CONTRIBUCIONES ABELIANAS AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Carlos Sánchez Fernández, Universidad de La Habana. Cuba

Quiero consagrarme con todas mis fuerzas a aportar un poco más de claridad en la prodigiosa oscuridad que hoy se encuentra incontestable en el análisis.
Abel, carta del 29 de marzo de 1826 al profesor Ch. Hansteen.

RESUMEN
La mayoría de los trabajos publicados sobre la vida y la obra de Niels Abel enfatiza su aporte a la teoría de las ecuaciones algebraicas. En este artículo, con el uso de la 2ª edición de las Oeuvres Complètes de Abel y otras fuentes originales y secundarias, tratamos de argumentar que su influencia también fue significativa en la formación del estilo de pensamiento predominante en el análisis matemático del siglo XIX.

ABSTRACT
Most of the publications dedicated to life and work of Niels Abel dwell on his contributions to the theory of algebraic equations. In the present work, through the examination of the second edition of Abel’s Oeuvres Complètes as well as other original and secondary sources, we argue that his influence was determinant in the development of the styles of thought prevalent in nineteenth-century’s mathematical analysis.

El "Programa de Abel"

Niels Henrik Abel (1802-1829) fue un matemático noruego de procedencia muy humilde, que nació en un momento en que Noruega vivía un período de gran carestía y dificultades económicas. Estudió matemáticas de forma autodidacta y en la universidad de Cristianía, la actual Oslo. Su probado talento en la resolución del problema de la quíntica, le ganó una beca de estudios por los principales centros científicos europeos (entre 1825 y 1827). A su regreso a Noruega tuvo que trabajar dando clases privadas para ayudar a la familia que se encontraba en precaria situación económica. Estuvo muy enfermo de tuberculosis y, no obstante su corta vida, se ocupó intensamente por resolver difíciles problemas de la teoría de ecuaciones algebraicas, las funciones elípticas y los fundamentos de la teoría de series. Sus ideas sobre la insolubilidad de ecuaciones de grado igual o superior al quinto abrieron la vía para el estudio de las estructuras algebraicas y enseguida fueron bien valoradas por su originalidad. Pero en vida de Abel no fue debidamente reconocido su mérito en el desarrollo del Análisis Matemático y solo postmorten, en 1830 le fue otorgado el premio de la Academia de Ciencias de París por la creación, junto a Jacobi, de la teoría de funciones elípticas. (El lector interesado en la biografía de Abel puede consultar las referencias en la bibliografía al final: [Ore (1957), Sánchez-Noriega (2005) y Stubhaug (2000)])

Para un lector con la formación matemática contemporánea, al conocer las *Obras Completas* de Niels Abel, podrá parecerle que nuestro héroe cosechó sus productos en tres campos desligados entre sí: la resolución por radicales de las ecuaciones algebraicas, la teoría de las funciones elípticas y la sumación de series infinitas. Realmente estos tres temas están íntimamente conectados. Tanto que algunos años después de la muerte de Abel, en 1858, el entonces joven matemático francés Charles Hermite, publicó una expresión de la solución de la quíntica a través de las funciones elípticas abelianas, enlazando magistralmente estos dos campos. Paralelamente, el prusiano Weierstrass, desarrollaría toda una teoría de representación en series infinitas para presentar armónicamente una teoría general con los resultados de Abel, Jacobi y otros, sobre las integrales hiperelípticas y sus inversas las funciones abelianas.

Pero no pretendemos detenernos en la explicación de los logros de Hermite, Weierstrass y otros que como ellos, “heredaron” la obra de Abel y la unieron a la de Jacobi, para constituir una teoría amplia y efectiva de las funciones abelianas. Nuestro objetivo principal en este trabajo es señalar qué aspectos caracterizan el espíritu legado por Abel al análisis matemático.

Si se estudia detenidamente toda la producción matemática de Abel, se observa una coherencia que reside más en el estilo que en los temas. El “Programa de Abel”, se puede comprender como **la búsqueda del rigor en el análisis matemático a través del lenguaje claro y preciso del álgebra**. ¿Pero podemos decir que este proyecto es original del talento del joven Abel?

A partir del siglo XVIII, el Análisis Matemático no es más que el estudio de las funciones, que no son otra cosa que la expresión analítica, abstracta, de las curvas y superficies de la geometría. Todos los cálculos con estas funciones se pretenden reducir a la manipulación de los polinomios algebraicos o en su defecto a los polinomios infinitos, las series de potencias. El mejor representante de esta voluntad de **reducir el cálculo al álgebra, a través de las series de potencias**, sería Leonhard Euler. Fue Euler el primero que postuló, en su obra cumbre de 1748 "Introducción al Análisis de los Infinitos", que el análisis no era otra cosa que el estudio de las funciones y que las funciones elementales de interés para el análisis pueden ser algebraicas y trascendentes. "Divídanse las funciones en algebraicas y trascendentes; son aquellas las compuestas sólo mediante operaciones algebraicas, éstas en cambio las funciones en que están presentes operaciones trascendentes". [Euler, 1748, pág. 17] Según Euler, el mejor método para manipular y analizar las funciones trascendentes es representarlas en series de potencias, para él una especie de polinomios de grado infinito. "Comoquiera que las funciones fraccionarias e irracionales de z no estén contenidas en la forma entera $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. de suerte que el número de sus términos sea finito, se suelen buscar expresiones que se prolongan hasta infinito para exponer el valor de cualquier función quebrada o irracional. Y aun se ha de juzgar mejor entendida la naturaleza de las funciones trascendentes si se expresa mediante tales formas, por más que sean infinitas" [Euler, 1748, pags. 59-60]. La dificultad estriba en que este estudio por medio de las series exige la manipulación de una expresión analítica con una cantidad indefinida de términos, que no siempre posee las propiedades de los polinomios. Se necesitaba, por tanto, una definición rigurosa de suma de una serie infinita de funciones y la precisión de las propiedades de tales sumas infinitas. Realmente, esto no quedó claro en la extensa obra de Euler.

Una de las primeras tentativas de darle al análisis matemático los fundamentos rigurosos para el cálculo con las series infinitas se debe a Lagrange. El proyecto de Lagrange se hace público en 1797, cuando aparece su "Théorie des fonctions analytiques". Uno de los objetivos de esta memoria, que Abel va a encontrar en la bien abastecida biblioteca de la universidad de Cristianía, queda explícito en un pequeño artículo de carácter divulgativo que aparece un poco antes en el *Journal de la Escuela Politécnica*:

> "La teoría de funciones que me propongo exponer este año con mayores detalles que toda la Obra antes impresa, tiene por objeto hacer desaparecer las dificultades que se encuentran en los principios del Cálculo Diferencial y que detienen a todos los que comienzan a estudiarlo, lo consigo ligando inmediatamente este Cálculo al Álgebra, ciencia de la que ha estado separado hasta ahora" [Lagrange, 1797].

Lagrange pretende demostrar lo que muchos antes de él, tales como Euler, asumían sin una prueba contundente: las funciones que intervienen en el análisis, las *funciones analí*ticas, son en general localmente desarrollables en series de potencias.

La voluntad lagrangiana de dar una teoría general basada en un principio simple, no hace más que poner en evidencia teórica las doctrinas de Euler quién con mayor audacia e imaginación utilizó las expresiones analíticas de las funciones. La influencia de la obra de Lagrange fue tal que, en adelante, muchos de los textos de cálculo hasta bien adentrado el siglo XX, aparecieron con el título de *Análisis Algebraico* (Sobre la influencia de estas ideas en los estados germanos recomendamos [Jahnke, 1993])

Es conocido que las fuentes principales de saber matemático para el joven Niels fueron las obras de Euler y Lagrange. Es decir, desde muy joven -él siempre lo fue- Abel conocía del proyecto de unidad matemática a través de la algebrización y del uso de las series de potencias para algebrizar el cálculo.

¿Pero estaba cumplido este proyecto? ¿Tenía la teoría de series el fundamento riguroso que con ellas se pretendía conseguir en todo el análisis? El trabajo de Lagrange coronó toda una época dorada para la sumación. Lagrange se preocupó por desterrar del análisis el uso de infinitesimales, incrementos evanescentes o fluxiones, pero con sus manejos algebraicos no aclararía el concepto convergencia en las representaciones analíticas, ni legalizaría las manipulaciones con las sumas infinitas como si fuesen sumas finitas.

En una carta del 29 de marzo de 1826, desde Dresde, a su maestro y protector Christopher Hansteen, Abel se expresa de la forma siguiente:

> "La matemática pura en su sentido más estricto debe ser en el futuro el objeto exclusivo de mis estudios. <u>Quiero consagrarme con todas mis fuerzas a aportar un poco más de claridad</u>

a la prodigiosa oscuridad que se encuentra hoy incontestable en el análisis Carece hasta tal punto de plan y de sistema que es verdaderamente maravilloso que pueda ser estudiado por tanta gente y lo peor del caso es que nunca ha sido tratado rigurosamente. Sólo hay unas pocas proposiciones en el análisis superior, que se hayan demostrado de una manera lógicamente sostenible. En todas partes encuentra uno esta manera infortunada de concluir lo general partiendo de lo particular y es extremadamente asombroso que tal procedimiento, a pesar de todo, haya llevado a tan pocas de las así llamadas paradojas. Sería sumamente interesante ocuparse en investigar la razón... A mi criterio, esto se debe a que las funciones de las que hasta ahora se ha ocupado el análisis, pueden en su mayor parte, ser expresadas por medio de series de potencias. Pero si intervienen otras funciones, lo que a decir verdad no ocurre muy frecuentemente, entonces la cosa no marcha bien y de las conclusiones falsas se infieren un montón de proposiciones incorrectas que se encadenan. Yo he examinado varias, y estoy bastante contento por haberles dado claridad (a la mayor parte). [todos los subrayados de C.S.F.]

Observen como se expresa madura y críticamente sobre el estado del análisis matemático en 1826... ¡Y Abel aún no había cumplido los 24 años de edad cuando escribe esta carta!

Exactamente son solo dos publicaciones de Abel las que aparecen en el "Journal de Crelle" sobre el tema de la convergencia y la sumación de series infinitas: "Investigación sobre la serie $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$" en el número 4 del primer volumen en 1826, y el segundo una "Nota sobre la memoria del Sr. L. Olivier que lleva por título Observaciones sobre las series infinitas y su convergencia", que apareció en el número 1 del tercer volumen en 1828. Pero los editores de la 2da. edición de sus Obras Completas recopilaron varios manuscritos inéditos sobre el tema [Abel, 1881, pp. 197-205, Vol. 2] probablemente escritos en 1827 y que dan también luz sobre "el programa de Abel". Hagamos un sintético análisis del contenido esencial de estos artículos.

La serie del binomio

La serie del binomio $(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$ para m no entero, aparece en el margen de un ejemplar de la "Arithmetica Infinitorum" de Wallis, escrita por el joven Newton en 1665. Años más tarde, en una carta que Leibniz dirige al Secretario de la Royal Society de Londres, se interesa en qué saben los matemáticos ingleses sobre las series infinitas. Esta carta es respondida por Newton el 13 de junio de 1676, enunciando el teorema del binomio para exponente racional, pero sin explicar los orígenes de esta fórmula. Sea cual sea el origen y quién fue el primero que la publicó, lo cierto es que para la escuela británica ésta será un arma potente para "algebrizar" las funciones mecánicas, inexplicables o trascendentes, como indistintamente se les llamaba a las no algebraicas. En la casi totalidad de los textos de Cálculo del siglo XVIII será la herramienta principal para obtener los desarrollos en series de potencias necesarios. Hasta entonces no se presta atención a determinar para qué valores converge la susodicha serie. A comienzos del siglo XIX van a aparecer dos demostraciones de los valores de m para los cuales hay convergencia, una de Augustin Cauchy en su Análisis Algebraico [Cauchy, 1821] y otra en 1826 de Niels Abel en el "Journal de Crelle" vol. 1, nº4 [Abel, 1881, I, 219-250].

En el libro de Cauchy se llama la atención sobre la importancia de la serie del binomio. La organización de los seis primeros capítulos está concebida con el objetivo principal de obtener el desarrollo de $(1 + x)^m$ para x y m reales. En el capítulo 6 de su *Análisis Algebraico*, Cauchy da sus definiciones sobre las series infinitas: convergencia, divergencia y suma; los criterios de convergencia, entre los que aparece el hoy llamado "criterio de Cauchy" sin una demostración rigurosa a causa de una presentación todavía confusa de los números reales. También encontramos el resultado falso de que la suma de una serie de funciones continuas es continua. Cauchy aplica la totalidad de los resultados precedentes al estudio de la serie del binomio.

Considera la función $g(m) = 1 + \frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$ y muestra que:

- g(m) está definida para todo $x \in (-1, 1)$,

- g es continua, utilizando el resultado falso del capítulo 6,

- g verifica la ecuación funcional g(m(g(m´) = g(m + m´).. Por tanto:

- g es una función exponencial $g(\lambda) = A^{\lambda}$ y enseguida que:

- $g(m) = A^m = [g(1)]^m = (1 + x)^m$

Queda así "probado" que la serie del binomio es válida para todo $x \in (-1, 1)$.

Es Abel quien primero se atreve a señalar el error de Cauchy sobre la suma de una serie de funciones continuas. En una carta dirigida a su amigo Holmboe, en enero de 1826, Abel da como contraejemplo la serie convergente de funciones continuas

$$\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ldots$$

que en $[0, \pi]$ tiene como suma la función discontinua $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$.

En la memoria sobre la serie del binomio aparecida en el "Journal de Crelle" en 1826, Abel indica que no se han examinado todos los casos donde esta serie es convergente y que el objetivo de esta memoria es tratar de llenar una laguna en la solución del problema siguiente: encontrar la suma de la serie $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$, para todos los valores reales o imaginarios de x y m para los cuales la serie es convergente.

El camino que toma Abel es similar al de Cauchy, pero utiliza teoremas más precisos sobre las series, trabaja en el campo complejo y sobre todo da una definición de continuidad más adaptable al asunto:

> "una función f(x) será llamada continua en x entre las cotas x = a y x = b, si para un valor cualquiera de x comprendido entre esas dos cotas, la cantidad $f(x - \beta)$, para los valores siempre decrecientes de β, se aproxima indefinidamente al límite f(x)"

Se trata aquí de la definición de continuidad de f en un punto x, lo que no era el caso en la definición de Cauchy, que trataba la continuidad en un intervalo (¡sin asomo, por supuesto, de la definición de *continuidad uniforme*!)

Abel comienza por estudiar en detalle todos los casos para x y m números complejos donde la serie del binomio converge:

i. para todo x tal que $|x| < 1$ y cualquiera sea m,

ii. para $|x| < 1$, $Re(x) \neq -1$, $Re(m) > -1$,

iii. para $|x| < 1$, $Re(x) \neq -1$, $Re(m) > - 0$,

y prueba que en todos los otros casos la serie del binomio diverge.

Después denota $\varphi(m)$ la suma de la serie, verifica la relación $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$, y con las notaciones $x = a + ib$ y $m = k + ik'$, $\varphi(m) = p + iq$, y tras cálculos muy detallados encuentra una expresión general de la serie del binomio en el caso complejo:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

$$\left[\cos\left(k\arctan\frac{b}{1+a}+\frac{1}{2}k'\log((1+a)^2+b^2)\right)+i\,\mathrm{sen}\left(k\arctan\frac{b}{1+a}+\frac{1}{2}k'\log((1+a)^2+b^2)\right)\times\right.$$

$$\times\ [(1+a)^2+b^2]^{\frac{k}{2}}\exp\left(-k'\arctan\frac{b}{1+a}\right)$$

La fórmula del binomio para m y x reales Abel la obtiene inmediatamente para los valores particulares $b = 0$ y $k' = 0$. En tal caso, $\varphi(m) = (1 + a)^m = (1 + x)^m$.

La serie del binomio $(1 + x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$, para m no entero, ya está dispuesta rigurosamente para ser legítimamente la herramienta principal para obtener los desarrollos en series de potencias necesarios.

En una carta a Holmboe de diciembre 1826 escribirá:

> "Me atrevo a decir que esta es la primera demostración rigurosa de la fórmula del binomio, en todos los casos posibles".

Tenía razón.

La refutación a Olivier

El otro artículo de Abel sobre series infinitas se motiva por un trabajo de Louis Olivier [Olivier, 1827] donde se enuncia el teorema siguiente:

> *Si en una serie infinita encontramos que el producto de n por el n-ésimo término, o por el n-ésimo grupo de términos que conserva el mismo signo, es cero, para $n = \infty$, podemos considerar precisamente esta situación como un indicador de que la serie es convergente, y recíprocamente la serie no es convergente si el producto na_n no es cero para $n = \infty$.*

Comienza Abel con la muestra de un contraejemplo:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}=\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\frac{1}{n\log n}+\ldots$$

serie que es divergente, no obstante ser $na_n = \frac{1}{\log n}$ infinitesimal, cuando $n \to \infty$. Para demostrar la divergencia de esta serie Abel busca una cota inferior para cada uno de sus términos. Para esto prueba primero la desigualdad:

$$\log(\log(1 + n)) < \log(\log n) + \frac{1}{n\log n},\ \text{para todo } n > 1$$

y suma término a término estas desigualdades para todos los valores de $n > 2$. Al cancelar obtiene la expresión:

$$\log(\log(1 + n)) < \log(\log 2) + \frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{n\log n},$$

de donde, se desprende la divergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$.

Pero Abel no se detiene ahí y como en el caso de la refutación a Cauchy, siguiendo su *espíritu* creativo prueba:

Si la serie $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ es divergente, entonces la serie

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_{n-1}} + \ldots$$

es también divergente.

E inmediatamente, el resultado más general:

Supongamos que $\varphi(n)$ es una función de n tal que la serie $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ es convergente o divergente de acuerdo a si $\varphi(n)a_n$ es cero o no cuando $n = \infty$. Entonces la serie

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(3)} + \frac{1}{\varphi(3)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n)} + \ldots$$

será divergente y la serie

$$\frac{1}{\varphi(2)\cdot\frac{1}{\varphi(1)}} + \frac{1}{\varphi(3)\left(\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)}\right)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n)\left(\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n-1)}\right)}$$

es convergente; puesto que en la primera tenemos $\varphi(n)a_n = 1$ y en la segunda $\varphi(n)a_n = 0$ para $n = \infty$.

Con este criterio general demostrado Abel retoma el caso de Olivier, que no es más que $\varphi(n) = n$:

[...] las dos series en cuestión devienen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

y

$$\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\left(1 + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{4\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} + \ldots + \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)} + \ldots$$

las cuales son ambas divergentes.

La forma en que Abel refuta el teorema de Olivier es un ejemplo de su maestría para esclarecer los puntos todavía oscuros en el análisis matemático de su época. Agreguemos que aquí se puede observar la primera versión del hoy conocido criterio de convergencia de Abel-Dini, como aparece en [Knopp, 1944, pág.290]:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es una serie divergente arbitraria de términos positivos y

$$D_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$$

es su suma parcial, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{\alpha}}$$

converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leq 1$.

En su refutación a Olivier, Abel utiliza un resultado similar al caso $\alpha = 1$.

Abel también dice que la última parte del teorema de Olivier es válida y aquí hay un error, salvo que Abel estuviera pensando en una serie de términos positivos monótonamente decrecientes a cero.

El otro tema en el que se advierte la intención de Abel de hacer más riguroso y general el Análisis Matemático con un espíritu algebraico, es en el de las funciones elípticas. Abel pretendió construir toda una teoría de las funciones trascendentes que son inversas de las funciones integrales de las algebraicas. Hoy con justedad estas integrales son llamadas integrales abelianas y sus inversas funciones abelianas.

La teoría general de las funciones elípticas

El *Grand Prix* de Ciencias Matemáticas de la Academia de París en 1830 se le otorgó *ex-aequo* a Niels Abel (postmorten) y a Karl Jacobi, por sus contribuciones a la formación de la teoría de las funciones elípticas. Estos dos matemáticos eran muy diferentes entre sí, pero cuando en septiembre de 1827 ambos publicaron sus primeros trabajos sobre las nuevas funciones trascendentes, eran unos jóvenes inspirados de 23 y 25 años de edad, que tenían varios intereses matemáticos comunes. Y en su lucha fabulosa por establecer una teoría de las funciones elípticas, forjaron una rivalidad y, a la vez, una complicidad, que la muerte no consiguió destruir.

Hoy no quedan dudas de que los dos, independientemente, llegaron a formular las principales propiedades de las funciones elípticas. Pero, todavía muchos piensan que lograron simultáneamente sus resultados. En lo que sigue vamos a tratar de aclarar el efectivo aporte de Abel en la conformación de la teoría de las funciones elípticas e hiperelípticas o abelianas, como se les llama con justicia. Pero antes daremos unas breves anotaciones sobre los resultados anteriores que influyeron tanto en Abel como en Jacobi. (Para el que desee profundizar en la historia de las funciones elípticas y abelianas la mejor obra que conocemos es [Houzel, (1978)])

Las funciones elípticas son las inversas de las integrales trascendentes definidas por $\int_0^t R\left(x, \sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}\right)dx$ donde R(x,y) es una función racional de las dos variables y los coeficientes ai son tales que a0 ó a1 es diferente de cero y el polinomio subradical no tiene raíces dobles. Según los documentos conservados y hasta el momento conocidos, antes de Abel y Jacobi, sólo Gauss trató las funciones elípticas, sobre todo en un caso particular: el seno y el coseno lemniscáticos, funciones inversas de las integrales lemniscáticas del tipo $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, muy similares a las funciones circulares, que pueden considerarse inversas de integrales del tipo $\theta = \varphi(t) = \int_0^t \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, para $-1 < t < 1$. Estos trabajos de Gauss eran desconocidos tanto por Abel como por Jacobi.

Aunque varios sabios del siglo XVIII se interesaron en las integrales elípticas, la obra que influye decisivamente en los jóvenes Abel y Jacobi es la de Euler y la de Legendre. Los resultados más importantes que encontró Euler se conocen como *fórmulas de adición* para las integrales elípticas.

Las fórmulas de adición expresan algebraicamente el valor de la función de la suma de dos argumentos a través de los valores de esta misma función para cada uno de los sumandos, por ejemplo:

Para la función exponencial: $\exp(\alpha + \beta) = \exp(\alpha)\exp(\beta)$

Para el seno circular: $$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\beta)} + \operatorname{sen}(\beta)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \end{cases}$$

Leonhard Euler, además, generaliza a las integrales elípticas muchos de los resultados hallados anteriormente para el caso de la integral lemniscática y trató de extender sus resultados a casos de polinomios subradicandos de grado superior a cuatro, pero sus métodos no eran generalizables. Euler llamó la atención sobre la analogía entre las integrales elípticas y las integrales para las funciones trigonométricas inversas. Sin embargo, Euler en ningún momento trató con las inversas de aquellas funciones definidas por integrales elípticas.

El siguiente paso hacia la sistematización de una teoría será dado por Legendre, quién motivado por los trabajos de Euler, se dedicará a forjar la obra definitiva sobre integrales elípticas.

Los resultados de Legendre se expusieron de forma extensa y sistemática, en sus *Ejercicios de cálculo integral* en tres volúmenes (1811, 17 y 26) y en su obra principal, el *Tratado de las funciones elípticas* en 2 gruesos volúmenes aparecidos en 1825 y 1826 respectivamente. Este tratado resume la obra de todos sus predecesores, enuncia una cantidad increíble de resultados originales y es presentada con un orden riguroso y didáctico. Sin embargo, Legendre no consiguió comprender lo necesario para dar el salto cualitativo correspondiente: la consideración de las funciones inversas de las funciones integrales.

Los que ganarán el mérito de abrir una nueva línea de investigación con las funciones inversas de las integrales elípticas, serán los jóvenes Niels Abel y Carl Jacobi. Como mérito de Legendre debemos anotar que cuando conoció los trabajos de estos dos titanes, los elogió con mucha humildad y escribió tres suplementos de su *Tratado de las Trascendentes Elípticas* en los que describió con admiración las nuevas ideas.

Además, tanto Abel como Jacobi se interesaron no sólo por establecer una teoría general de las funciones elípticas, sino también por extender esta teoría a *integrales hiperelípticas*, es decir aquellas donde el polinomio subradical es de grado mayor que 4. A estas *integrales* hiperelípticas y a sus funciones inversas, suele llamárseles hoy, *integrales abelianas* y *funciones abelianas*, a propuesta del mismo Jacobi, como justo homenaje a quién primero las estudió con profundidad.

¿Pero cómo se conformó esta teoría? ¿Cuáles fueron los aportes principales de los dos jóvenes? ¿En qué momento lo hicieron? A contestar estas preguntas nos dedicaremos en lo que sigue.

El duelo entre Abel y Jacobi

Fue el matemático más prestigioso de Escandinavia, el Profesor Ferdinand Degen, entonces catedrático de matemáticas en la universidad de Copenhaguen, quien primero le recomendó a Abel estudiar las trascendentes elípticas en lugar de continuar con el estudio de la ecuación de quinto grado, asunto que Degen consideraba muy árido y poco estimulante. El mismo Degen le entregó un manuscrito con un teorema que había encontrado sobre la trasformación de las integrales elípticas. [Bjerknes, 1885]

La primera referencia a resultados propios de Abel la tenemos dos años después, en una carta a Holmboe de agosto, 1823. En ella dice que con la ayuda de Degen ha encontrado un error en su *pequeña memoria que trata sobre las funciones inversas a las trascendentes elípticas* (memoria que no es publicada mientras vive Niels, pero se incluye en la segunda edición de sus *Oeuvres Complètes* [Abel, 1881]).

Pasados otros dos años, precisamente en agosto de 1825, poco antes de partir para un viaje a Alemania y Francia, Abel le comunica a su maestro Hansteen que la parte principal de la teoría de las trascendentes elípticas esta preparada para su publicación.

Durante el viaje, en abril de 1826, Abel le comunica a su amigo Holmboe que en su estancia de un mes, en la calma de Freiberg, en Sajonia, ha redactado una memoria con sus ideas sobre las funciones elípticas y espera publicarla en París.

De nuevo volvemos a oír hablar de la *Memoria* en una carta a Holmboe del 24 de octubre de 1826, aquí dice que la ha entregado a M. Cauchy y que este desdeñosamente la ha mirado sin decir palabra. El 30 de octubre es presentada por Fourier en el Instituto de París la monografía de Abel con el título *Memoria sobre una propiedad general de una clase muy amplia de funciones trascendentes*, son casi 70 páginas de resultados, con sus respectivas demostraciones que tuvo un destino muy errante, y no logró publicarse hasta 1841 (para una historia actualizada de las vicisitudes de esta memoria ver [Centina, 2002]).

Como parece ser su punto de vista desde el comienzo de sus investigaciones originales, Abel pone énfasis en el caso más general de integrales que hoy se llaman *integrales abelianas*; éstas son las integrales de la forma $\int R(x,y)dx,$, donde R es una función racional de dos variables (x, y) ligadas por una ecuación algebraica general

$$\alpha(x, y) = y^n + p_1(x)y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0.$$

Abel logró establecer un *teorema de adición* que generaliza de manera natural el enunciado que había dado Euler para las integrales elípticas. A continuación exponemos la formulación que se puede leer en la *Gran Memoria* compuesta por Abel en 1826 para ser sometida a la Acad. de Ciencias de París [Abel, 1881, T. I. pp. 145-211]: *Si se tienen varias funciones cuyas derivadas pueden ser raíces de una misma ecuación algebraica cuyos coeficientes son funciones racionales de una misma variable, se puede siempre expresar la suma de un número cualquiera de tales funciones por una función algebraica y logarítmica, con tal que se establezca entre las variables de las funciones un cierto número de relaciones algebraicas*. Obsérvese como lo algebraico también aquí se entremezcla con lo analítico, la característica que estamos subrayando del espíritu de la obra de Abel.

Notemos además que después de exponer los principios generales de la teoría, estudia el caso particular de las integrales hiperelípticas, llamadas por Jacobi *abelianas*, donde se tiene $a(x, y) = y^2 + P(x)$ y $P(x)$ es un polinomio de grado arbitrario siempre mayor que 4 [Abel, 1881, T.1, pp. 444-456])

La primera publicación de los logros de Abel, redactada después de la Memoria de París, y su obra más contundente sobre las funciones elípticas, son sus *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Investigaciones sobre las funciones elípticas) que se publican en dos partes. En una carta a Holmboe de marzo de 1827, estando en Berlín, le dice que tiene terminada la 1ª Parte de más de 120 páginas y que la entregará a Crelle para su *Journal*. Al fin se la entrega redactada en mayo y aparece publicada en septiembre. Esta es la primera vez que encontramos publicado el *principio de inversión*, que aparentemente, y según nos dice su compatriota, el profesor Carl Bjerknes, Abel lo dominaba al menos desde 1823 [Bjerknes, 1885]. En esta primera memoria publicada están las propiedades fundamentales de las nuevas funciones trascendentes inversas de las integrales elípticas: la fórmula de adición, la doble periodicidad, la teoría de la multiplicación y la división y el desarrollo en series de potencias. [*Journal für die reine und angewandte Mathematik* T2, nº 2, septiembre 1827].

Jacobi, por su parte, ha dado sus primeros pasos en la teoría de las trascendentes elípticas bastante más tarde, en marzo de 1827. Este tema será muy frecuentado por Jacobi, durante casi 20 años, hasta poco antes de su muerte en 1851. (Ver sus *Obras Completas* [Jacobi, 1881])

Jacobi anuncia públicamente sus logros también en septiembre del 27, el mismo mes en que aparece la primera publicación de Abel, en unas *Notas sobre las trascendentes elípticas* en el “Journal de Schumacher”. Este primer trabajo de Jacobi debe haber llegado a Cristianía no antes de octubre o noviembre y el segundo, por las condiciones climáticas del invierno nórdico, no antes de abril del 28. Abel no sospechaba del duelo de ideas que se había iniciado entre él y Jacobi. Por consiguiente, no se sintió apremiado en la publicación de la segunda parte de sus *Recherches*... y no la envía a Crelle hasta el 12 de febrero de 1828.

En abril del 28, ya Abel es consciente de la competencia con Jacobi en el tema de las funciones elípticas, por eso decide rápidamente enviar a Crelle todos sus resultados. Lo primero que hace, el 20 de abril, es enviar a Schumacher un importante trabajo que se titula Solución de un problema general concerniente a la transformación de las funciones elípticas, donde expone detalladamente sus métodos de transformación de funciones integrales y de sus inversas.

La idea siguiente, desarrollada primeramente por Abel, fue definir las funciones elípticas para valores complejos. Para esto faltaban las fórmulas de adición similares a las encontradas por Euler para las integrales elípticas. Según [Bjerknes, 1885] Abel estaba en posesión de estas fórmulas a finales del 24 o como máximo en el 25 antes de su viaje por Europa y las presenta con demostraciones en su memoria de París, pero al no ser esta publicada no tenía valor en su duelo con Jacobi. Así que Abel necesitaba publicar las fórmulas de adición para las funciones inversas de las trascendentes elípticas.

Pero Abel, desde su viaje a París, comienza a sentir los efectos de la tuberculosis, enfermedad que nunca sabrá que lo está consumiendo. Guarda reposo y en periodos intermitentes de mejoría trabaja obsesionadamente, como si supiera que no le queda mucho de vida. En tales condiciones envía a Crelle cuatro artículos más, que se publican entre septiembre y diciembre del 28 y otros tres que se publican entre febrero y abril del 29. El último de ellos, representa la ampliación de una parte de la memoria perdida en París.

En la que sería su última morada, en Froland, ya bastante debilitado por su mortal enfermedad, logra hacer la redacción final y enviar a Crelle, exactamente el 6 de enero de 1829, la fórmula de adición debidamente demostrada y le dice:

> *Me propongo desarrollar en otra ocasión las numerosas aplicaciones de este teorema, que mostrarán la naturaleza de estas funciones trascendentes.*

Este artículo se conoce como el *testamento científico* de Abel y se titula *Demostración de una propiedad general de una cierta clase de funciones trascendentes*.

Pero Abel no ceja de batallar, continúa con un compendio de la teoría general de las funciones elípticas e hiperelípticas. No sabemos cuando lo culmina o si realmente fue su amigo Holmboe quién reunió sus notas, dándole una redacción final para que saliera publicado entre los números 3 y 4 del "Journal de Crelle", es decir entre septiembre y diciembre del 29, varios meses después de la muerte de Abel. Son más de 100 pp. de resultados bajo el título de *Resumen de una teoría de las funciones elípticas*, que al decir del matemático francés Charles Hermite, le dejaría trabajo para todo un siglo a quienes gustaran del tema.

Por su parte, Jacobi, aunque ya en el artículo de diciembre 1827 había publicado sus ideas sobre la consideración de las funciones elípticas como inversas de las integrales, no es <u>hasta abril de 1829</u> que publica su obra clave ***Fundamenta nova functionum ellipticarum*** (*Nuevos Fundamentos de las Funciones Elípticas*) [Jacobi, 1881, T1, pp. 49-239] que se convirtió rápidamente en una referencia clásica sobre este tipo de funciones. Abel no lo pudo leer, porque apareció 5 meses después que entrara en la fase crítica de su tuberculosis y 6 semanas después de su muerte. Pero si hubiera podido leerlos seguro los hubiera valorado justamente, pues tenía una alta estima de la obra de Jacobi: "el único que ha sabido comprenderme". Además, los *Fundamenta*... comienzan con un elogio a Abel, atribuyéndole con honestidad las fórmulas de adición y de multiplicación y remitiendo al lector a la obra *Recherches*... aparecida en el Journal de Crelle. Como un eco de las palabras pronunciadas por Legendre con relación a Abel, lo califica como "*nostra laude majore*". Como se lee en [Bjerknes, 1885, pág. 205] "sin Abel los *Fundamenta Nova* no hubieran existido".

Es cierto que muchos de los resultados de Abel fueron encontrados por Jacobi de manera independiente, aunque no simultánea, y ambos mantuvieron una fraternal competencia en la obtención de otras relaciones análogas a las conocidas para las funciones circulares. Pero la prematura muerte de Abel en 1829, le cedió el paso a Jacobi, quién pronto se hizo famoso por la maestría que mostraba en sus conferencias sobre funciones elípticas. A favor de Jacobi digamos que siempre se mostró preocupado porque a Abel le otorgaran el mérito correspondiente y abrigó la esperanza de que la universidad de Berlín le concediera una plaza, pero cuando fue concedida ya era demasiado tarde.

En una carta a Legendre del 14 de junio de 1829, Jacobi se refiere al compañero de ideas:

> *Pocos días después del envío de mi última carta he conocido la triste noticia de la muerte de Abel. Nuestro gobierno le había llamado a Berlín, pero el llamado no lo ha encontrado entre los vivos. ¡Ha sido cruelmente frustrada la esperanza que yo había concebido de encontrarle en Berlín! Los vastos problemas que él se había propuesto, de establecer criterios necesarios y suficientes para que una ecuación algebraica cualquiera sea resoluble, para que una integral cualquiera pudiese ser expresada en cantidades finitas, su invención admirable de la propiedad general que engloba a todas las funciones que son integrales de funciones algebraicas, etc., etc. marcan un género de cuestiones muy originales y que nadie antes de él había osado imaginar. Él se ha ido ¡pero nos ha dejado un gran ejemplo!*

No tuvo que pasar mucho tiempo para que la magnificencia de la herencia matemática de Abel y Jacobi fuera no sólo elogiada, sino también depurada por muchos ilustres matemáticos. Hemos mencionado antes a Liouville y Hermite, en Francia, y en Alemania, a Riemann y Weierstrass.

No cabe duda que Abel mostró con creces su capacidad para encontrar la esencia de las cuestiones y, abstrayéndose de todo lo superfluo, generalizar y forjar algo nuevo, más potente, y esto supo expresarlo de la manera más precisa y concisa. Abel mostró su talento analítico sobre todo al concebir la teoría de las trascendentes hiperelípticas, hoy todavía llamadas *abelianas*. Jacobi supo encontrar la mejor manera de representar estas funciones, introduciendo las *funciones theta* y hallando nuevas propiedades y aplicaciones. Abel fue el arquitecto y Jacobi el constructor, ambos fueron necesarios para que la nueva obra fuera sólida y bella.

CONCLUSIONES

En nuestro estudio del legado de Niels Abel al Análisis Matemático hemos señalado algunas de sus influencias al estilo de pensamiento analítico dominante en el siglo XIX. En la época que le tocó vivir a Abel se produjo la transición de la matemática utilitaria y mecanicista del siglo XVIII, que daba prioridad a la resolución de problemas particulares, a la matemática abstracta y global, preocupada en fundamentar sus actos con teoremas de existencia y la construcción de teorías amplias y métodos efectivos que, al menos teóricamente, llevaran en sí las soluciones detalladas de una infinidad de problemas especiales.

El paso de la sumación de las series infinitas a la investigación de la convergencia y la representación analítica de las funciones, es el cambio de estilo de pensamiento entre la época de Euler a la época de Abel y Cauchy. El cambio que se produce con Abel y Jacobi en el estudio de las funciones elípticas complejas en lugar de las integrales elípticas reales como lo hicieron Euler y Legendre, también es parte de esa transformación que se produce en el espíritu de las matemáticas del siglo XIX. En el primer caso se logra fundamentar rigurosamente la técnica principal de representación de funciones reales por series de potencias. Con el segundo aporte se consigue abrir las puertas del estudio general de las funciones complejas y llamar la atención sobre las peculiaridades que las diferencian de las funciones reales.

Ambas líneas de trabajo ayudaron a conformar la nueva teoría de las funciones analíticas, como herramienta fundamental del análisis matemático tanto real como complejo. Los resultados obtenidos por Abel sobre las series de potencias y sobre las funciones trascendentes llamadas hoy *funciones abelianas*, serán esenciales en esta transformación que va a las raíces del análisis. El espíritu de la Matemática concebido en el siglo XIX, esta infundido por la brillante obra y el *radicalismo* del joven romántico nórdico. Abel sería como la estrella de la madrugada, anunciadora del alba.

NOTA BENE: En el momento que hacíamos los últimas ajustes de redacción a este artículo, obtuvimos noticia del trabajo de Henrik Kragh Sorensen (2005) *Exceptions and counterexamples: Understanding Abel's comment on Cauchy's Theorem*. Historia Math. 32, 453-480, disponible online en www.sciencedirect.com donde se hace una enjundiosa exposición de las razones por las cuáles Niels Abel hizo la crítica a Cauchy señalando "una excepcion" a su teorema sobre la suma de series de funciones continuas. Varias de las ideas expuestas ahí coinciden con las nuestras, aunque se hayan concebido de forma independiente. Agradecemos al Dr. Jorge López, de la Universidad de Puerto Rico, por su valiosa información.

REFERENCIAS

ABEL, N. (1881): **Oeuvres Complètes**, (2 vols.) Segunda edición bajo la dirección de Peter Ludwig Sylow y Sophus Lie, Grondahl, Christianía.

BJERKNES, C.A. (1885): **Niels Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique**. Bordeaux.

CAUCHY, A.L. (1821): **Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Premier partie. Analyse algébrique**. Editado en el 2000 por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla. 576 pp.

CENTINA, A. del (2002): “The Manuscript of Abel’s Parísian Memoir Found in its Enterity”. **Hist. Math**. 29, 65-69.

EULER, L. (1748): “Introducción al análisis de los infinitos”. Ed. facsimilar del año 2000 con traducción anotada a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez de la Real Sociedad Matemática Española, Sevilla.

FRASER, C.G. (1990): “Lagrange's analytical mathematics, origins and reception”. **Stud. Hist. Phil. Sc**. 21(2), 243-256.

HOUZEL, Ch. (1978): **Fonctions Elliptiques et Intégrales Abéliennes en Abregé d'histoire des mathematiques 1700-1900**. (ed. por Jean Dieudonné) Vol II, cap. VII, 1-113. Ed. Hermann, Paris.

JACOBI, C.G.J. (1881-91): **Gesammelte Werke** (ed. por C. W. Borchardt y K. Weierstrass en 7 Tomos).

JAHNKE, H.N. (1993): "Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840". **Historia Math**. 20, 265-284.

KLEIN, F. (1989): **Lecciones sobre el desarrollo de la Matemática en el siglo XIX**. Moscú (en ruso) 454 pp.

LAGRANGE, J-L. (1797): "Discours sur l'objet de la Théorie des Fonctions Analytiques". **Journal de l'École Polytechnique**, VI, T2, 325-328.

OLIVIER, L. (1827): "Remarques sur les séries infinies et leur convergence". **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.** 2(1), 31-44.

ORE, O. (1957): **Niels Henrik Abel. Mathematician Extraordinaire**. University of Minnesota Press. 278 pp.

PENSEVY, M. (1986): "La serie du binome de Wallis a Abel". **Gaz. Math. Soc. Math. Fran**. 31, 133-157.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. y C. VALDÉS CASTRO (2004): "De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo". Ed. Nivola. Madrid. 382 pp.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. y T. de J. NORIEGA SÁNCHEZ (2005): "Abel. El romántico nórdico". Ed. Nivola. Madrid. 222 pp.

STUBHAUG, A. (2000): N. H. Abel and his times. Called to soon by flames afar. Springer. New York. 580 pp.