Ciencias Matemáticas, Vol. 29, No. 2, Pag. 131-137, 2015
Recibido 09-2015

Reflexiones sobre el teorema de Abel extendido a las filas de la tabla de Pade
Consequences of Abel´s theorem extended to the rows of Padé´s table

Abel Fernández Infante[1]*, Luis Ramiro Piñeiro[2]

Resumen Este trabajo responde a una sugerencia realizada a la tesis “Sobre el comportamiento en la frontera de las filas de la tabla de Padé” defendida en Julio de 1998. El objetivo de este artículo es revisar algunas consecuencias del teorema de Abel extendido a las filas de la tabla de Padé, que muestran que el mismo no solo es válido para una clase amplia de funciones sino que además, puede resultar de gran utilidad en la práctica, ya que como se verá su aplicación permite obtener información sobre la función que es representada mediante una serie de potencias, más allá de su disco de convergencia.

Abstract This work responds to a suggestion made to the thesis “About the behaviour at the boundary of rows of Padé´s table” defended in July 1998. The aim of this paper is to review some consequences of Abel´s theorem extended to the rows of Padé´s table, that show that this theorem is valid not only a wide class of functions but rather also, it can be of great utility in the practice, since like its application allows to obtain information about the function that is represented by means of power series, beyond its convergence disk. Keywords: Rows of the Padé table.

Palabras Clave
Filas de la tabla de Padé

[1] *Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría, La Habana, Cuba, afdez@cemat.cujae.edu.cu*
[2] *Universidad de La Habana, Cuba, lrp@matcom.uh.cu*
***Autor para Correspondencia**

1. Introducción

Un resultado bien conocido en la teoría de los aproximantes de Padé es el teorema debido a Montessus en 1902 ([6], [7]).

Teorema 1 (de Montessus de Ballore) *Sea f analítica en una vecindad de $z=0$ y tal que en el disco D_m hay exactamente m polos de f, $a_1,\cdots,a_\mu$ de multiplicidades $p_1,\cdots,p_\mu$ con $\sum_{i=1}^{\mu} p_i = m$. Entonces,*

1. $\lim_{n\to\infty} q_{n,m}(z) = w_m(z)$ *donde $q_{n,m}$ es el polinomio del denominador de la función aproximante $F_{n,m}$ y $w_n(z) = \prod_{i=1}^{\mu}(z-a_i)^{p_i}$.*
2. *$F_{n,m}$ converge uniformemente a la función f cuando $n\to\infty$ sobre todo conjunto compacto*

$$K\subset D^* = D_m \setminus \{a_1,\cdots,a_\mu\}$$

.

Notación 2 *Cuando f cumpla las hipótesis del teorema de Montessus se usará la notación $m\in M(f)$.*

En 1975 Gonchar [3] mejoró este resultado.

Otros resultados alcanzados por los matemáticos en esta línea de investigación pertenecen a los problemas de tipo inverso. O sea, dado el comportamiento de los polos de una cierta sucesión de aproximantes de Padé construida de una serie de potencias formal, se plantea lo siguiente: ¿Es posible determinar si esta serie de potencias representa una función analítica en una vecindad de $z=0$? ¿Qué puede decirse acerca de la extensión meromorfa de esta función y la localización de sus singularidades? ¿Estas singularidades corresponden a límites de sucesiones de tales polos?

En 1922, el matemático francés E. Fabri obtiene el siguiente resultado que constituye el primero de tipo inverso (Bieberbach [1]):

Teorema 3 *Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n/f_{n+1} = a\neq 0$. *Entonces, f es analítica en $|z|<|a|$ y a, es punto singular de f.*

Este teorema constituye un resultado de tipo inverso relativo a la primera fila, pues

$$q_{n,1}(z) = z - \frac{f_n}{f_{n+1}} \ (f_n f_{n+1}\neq 0).$$

El resultado siguiente es debido a Gonchar [4] y esencialmente es referido a un problema de tipo inverso. Este resultado es de 1981 y en el se hace una caracterización de la extensión meromorfa de una función en términos del comportamiento asintótico de los polos de la función aproximante $F_{n,m}$.

Sean $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $F_{n,m}$ la función aproximante asociada a f, m fijo y

$$P=\{a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,m_n}\},\ 0\le m_n\le m$$

denota el conjunto de polos de $F_{n,m}$. Sea además,

$$|\cdot|_1 = min\{|\cdot|, 1\}$$

y $a\in\mathbb{C}$ fijo. Los polos de $F_{n,m}$ se ordenan en forma creciente respecto a su distancia al punto a:

$$|a-a_{n,1}|\le|a-a_{n,2}|\le\cdots\le|a-a_{n,m_n}|.$$

Los siguientes indicadores fueron introducidos por Gonchar:

$$\Delta(a)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\prod_{n=1}^{m_n}\left|a_{n,j}-a\right|_1^{\frac{1}{n}}$$

(si $m_n=0$ entonces el producto en el miembro derecho se toma igual a 1) y

$$\delta_j(a)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|a_{n,j}-a\right|_1^{\frac{1}{n}}$$

(donde $j=1,2,3,\ldots,m'$, $m'=\underline{\lim}_{n\to\infty} m_n$ y para $j=m'+1,\ldots,m$ se toma $\delta_j(a)=1$).

Además, $\mu(a)$ representa el número de polos de $F_{n,m}$ que tienden al punto a con velocidad geométrica cuando n tiende a infinito y $\lambda(a)$ representa el número de polos de $F_{n,m}$ que tienden al punto a cuando n tiende a infinito, es decir,

$$\mu(a)=\text{máx}\left\{j:\delta_j<1\right\},$$
$$\lambda(a)=\text{máx}\left\{j:\lim_{n\to\infty}\left|a-a_{n,j}\right|=0\right\}.$$

En 1984, Suetin [8] demuestra el siguiente resultado cuando todos los polos de los aproximantes de Padé tienen límite.

Teorema 4 (de Suetin) *Sea f analítica en una vecindad de $z=0$ y los ceros del polinomio $q_{n,m}$ convergen a los ceros a_j $(j=1,\ldots,m)$ del polinomio q_m, o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} q_{n,m}(z)=q_m(z)=\prod_{j=1}^{m}(z-a_j).$$

Entonces,

1. $R_m\ge \text{máx}_{1\le j\le m}\left|a_j\right|$.
2. *Todos los puntos a_j tales que $\left|a_j\right|<R_m$,son polos de f en D_m.*
3. *Todos los puntos a_j tales que $\left|a_j\right|=R_m$, son puntos singulares de $f(z)$.*

Notación 5 *Cuando f cumpla las hipótesis del teorema 2 de Suetin se usará la notación $m\in S(f)$.*

El objetivo de este trabajo es revisar algunas consecuencias del teorema de Abel extendido a las filas de la tabla de Padé, que muestran que el mismo no solo es válido para una clase amplia de funciones sino que además, puede resultar de gran utilidad en la práctica, ya que como se verá su aplicación permite obtener información sobre la función que es representada mediante una serie de potencias, mas allá de su disco de convergencia.

2. Conceptos y resultados preliminares.

Definición 6 *Sea f una función analítica en $z=0$,*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

$D_0=\{z\in C:|z|<R_0\}$ denota el disco de convergencia de la serie (1). Para $m\in\mathbb{N}$ consideremos $D_m=\{z\in C:|z|<R_m\}$ el mayor disco con centro en $z=0$ dentro del cual f puede prolongarse como una función meromorfa con no más de m polos (contando la multiplicidad). A D_m se le denomina m-ésimo disco de Hadamard o disco de m-meromorfismo y a R_m radio de m-meromorfismo.

Definición 7 *Dados enteros no negativos n, m el aproximante de Padé $F_{n,m}$ de f dado por (1), puede definirse como la razón $p_{n,m}/q_{n,m}$ de dos polinomios cualesquiera $p_{n,m}$ y $q_{n,m}$ que satisfacen $grad(pn,m)\le n$, $grad(qn,m)\le m$, no idénticamente nulo y*

$$(q_{n,m}f-p_{n,m})(z)=r_{n,m}z^{n+m+1}+\cdots+ \tag{2}$$

La función $F_{n,m}$ puede determinarse a partir de los coeficientes f_n del desarrollo (1). Denotemos por

$$p_{n,m}(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,$$
$$q_{n,m}(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m,$$

a los polinomios del numerador y denominador respectivamente de la función $F_{n,m}$. Entonces, de (2) obtenemos la igualdad

$$(b_0+b_1+\cdots+b_mz^m)(f_0+f_1z+\cdots+f_nz^n+\cdots)=$$
$$a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+r_{n,m}z^{n+m+1}+\cdots$$

y de aquí se obtiene el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{array}{ccccccccc} b_m f_{n-m+1} & + & b_{m-1} f_{n-m+2} & + & \cdots & + & b_0 f_{n+1} & = & 0 \\ b_m f_{n-m+2} & + & b_{m-1} f_{n-m+3} & + & \cdots & + & b_0 f_{n+2} & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m f_n & + & b_{m-1} f_{n+1} & + & \cdots & + & b_0 f_{n+m} & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

Este sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con $m+1$ incógnitas tiene infinitas soluciones. Podemos elegir una solución no trivial para el polinomio $q_{n,m}$ y de (2), igualando coeficiente a coeficiente los $n+1$ primeros términos del desarrollo de $q_{n,m}f$, obtener una solución para el polinomio $p_{n,m}$ el cual denotaremos por

$$p_{n,m}(z) = [(q_{n,m}f)(z)]_n. \tag{4}$$

El sistema anterior sugiere la definición siguiente.

Definición 8 *Sean $n,m \in \mathbb{N}$. Se denomina determinante de Hadamard de tipo (n,m) con respecto a (1) a*

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}, \; H_{n,0} = 1,$$

donde $f_{-k} = 0$ para $k = 0,1,2,\ldots$.

Las proposiciones siguientes pueden consultarse en el libro de López-Vavilov (ver [5]).

Proposición 9 *Para cada par de números enteros no negativos (n,m), el aproximante $F_{n,m}$ de la función f, dada por (1) es único.*

A partir de la definición 7 se puede construir una tabla de doble entrada en la cual a (n,m) corresponde el aproximante de Padé $F_{n,m}(z)$. Esta tabla se denomina tabla de Padé. Además, a toda sucesión de la tabla para la cual al menos uno de los índices tiende al infinito, se denomina sucesión de aproximantes de Padé.

Proposición 10 *Una condición necesaria y suficiente para que exista $q_{n,m}$ tal que $q_{n,m}(0) = b_0 \neq 0$ es que $H_{n,m} \neq 0$ donde $q_{n,m}$ es el polinomio que aparece en (2). Si además, $f_0 \neq 0$ dicha condición es necesaria y suficiente para que $p_{n,m}(0) = a_0 \neq 0$.*

Proposición 11 *Una condición necesaria y suficiente para que grad$q_{n,m} = m$ ($b_m \neq m$) es que $H_{n+1,m} \neq 0$ donde $q_{n,m}$ es el polinomio que aparece en (2).*

De acuerdo a la proposición 11, si $H_{n+1,m} \neq 0$ entonces y solo entonces $q_{n,m}(0) = b_0 \neq 0$. Si se supone que $b_0 = 1$, el sistema (3) se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \cdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \\ \cdots \\ f_{n+m} \end{pmatrix}.$$

(Se supone que $f_k = 0$ para $k < 0$). La ecuación anterior permite determinar los coeficientes b_i y con ellos el polinomio $q_{n,m}(z)$. Ahora, también se obtienen de (2) los coeficientes a_i y por tanto el polinomio $p_{n,m}(z)$, donde

$$\begin{aligned} a_0 &= f_0, \\ a_1 &= f_1 + f_0 b_1, \\ a_2 &= f_2 + f_1 b_1 + f_0 b_2, \\ &\vdots \\ a_n &= f_n + \sum_{i=1}^{\text{mín}(n,m)} f_{n-i} b_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Proposición 12 *Sea f dada por (1), $n,m \in \mathbb{N}$ fijos. Si $H_{n,m} \neq 0$, $F_{n,m} = p_{n,m}/q_{n,m}$ es el aproximante de Padé de tipo (n,m) asociado a f y el polinomio $q_{n,m}$ está normalizado bajo la condición $q_{n,m}(0) = 1$, entonces:*

1.

$$q_{n,m}(z) = \frac{1}{H_{n,m}} \begin{vmatrix} b) f_{n-m+1} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ c) \dots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d) f_n & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ e) z^m & \cdots & z & 1 f) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

2.

$$(q_{n,m} f - p_{n,m})(z) = \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} z^{n+m+1} + \cdots, \tag{7}$$

3.

$$(F_{n+1,m} - F_{n,m})(z) = \frac{H_{n+1,m+1}}{H_{n,m}} \frac{z^{n+m+1}}{q_{n,m}(z) q_{n+1,m}(z)}, \tag{8}$$

siempre que

$$H_{n+1,m} \cdot H_{n,m} \neq 0.$$

En lo sucesivo el índice m es fijo, por lo que se omite en las notaciones y se escribe $D = D_m$, $R = R_m$, $A_n = r_{n,m}$, $F_n = p_n/q_n$, donde $p_n = p_{n,m}$, $q_n = q_{n,m}$ (salvo que se indique otra cosa). Se supone que $F_n = P_n/Q_n$ donde P_n y Q_n son polinomios primos relativos (estos se obtienen después de cancelar los factores comunes). Observar que si $z = z_n$ es un cero del polinomio p_n y q_n con $z_n \neq 0$, cuyo orden es d_n, entonces haciendo $p_n(z) = (z - z_n)^{d_n} P_n(z)$ y $q_n(z) = (z - z_n)^{d_n} Q_n(z)$, de (2) se obtiene

$$(Q_n f - P_n)(z) = \frac{A_n z^{n+m+1} + \cdots}{(z - z_n)^{d_n}} = A_n^* z^{n+m+1} + \cdots,$$

y los polinomios P_n y Q_n satisfacen las condiciones de la definición 7. Por ello se puede suponer que p_n y q_n no tienen ceros comunes diferentes de $z = 0$. Por otra parte, si $z = 0$ es un cero común de p_n y q_n resulta que los polinomios P_n y Q_n no satisfacen necesariamente las condiciones en la definición 7. Más aún, si d_n es la multiplicidad del cero de q_n para $z = 0$ $(0 \leq d_n \leq m)$, es decir, $p_n(z) = {z_n}^{d_n} P_n(z)$ y $q_n(z) = {z_n}^{d_n} Q_n(z)$, entonces P_n y Q_n satisfacen:

1. $\operatorname{grad} P_n \leq n - d_n$, $\operatorname{grad} Q_n \leq m - d_n$, Q_n no idénticamente nulo.

2.

$$(Q_n f - P_n)(z) = A_n z^{n+m+1-d_n} + \cdots, (0 \leq d_n \leq m). \tag{9}$$

Proposición 13 *Sea $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces se cumple que*

$$(P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1})(z) = B_n z^{n+m+1-d_n}, \ (0 \leq d_n \leq m) \tag{10}$$

donde B_n es una constante que solo depende de n.

De la proposición 13 se deduce que

$$(F_{n+1} - F_n)(z) = \frac{B_n z^{n+m+1-d_n}}{Q_n(z) Q_{n+1}(z)}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

De esta igualdad se deduce que la convergencia de la sucesión $\{F_n\}$, para z fijo, es equivalente a la convergencia de la serie

$$F_{n_0}(z) + \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{B_k z^{k+m+1-d_k}}{Q_k(z) Q_{k+1}(z)}, \tag{12}$$

donde n_0 es un número natural seleccionado convenientemente, de forma que $Q_n(z) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.

En [4], A. A. Gonchar demostró la fórmula

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} |B_n|^{1/n}, \tag{13}$$

que constituye una generalización de la conocida fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia de una serie de Taylor.

En lo que sigue se usa la notación δ_n para representar la distancia entre el conjunto de ceros $a_{n,j}$, $(j = 1, \dots, m)$ del polinomio Q_n y el conjunto $\{z_0\}$. La condición que se exige en el teorema es la siguiente

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \delta_n = \delta > 0. \tag{14}$$

Esto garantiza que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $Q_n(z_0) \neq 0$. Por lo que tiene sentido hablar de la serie

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{B_k z_0^{k+m+1-d_k}}{Q_k(z_0) Q_{k+1}(z_0)}.$$

3. Teorema de Abel extendido a las filas de la tabla de Padé.

En [2] fue demostrado el siguiente teorema de Abel para las filas de la tabla de Padé:

Teorema 14 *Sea f analítica en una vecindad de $z = 0$ y $|z_0| = R$ tal que $\underline{\lim}_{n \to \infty} \delta_n = \delta > 0$. Si la serie*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{B_k z_0^{k+m+1-d_k}}{Q_k(z_0) Q_{k+1}(z_0)}$$

es convergente, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = F_{n_0}(z_0) + \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{B_k z_0^{k+m+1-d_k}}{Q_k(z_0) Q_{k+1}(z_0)}, \tag{15}$$

donde el límite es tomado por el interior de cualquier ángulo $A\varphi$ con el vértice en el punto $z = z_0$, radialmente y de magnitud $2\varphi < \pi$.

Este teorema puede reformularse sin utilizar el lenguaje de la serie, pues la convergencia de la sucesión $\{F_n\}$, para z fijo, es equivalente a la convergencia de la serie en (12). Luego, puede afirmarse que si la sucesión $\{F_n\}$ es convergente para $z = z_0$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{n \to \infty} F_n(z_0).$$

3.1 Consecuencias del teorema.

La condición (14) permite tener control en la disposición de ceros del polinomio Q_n. La misma se satisface si se exige hipótesis de tipo Suetin ($m \in S(f)$) o hipótesis de tipo Montessus ($m \in M(f)$), por lo que una clase amplia de funciones satisfacen dicha condición.

Corolario 15 *Sea $m \in S(f)$, $|z_0| = R$ y la sucesión $\{F_n\}$ convergente para $z = z_0$, $z_0 \neq a_j$ para todo j tal que $|a_j| = R$. Entonces,*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z_0),$$

donde el límite es tomado por el interior de cualquier ángulo A_φ con el vértice en el punto $z = z_0$, radialmente y de magnitud $2\varphi < \pi$.

Demostración. Las condiciones $m \in S(f)$, $|z_0| = R$ y $z_0 \neq a_j$ para todo j tal que $|a_j| = R$ garantizan el cumplimiento de la condición (14). Pues, la sucesiónδ_n está acotada y fijando $n_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, los ceros $a_{n,j}$, $(j = 1,\dots, m)$ del polinomio Q_n son tales que, para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$a_{n,j} \in \overline{D(a_j, \frac{s}{10})},\ (j = 1,\dots, m),$$

donde $D(a_j, s/10)$ es el disco con centro en a_j y radio $s/10$ con $s = d(z_0, \cup_{j=1}^{m}\{a_j\})$ y d representa distancia. En otras palabras, $|z_0 - a_{n,j}| > s/10$ para todo $n \geq n_0$ y $j = 1,\dots,m$. Teniendo en cuenta el teorema, el corolario es inmediato. ■

Corolario 16 *Sea $m \in M(f)$, $|z_0| = R$ y la sucesión $\{F_n\}$ convergente para $z = z0$. Entonces,*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z_0),$$

donde el límite es tomado por el interior de cualquier ángulo A_φ con el vértice en el punto $z = z_0$, radialmente y de magnitud $2\varphi < \pi$.

Demostración. Un razonamiento similar al realizado en la demostración del corolario 1 conduce a la validez del corolario 2. En este caso todos los polos de los aproximantes de Padé convergen a polos de la función f que se encuentran en el disco D. ■

4. Aplicaciones del teorema de Abel para las filas de la tabla de Padé.

El significado del teorema de Abel para las filas de la tabla de Padé consiste, en que dada una serie formal de potencias con radio de convergencia R, es posible obtener información de la función analítica que representa dicha serie en puntos de la frontera del disco de m-meromorfismo, siempre que en estos puntos el aproximante de Padé correspondiente a la fila m sea convergente. En tal caso es posible de determinar las sumas de ciertas series numéricas.

Ejemplo 17 *Sea la serie formal de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$, $D_0 = \{z \in C : |z| < 1\}$, $(R = 1)$.En este caso dicha serie representa un función analítica en el disco unidad, sea esta función $f(z)$. Observar que para $m = 0$ la serie dada es divergente para todo z tal que $|z| = 1$, pues $|(n+1)z^n| = n+1$ no tiende a cero. ¿Será posible recuperar algún valor de la función f en la frontera del disco unidad? Veamos que es posible en este caso.*

Sea $m = 1$ (fila uno de la tabla de Padé). Usando las fórmulas (4) y (6) se obtiene que:

$$q_n(z) = 1 - \frac{n+2}{n+1}z,$$
$$q_n(z) = -\frac{n+2}{n+1}(z - \frac{n+1}{n+2}),\ (H_{n,1} = n+1 \neq 0)$$

y

$$p_n(z) = -\frac{n+2}{n+1}(-\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+2}z - \frac{n-1}{n+2}z^2 - \cdots - \frac{1}{n+2}z^n).$$

Más aún, según (8) se obtiene que

$$F_n(z) = F_0(z) + \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{k+3}\frac{z^{k+2}}{\left(z - \frac{k+1}{k+2}\right)\left(z - \frac{k+2}{k+3}\right)}, \qquad (16)$$

donde

$$Q_k(z) = z - \frac{k+1}{k+2},$$

y además,

$$F_0(z) = \frac{-1}{2\left(z - \frac{1}{2}\right)}.$$

El polinomio Q_k es tal que $\lim_{k\to\infty} Q_k(z) = z - 1$ y por otra parte $D_1 = D_0$ pues según (13) se tiene que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|B_n|^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{(n+3)^{1/n}} = 1 = R_1 = R.$$

De manera que para la fila $m = 1$ se satisfacen hipótesis de tipo Suetin.

En este caso $a_1 = 1 \in \partial D_1$. Tomando por ejemplo, $z_0 = -1 \in \partial D_1$ se observa que se satisfacen las hipótesis del teorema de Abel para la fila $m = 1$ de la tabla de Padé, ya que los ceros del polinomio $Q_k(z)$ para n suficientemente grande están lejos del punto $z_0 = -1$ y la serie que se obtiene de (16) para este punto

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+2)}{(2k+3)(2k+5)},$$

es convergente. Por tanto, si el límite es tomado como afirma el teorema de Abel extendido a las filas de la tabla de Padé se obtiene que

$$\lim_{z\to -1} f(z) = F_0(-1) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}.$$

Como se observa el valor de f puede recuperarse en la frontera del disco D_1 utilizando el teorema de Abel extendido *a las filas de la tabla de Padé, lo que no puede realizarse utilizando el teorema clásico de Abel. Realizando algunos cálculos se puede obtener que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+2)}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{1}{12},$$

y como $F_0(-1) = 1/3$ se sigue que

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \frac{1}{4}.$$

Con toda intención se ha seleccionado un ejemplo simple de modo de verificar el resultado, pues también es posible obtener la función suma de la serie de potencias dada y así determinar que $f(z) = (1-z)^{-2}$, $|z| < 1$.Pues, modificando la técnica anterior y apoyándonos en la función aproximante

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \frac{p_n(z)}{q_n(z)} \\ &= \frac{-\frac{n+2}{n+1}\left(-\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+2}z - \frac{n-1}{n+2}z^2 - \cdots - \frac{1}{n+2}z^n\right)}{-\frac{n+2}{n+1}\left(z - \frac{n+1}{n+2}\right)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n} -\frac{(n+k+1)}{n+2}z^k}{z - \frac{n+1}{n+2}}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = f(z),\ |z| < 1.$$

O sea,

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(-1) = \frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n.$$

La serie dada es sumable en $z = -1$ en el sentido de Abel. De la expresión anterior se deduce que no se necesita conocer la función f, pues el aproximante ha permitido recuperar el valor en la frontera.

Ejemplo 18 *Sea la serie de potencias*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n2^n}\right)z^n,$$

en $D_0 = \{z \in C : |z| < 1\}$, $(R_0 = 1)$, la cual representa una cierta función analítica f en el disco unidad. Observe que la serie dada es divergente en todos los puntos de la frontera D_0. ¿Será posible obtener información de la función f más allá del disco D_0?

Veamos que es posible. Consideremos que $m = 1$, si utilizamos las fórmulas (6) y (8) se obtiene que:

$$\begin{aligned} F_n(z) = F_1(z) + \\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{-k-2}[2^k(k+1)(k^2+5k+8)+1]}{(k+2)(k+1)^2(k2^k+1)q_k(z)q_{k+1}(z)} z^{k+2}, \end{aligned}$$

o

$$F_n(z) = F_1(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{Q_k(z)Q_{k+1}(z)} z^{k+2}, F_1(z) = \frac{4+3z}{4-3z},$$

donde el polinomio $Q_k(z)$ es de la forma

$$Q_k(z) = z - \frac{(k2^k+1)((k+1)2^{k+1})}{k2^k((k+1)2^{k+1}+1)},\ (k = 1,2,\ldots),$$

y la sucesión B_k está dada por

$$B_k = \frac{2^{-k}[2^k(k+1)(k^2+5k+8)+1]}{k(k+1)^2((k+2)2^{k+2}+1)},\ (k = 1,2,\ldots).$$

Por consiguiente, de acuerdo con (13) se tiene que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |B_k|^{1/k} = \frac{1}{2}.$$

Es decir, $R_1 = 2$ es el radio del disco D_1. Además,

$$\lim_{k\to\infty} Q_k(z) = z - 1,$$

En este caso, el punto límite $z = 1 \in \partial D_0$ y es un punto interior del disco D_1, por lo que se satisfacen las hipótesis de tipo Montessus. Si se selecciona el punto $z = -2 \in \partial D_1$, entonces se puede verificar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{Q_k(-2)Q_{k+1}(-2)}(-2)^k,$$

es convergente. Por tanto, la sucesión de aproximantes de Padé $\{F_n\}$ es convergente para $z = -2 \in \partial D_1$.

En virtud del teorema de Abel extendido a las filas de la tabla de Padé y tomando el límite en forma adecuada podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -2} f(z) &= \lim_{n\to\infty} F_n(-2) \\ &= F_1(-2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{Q_k(-2)Q_{k+1}(-2)}(-2)^{k+2}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $F_1(-2) = -1/5$ y que la suma de la serie se puede estimar con la precisión deseada, se obtiene el valor deseado en $z = -2$.

Referencias

[1] Bieberbach, L., Analytische Forsetzung, Springer-Verlag, 1955.

[2] Fernández, A., G. López, On the boundary behavior of rows of Padé Approximants, Proceedings of the 2nd International Conference on Approximation and Optimization in the Carribbean, Havana, September 26-October 1, 1993. Peter Lang Series on Approximation and Optimization. Vol. 8, 1995, 243?255.

[3] Gonchar, A. A., On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions Mat. Sb. 98(140), 1975, 564?577, traducido al inglés en Math. USSR Sb. 27, 1975, 503?514.

[4] Gonchar, A. A., The poles of the rows of the Pade table and the memomorphic extension of the functions Mat. Sb., 115 (157), 4(8), 1981, 590-613, traducido al inglés en Math. USSR Sb., 43 (1982).

[5] Lopez, G., V. V. Vavilov, Algunas cuestiones de la Teoría de Aproximación, ed. Pueblo y Educación, (1985).

[6] Montessuss de Ballore, Sur les fractions continues algebrique Bull. Soc. Math. Francais 30(1902), 28?36.

[7] Perron, O., Die Lehre von deen Kettenbruchen, Chelsea Publ. Comp., New York, 1950.

[8] Suetin, S. P., On an inverse problem for the mth row of the Pade table, Mat. Sb. 124 (166), 1984, traducido al inglés en Math. USSR Sb. 52 (1), (1985), 231-244.