 18, 19, 3, 0, 22, 22, 16, 5, 4, 41, 10, 9, 13, 8, 1, 15, 21, 9, 14, 3, 48, 16, 7, 23, 8, 39, 0, 10, 11, 45, 21, 5, 12, 9, 23, 3, 10, 8, 4, 5, 16, 3, 22, 0, 21, 33, 6, 15, 4, 19, 8, 14, 14, 3, 9, 11, 21, 21, 12, 21, 27, 4, 8, 27, 5, 13, 25, 2, 7, 3, 21, 10, 4, 26, 12, 13, 0, 10, 11, 9, 3, 19, 12, 15, 9, 33, 2, 19, 20, 21, 7, 0, 24, 10, 9, 13, 19, 14, 7, 20, 22, 0, 13, 13, 10, 19, 14, 26, 18, 12, 5, 13, 16, 7, 2, 13, 17, 12, 3, 3, 33, 3, 12, 18, 24, 7, 15, 12, 14, 4, 11, 6, 3, 11, 34, 9, 5, 19, 11, 6, 9, 1, 2, 27, 7, 40, 8, 31, 14, 12, 9, 1, 1, 17, 12, 15, 14, 18, 19, 6, 8, 9, 20, 8, 6, 19, 12, 9, 13, 27, 1, 21, 0, 9, 5, 15, 6, 24, 15, 16, 0, 25, 4, 31, 4, 15, 20, 14, 17, 10, 14, 7, 17, 5, 7, 15, 4, 5, 19, 1, 15, 5, 8, 10, 8, 9, 10, 3, 19, 6, 1, 16, 39, 2, 1, 14, 10, 29, 3, 27, 9, 10, 23, 6, 19, 4, 1, 10, 6, 10, 24, 1, 10, 29, 6, 13, 7, 4, 10, 29, 6, 7, 12, 33, 8, 27, 13, 10, 32, 9, 7, 26, 6, 14, 9, 17, 15, 21, 10, 9, 27, 26, 8, 18, 38, 8, 21, 14, 10, 19, 14, 2, 1, 2, 51, 9, 26, 1, 1, 18, 5, 4, 16, 15, 22, 24, 18, 18, 7, 29, 11, 9, 12, 9, 18, 4, 8, 28, 3, 10, 14, 14, 10, 21, 10, 10, 10, 3, 29, 18, 13, 13, 13, 11, 22, 33, 3, 18, 4, 2, 17, 15, 7, 4, 11, 15, 21, 6, 5, 13, 9, 28, 17, 10, 1, 12.

6.11. $\sigma_5^3 = 13$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

0, 7, 13, 13, 7, 7, 2, 17, 15, 1, 11, 3, 12.

6.12. $\sigma_5^4 = 52$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

15, 4, 8, 3, 19, 5, 26, 0, 23, 0, 14, 3, 0, 27, 24, 15, 16, 5, 19, 3, 14, 0, 27, 3, 19, 5, 2, 5, 22, 0, 32, 0, 13, 12, 5, 6, 12, 3, 8, 19, 5, 19, 5, 26, 0, 22, 1, 16, 16, 3, 19, 5.

6.13. $\sigma_5^5 = 200$. Mejor cota superior conocida, hallada con el algoritmo

18, 27, 3, 3, 41, 10, 4, 17, 3, 0, 3, 12, 45, 3, 38, 30, 17, 3, 11, 4, 28, 3, 8, 22, 31, 4, 28, 15, 4, 31, 3, 1, 32, 5, 32, 6, 13, 12, 4, 14, 43, 11, 4, 32, 18, 3, 10, 3, 0, 3, 28, 7, 41, 28, 18, 15, 4, 32, 3, 7, 4, 15, 44, 1, 3, 37, 7, 3, 26, 4, 14, 15, 20, 5, 7, 13, 13, 14, 7, 10, 16, 4, 16, 43, 5, 36, 3, 22, 27, 3, 1, 43, 3, 8, 4, 11, 3, 27, 4, 30, 13, 4, 33, 26, 17, 13, 3, 0, 3, 26, 10, 39, 10, 30, 0, 3, 13, 1, 40, 5, 27, 3, 0, 3, 26, 17, 0, 3, 33, 22, 21, 13, 4, 30, 6, 3, 6, 21, 4, 12, 43, 3, 1, 40, 22, 3, 27, 5, 7, 35, 8, 7, 18, 4, 33, 18, 13, 16, 2, 3, 40, 3, 17, 15, 4, 28, 8, 26, 27, 4, 28, 3, 5, 5, 4, 35, 18, 31, 3, 45, 6, 3, 0, 3, 17, 4, 12, 3, 41, 7, 0, 37, 26, 3, 6, 4, 15, 27, 5, 31.

6.14. $\sigma_4^3 = 8$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

0, 4, 20, 4, 11, 2, 2, 2.

6.15. $\sigma_4^4 = 24$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

12, 4, 1, 18, 3, 17, 5, 17, 3, 20, 1, 2, 18, 5, 18, 1, 22, 1, 13, 1, 20, 1, 20, 5.

6.16. $\sigma_4^5 = 64$. Solución exacta hallada con el algoritmo en el 100% de las corridas

7, 21, 4, 21, 21, 5, 22, 5, 14, 25, 10, 25, 9, 9, 24, 9, 19, 5, 30, 5, 13, 21, 12, 21, 16, 9, 16, 9, 17, 25, 2, 25, 5, 25, 8, 25, 9, 9, 26, 9, 14, 21, 6, 21, 21, 5, 20, 5, 27, 9, 18, 9, 17, 25, 0, 25, 16, 5, 28, 5, 13, 21, 14, 21.

6.17. $\sigma_3^6 \leq 73$. Mejor cota superior conocida. Esta es otra solución distinta a la presentada en la Figura 2

8, 1, 23, 6, 3, 2, 17, 10, 18, 6, 18, 0, 10, 0, 0, 0, 27, 16, 7, 2, 9, 28, 0, 6, 0, 5, 9, 2, 6, 4, 13, 16, 12, 14, 3, 6, 2, 8, 22, 13, 12, 7, 1, 10, 15, 12, 9, 3, 17, 24, 13, 10, 7, 2, 3, 2, 6, 10, 9, 12, 8, 8, 22, 5, 4, 13, 6, 12, 1, 8, 6, 3, 19.

REFERENCIAS

AARTS, E. and J. KORST (1990): **Simulated Annealing and Boltzmann Machines. A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing**. John Wiley & Sons, Chichester.

BIGGS, N. (1974): **Algebraic Graph Theory**, Cambridge University Press.

BLOKHUIS, A. and C.W.H. LAM (1984): "More coverings by rook domains", *Journal of Combinatorial Theory Series A.*, 36, 240-244.

CAMERON, P.J. and J.H. VAN LINT (1991): "Design, Graphs, Codes and their Links", London, **Mathematical Society Student Texts** 22, Cambridge University Press.

DAVIES, R. and G.F. ROYLE (1997): "Graph domination, tabu search and the football pool problem". **Discrete Applied Mathematics** 74(3), 217-228.

GAREY, M. and D. JOHNSON (1979): **Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-completeness**. W.H. Freeman, San Francisco.

HÄMÄLÄINEN, H. O. and S. RANKINEN (1991): "Upper bounds for football pool problem and mixed covering codes", **Journal of Combinatorial Theory, Series A.**, 56, 84-95.

KNUTH, D.E. (1981): "Seminumerical Algorithms", Segunda edición, volumen 2 del libro **The Art of Computer Programming**. Addison-Wesley, Reading, Mass.

KOSCHNICK, K.U. (1993): "A new upper bound for the football pool problem for nine matches", **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 62, 162-167.

VAN LAARHOVEN, P.J.M. (1988): "Theoretical and computational aspects of simulated annealing", **Centrum voor Wiskunde en Informatica**, Tract 57.

VAN LAARHOVEN, P.J.M.; E.J.L. AARTS; J.H. VAN LINT and L.T. WILLE (1989): "New upper bounds for the football pool problem for 6, 7 and 8 matches", **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 52, 304-312.

ÖSTERGÅRD, P.R.J. and H.O. HAMALAINEN (preprint): **A new table of binary/ternary mixed covering codes**.

ÖSTERGÅRD, P.R.J. (1994): "New upper bound for the football pool problem for 11 and 12 matches", **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 67, 161-168.

_____ (1995): "A combinatorial proof for the football pool problem for six matches", **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 160-163.

PIZA, E.; J. TREJOS and A. MURILLO (1998): "Global stochastic optimization techniques applied to partitioning", in book **Advances in Data Science and Classification**, 185-191; Springer Verlag.

WILLE, L.T. (1987): "The football pool problem for 6 matches: A new upper bound obtained by simulated annealing", **Journal of Combinatorial Theory**, Series A, 45, 171-177.