Ciencias Matemáticas, Vol. 35, No. 2, 2021, Pag. 65-72
Recibido 10-2020, Aceptado 07-2021

Acerca del problema homogéneo de Dirichlet para campos electromagnéticos en dominios con fronteras fractales: caso quiral.
On the Dirichlet's homogeneous problem for electromagnetic fields in domains with fractal boundaries: chiral case.

Luis Manuel Ávila Nápolez[1], Rafael M. Ávila Ávila[2]*, Ricardo Abreu Blaya [3]

Resumen Los problemas de contorno para campos electromagnéticos, a pesar de su amplio estudio en el marco tradicional, han adquirido un renovado interés, especialmente cuando se investigan los medios con fronteras fractales y propiedades quirales. Teniendo en cuenta la estructura vectorial clásica del Sistema de Ecuaciones de Maxwell, se reformula el mismo para los medios referidos, a partir de los resultados básicos del enfoque cuaterniónico. Los objetivos esenciales consisten en enunciar, formular y resolver el problema homogéneo interior de Dirichlet para campos electromagnéticos armónicos en el tiempo, en el caso de dominios quirales con fronteras fractales así como deducir las fórmulas explícitas para tales campos en términos de las funciones vectoriales que lo caracterizan. Ello requirió la aplicación de la teoría de las funciones α-hiperholomorfas y el Análisis Cuaterniónico en combinación con el teorema de extensión y la descomposición de Whitney, el concepto de d-sumabilidad y resultados y conceptos de la Geometría Fractal.

Abstract The boundary value problems for electromagnetic fields, despite its extensive study in the traditional framework, have acquired a renewed interest, especially when the media with fractal boundaries and quirality properties are investigated. Taking into account the vector classical structure of the Maxwell Equations System, it is reformulated for such media from the basic results of the quaternionic approach. The main objectives are to state, formulate and solve the homogeneous interior Dirichlet problem for time harmonic electromagnetic fields, in the case of quiral media with fractal boundaries as well as to deduct explicit formulas for such fields in terms of its characteristic vector functions. This required the application of the theory of α-hyperholomorfic functions combined with extension theorem and Whitney decomposition, the concept of d-summability and results and concepts of the Fractal Geometry.

Palabras Clave
Problemas de valores de frontera, Análisis Cuaterniónico, campos electromagnéticos, medios quirales

Keywords
Border value problems, quaternionic analysis, electromagnetic fields, chiral media

[1] *Departamento de Matemática, Universidad de Holguín, Holguín, Cuba, lavilan@uho.edu.cu*
[2] *Departamento de Licenciatura en Matemática, Universidad de Holguín, Holguín, Cuba,* ravilaa@uho.edu.cu*
[3] *Facultad de Matemática, Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.*
***Autor para Correspondencia**

Introducción

El Análisis Cuaterniónico, rama en la cual se ha investigado intensamente y sobre la que existe una abundante literatura [1, 2, 3], ofrece métodos eficientes y no tan clásicos para la solución de distintos problemas asociados a la propagación de campos electromagnéticos en diferentes medios. Los problemas de valores de frontera como lo representa el de Dirichlet, ocupan un lugar de interés. Los mismos se vinculan a la reconstrucción de dichos campos a partir de la distribución arbitraria de las fuentes en el espacio así como a la búsqueda de las representaciones integrales.

El enfoque cuaterniónico de los referidos problemas para el caso de las ecuaciones de Maxwell y campos electromagnéticos armónicos en el tiempo o monocromáticos, fue propuesto por K. Gürlebeck y W.Sprössig [1, 2] considerando superficies de tipo Liapunov. M. Mitrea, R. Torres y G. Welland los investigaron usando la técnica del potencial de capa y considerando dominios con fronteras de tipo Lipschitz [4].

Sin embargo, V. Kravchenko y M. Shapiro trataron los mismos, teniendo en cuenta superficies de Liapunov, pero a partir de la teoría de las funciones α-hiperholomorfas [3]. Dicha investigación fue extendida a dominios con superficies de la clase más general de Lipschitz, sin tener en cuenta el caracter fractal de las fronteras [5, 6].

Abreu Blaya, Ávila Ávila y Bory Reyes, enunciaron, formularon y resolvieron problemas de valores de frontera, especialmente el problema homogéneo de Dirichlet para campos monocromáticos, a partir del vínculo entre las teorías de los campos referidos y de las funciones α-hiperholomorfas y los conceptos relacionados d-sumabilidad y la extensión de Whitney en asociación con el carácter fractal de las fronteras [7]. Estos autores sugieren la perspectiva de aplicación de los métodos desarrollados en otras situaciones de gran interés teórico y práctico pero no hacen referencia explícita al uso de los mismos para el caso de los medios caracterizados por su quiralidad en el contexto electromagnético.

La comprensión de la quiralidad en términos de propiedades de los medios materiales se logra, a partir del fenómeno de la polarización. Las ondas electromagnéticas tienen un carácter transversal, lo que significa que la dirección de oscilación del vector campo magnético es perpendicular a la dirección en que oscila el vector campo eléctrico así como a la dirección de propagación.

Una onda plana al incidir en la frontera de separación entre dos medios, se refleja y refracta. Si el segundo exhibe quiralidad, se generan dos ondas refractadas. Una está polarizada circularmente a la izquierda y la otra a la derecha. Las velocidades de propagación de las mismas son diferentes y en correspondencia, los números de ondas son también distintos.

El medio quiral puede caracterizarse por un conjunto de relaciones constitutivas generalizadas, en las cuales los campos eléctrico y magnético aparecen acoplados. La intensidad del acoplamiento está dada por cierta magnitud o parámetro quiral, que determina las propiedades electromagnéticas

Khmelnytskaya, Kravchenko y Oviedo [8, 9], a partir de la reestructuración del Sistema de Ecuaciones de Maxwell para los medios quirales en el dominio de frecuencias y en términos de dos ecuaciones cuaterniónicas separadas, enunciaron, formularon y resolvieron algunos problemas de valores de frontera. No obstante, centraron sus análisis sin transgredir las restricciones que impone considerar superficies de tipo Liapunov.

Teniendo en cuenta lo antes expresado, algunos de los objetivos fundamentales de la investigación consisten en: enunciar, formular y resolver el problema homogéneo interior de Dirichlet para campos electromagnéticos monocromáticos en dominios quirales con fronteras fractales y deducir las fórmulas explícitas para tales campos en términos de las funciones vectoriales que lo caracterizan.

1. Materiales y Métodos

La resolución del problema que se investiga requiere de los métodos típicos del Análisis Cuaterniónico. Su aplicación consecuente tiene por base el aparato conceptual del Álgebra Cuaterniónica [10, 11, 12]. A partir de estos fudamentos, se recurre a los resultados fundamentales de la teoría de las funciones α-hiperholomorfas que incluyen como elemento esencial, la definición y las propiedades de los operadores diferenciales así como las fórmulas de representación integral.

En tal ámbito, se investiga el Sistema de Ecuaciones de Maxwell, reduciéndolo convenientemente a ecuaciones cuaterniónicas para los operadores modificados de Dirac. No obstante, la consideración del carácter fractal de la frontera, implica hacer uso de los métodos desarrollados en [7, 13, 14]. Los mismos contemplan, además de los citados, las contribuciones de dichos autores, quienes emplean el teorema de extensión y la descomposición de Whitney, la d-sumabilidad así como conceptos y resultados de la Geometría Fractal.

A continuación se sintetizan los elementos del marco teórico conceptual aludido. Una detallada exposición del mismo, se pueden encontrar en la literatura referida.

Definición 1.1 ***Producto cuaterniónico***. *El producto de dos cuaterniones p y q constituye un nuevo cuaternión, que se puede expresar de la siguiente forma:*

$$pq = p_0q_0 - \underline{p}\cdot\underline{q} + p_0\underline{q} + \underline{p}q_0 + \underline{p}\times\underline{q} \tag{1}$$

donde: p_0 y q_0 se denominan parte escalar; $\underline{p}$ y $\underline{q}$ parte vectorial de los cuaterniones p y q respectivamente.

Si sus partes escalares se anulan, se obtiene el siguiente resultado trascendente desde el punto de vista físico, al incluir simultáneamente, los dos productos del Análisis Vectorial clásico:

$$pq = \underline{p}\,\underline{q} = -\underline{p}\cdot\underline{q} + \underline{p}\times\underline{q} \tag{2}$$

Sean las funciones f y u continuamente diferenciables que toman valores en el álgebra de los cuaterniones complejos $\mathbb{H}(C)$ y dependientes de tres variables (x_1, x_2, x_3). Sobre este conjunto se define el operador operador de Dirac D en $\mathbb{R}^3$ u operador de Moisil-Teodorescu, que constituye un operador elíptico de primer orden. La forma de dicho operador es la siguiente:

$$D := \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k\partial_k \quad donde \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{3}$$

Si se hace actuar el operador sobre una función de la clase definida, el resultado es:

$$Df = \nabla f_0 - \nabla\cdot\underline{f} + \nabla\times\underline{f} \tag{4}$$

La solución fundamental de este operador está dada por:

$$K(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} = \frac{1}{4\pi}\nabla\frac{1}{|\underline{x}|}.$$

Ello significa que $DK(\underline{x}) = \delta(\underline{x})$, donde $\delta(\underline{x})$ es la función delta de Dirac.
Las acciones a la izquierda y a la derecha del operador de Dirac sobre cierta función de la clase referida, no ofrecen el mismo resultado debido a que la propiedad de conmutatividad no es válida en el cuasicampo de los cuaterniones. Así, sea u una función cuaterniónica de clase C^1. El resultado de las acciones del operador D sobre u, es respectivamente:

$$Du := \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{3} \partial_k u_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = \nabla u_0 - \nabla\cdot\underline{u} + \nabla\times\underline{u}$$

$$uD := \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=1}^{3} \partial_k u_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \nabla u_0 - \nabla\cdot\underline{u} - \nabla\times\underline{u}$$

Otro operador de interés es el de Helmholtz $\Delta + \alpha^2 I$ en $\mathbb{R}^3$ ($\alpha \in C$), que juega un papel de gran importancia. El mismo es usual encontrarlo en disímiles aplicaciones físicas como las asociadas con la propagación de ondas en tubos cilíndricos, las oscilaciones propias de un endovibrador de geometría similar y muchas otras.

Los operadores modificados de Dirac cuyas expresiones son $D_\alpha = (D+\alpha)$ y $D_{-\alpha} = (D-\alpha)$, factorizan al operador de Helmholtz:

$$-(D+\alpha)(D-\alpha) = \Delta + \alpha^2. \tag{5}$$

La siguiente función, constituye una solución fundamental para dicho operador:

$$\vartheta(\underline{x}) = -\frac{e^{i\alpha|\underline{x}|}}{4\pi|\underline{x}|}$$

En cambio, las soluciones fundamentales para los operadores D_α y $D_{-\alpha}$ se obtienen respectivamente, mediante cálculos directos, al hacer actuar los mismos sobre la solución fundamental anterior:

$$E_\alpha(\underline{x}) = -(D-\alpha)\vartheta(\underline{x}) = (\alpha + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^2} - i\alpha\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|})(-\frac{e^{i\alpha|\underline{x}|}}{4\pi|\underline{x}|}) \tag{6a}$$

$$E_{-\alpha}(\underline{x}) = -(D+\alpha)\vartheta(\underline{x}) = (-\alpha + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^2} - i\alpha\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|})(-\frac{e^{i\alpha|\underline{x}|}}{4\pi|\underline{x}|}) \tag{6b}$$

Sean: el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; Γ la superficie frontera de dicho dominio y u, v funciones de clase $C^1(\overline{\Omega})$. Los operadores integrales transformadas de Cauchy y Teodorescu, se denotan respectivamente por los símbolos $C_\alpha u(\underline{x})$ y $T_\alpha D_\alpha u(\underline{x})$. Sus expresiones generales son:

$$C_\alpha\varphi(\underline{x}) := -\int_\Gamma E_\alpha(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\varphi(\underline{y})dS(\underline{y}),\ \underline{x}\notin\Gamma,$$

$$T_\alpha\varphi(\underline{x}) = \int_\Omega E_\alpha(\underline{y}-\underline{x})\varphi(\underline{y})dV(\underline{y}) \tag{7}$$

1.1 Sistema de ecuaciones de Maxwell para medios no quirales

Sistema de Ecuaciones de Maxwell en forma cuaterniónica para campos armónicos

Las ecuaciones de Maxwell constituyen expresiones matemáticas de cuatro importantes leyes físicas: Ley de Ampere Maxwell; Ley de Faraday; Ley de Gauss para el magnetismo y Ley de Gauss para la Electricidad. Dichas leyes encuentran su confirmación y verificación más fehaciente en la práctica. El sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden que las representan, en su forma vectorial más usual, es:

$$\nabla\times\underline{H} = \frac{\partial\underline{D}}{\partial t} + \underline{j} + \underline{j}^{(e)} \tag{8a}$$

$$\nabla\times\underline{E} = -\frac{\partial\underline{B}}{\partial t} \tag{8b}$$

$$\nabla\cdot\underline{H} = 0 \tag{8c}$$

$$\nabla\cdot\underline{D} = \rho \tag{8d}$$

donde: $\underline{E}(\underline{x},t)$: vector intensidad del campo eléctrico; $\underline{H}(\underline{x},t)$: vector intensidad del campo magnético; $\underline{D}(\underline{x},t)$: vector inducción eléctrica; $\underline{B}(\underline{x},t)$: vector inducción magnética; $\underline{j}(\underline{x},t)$: densidad volumétrica de corriente de conducción; $\underline{j}^{(e)}(\underline{x},t)$: densidad volumétrica de corriente debida a la acción de las fuerzas electromotrices exteriores; ρ: densidad volumétrica de carga.

El sistema (8) contiene magnitudes variables en el espacio y en el tiempo y conforman las ecuaciones del campo electromagnético. Éstas son aplicables en la descripción de todos los fenómenos de naturaleza eléctrica y magnética. Así, las leyes de las cuales son expresión, constituyen los axiomas para la construcción de la Electrodinámica como teoría deductiva.

En caso de situaciones particulares es necesario tener en cuenta las propiedades de los medios. Ello es posible a partir de las ecuaciones materiales o relaciones constitutivas, que en caso de medios lineales, homogéneos e isótropos(LHI) están dadas por las expresiones: $\underline{D} = \varepsilon\underline{E}$, $\underline{B} = \mu\underline{H}$ y $\underline{j} = \sigma\underline{E}$. Si los medios son no homogéneos, el sistema (8) es equivalente al sistema expresado en forma integral, si las ecuaciones se complementan con ciertas condiciones llamadas de conjunción. Estas las satisfacen las componentes tangenciales y normales de los campos eléctrico y magnético en la frontera de separación.

Si no se consideran las corrientes debida a las fuerzas electromotrices externas, el sistema (8) se transforma en:

$$\nabla\times\underline{H} = \frac{\partial\underline{D}}{\partial t} + \underline{j} \tag{9a}$$

$$\nabla\times\underline{E} = -\frac{\partial\underline{B}}{\partial t} \tag{9b}$$

$$\nabla\cdot\underline{H} = 0 \tag{9c}$$

$$\nabla\cdot\underline{D} = \rho \tag{9d}$$

Si no hay fuentes de carga y corriente eléctricas, entonces el sistema se simplifica:

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \tag{10a}$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \tag{10b}$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0 \tag{10c}$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = 0 \tag{10d}$$

Las ecuaciones (9a) y (9d) son compatibles, pues satisfacen la ley de conservación de la carga eléctrica, expresada en la ecuación de continuidad. Esta se obtiene aplicando la operación divergencia a la primera ecuación, acción que anula el miembro izquierdo al convertirlo en una identidad, y teniendo en cuenta la expresión (9d) así como el hecho de que dicha operación sólo incluye derivación sobre variables espaciales. Por tanto, el aspecto de tal ecuación es:

$$\nabla \cdot \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

Los campos electromagnéticos armónicos en el tiempo, se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}(\underline{x})e^{-i\omega t}, & \underline{H}(\underline{x},t) = \underline{H}(\underline{x})e^{-i\omega t} \\ \underline{D}(\underline{x},t) = \underline{D}(\underline{x})e^{-i\omega t}, & \underline{B}(\underline{x},t) = \underline{B}(\underline{x})e^{-i\omega t} \end{array} \tag{12}$$

Considerando que las densidades de carga y de corriente se comportan de forma similar, se tiene:

$$\underline{j}(\underline{x},t) = \underline{j}(\underline{x})e^{-i\omega t}, \quad \underline{\rho}(\underline{x},t) = \underline{\rho}(\underline{x})e^{-i\omega t} \tag{13}$$

Las magnitudes $\underline{E}(\underline{x})$, $\underline{H}(\underline{x})$, $\underline{D}(\underline{x})$, $\underline{B}(\underline{x})$, $\underline{j}(\underline{x})$ y $\underline{\rho}(\underline{x})$ solo dependen de la variable espacial $x = (x_1, x_2, x_3)$. La dependencia con el tiempo está contenida en el factor $e^{-i\omega t}$. Si se sustituyen las expresiones (12) y (13) en el sistema (9) se obtiene el sistema de ecuaciones de Maxwell para dichos campos y medios LHI:

$$\nabla \times \underline{H} = -i\omega \underline{D} + \underline{j} = -i\omega\varepsilon \underline{E} + \underline{j} \tag{14a}$$

$$\nabla \times \underline{E} = i\omega \underline{B} = i\omega\mu \underline{H} \tag{14b}$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0 \tag{14c}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{14d}$$

1.2 Sistema de Ecuaciones de Maxwell en forma cuaterniónica para medios quirales

Las relaciones constitutivas de Drude-Born-Feodorov tienen la siguiente forma:

$$\underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon[\underline{E}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{E}(\underline{x})] \tag{15a}$$

$$\underline{B}(\underline{x}) = \mu[\underline{H}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{H}(\underline{x})] \tag{15b}$$

La sustitución de las expresiones anteriores en (14a)-(14d) conduce al sistema de ecuaciones de Maxwell para medios quirales y campos armónicos:

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{x}) = -i\omega\varepsilon[\underline{E}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{E}(\underline{x})] + \underline{j}(\underline{x}) \tag{16a}$$

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{x}) = i\omega\mu[\underline{H}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{H}(\underline{x})] \tag{16b}$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0 \tag{16c}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{16d}$$

En caso de ausencia de fuentes, el sistema anterior se convierte en:

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{x}) = -i\omega\varepsilon[\underline{E}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{E}(\underline{x})] \tag{17a}$$

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{x}) = i\omega\mu[\underline{H}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{H}(\underline{x})] \tag{17b}$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0 \tag{17c}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \tag{17d}$$

La redefinición de las funciones vectoriales $\underline{E}(\underline{x}) \longrightarrow -\sqrt{\mu}\underline{E}(\underline{x})$; $\underline{H}(\underline{x}) \longrightarrow \sqrt{\varepsilon}\underline{H}(\underline{x})$ y $\underline{j}(\underline{x}) \longrightarrow \sqrt{\varepsilon}\,\underline{j}(\underline{x})$, permite reescribir las expresiones anteriores. En particular:

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{x}) = i\alpha[\underline{E}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{E}(\underline{x})] + \underline{j}(\underline{x}) \tag{18a}$$

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{x}) = -i\alpha[\underline{H}(\underline{x}) + \beta\nabla \times \underline{H}(\underline{x})] \tag{18b}$$

La magnitud α constituye el número de onda, vinculado con la frecuencia ω y su velocidad de propagación $v = \sqrt{\varepsilon\mu}^{-1}$, mediante la expresión $\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.
La reformulación del sistema de Maxwell en el contexto cuaterniónico, requiere definir las siguientes funciones bicuaternónicas puramente vectoriales:

$$\underline{\varphi}(\underline{x}) = \underline{E}(\underline{x}) - i\underline{H}(\underline{x}) \tag{19a}$$

$$\underline{\psi}(\underline{x}) = \underline{E}(\underline{x}) + i\underline{H}(\underline{x}) \tag{19b}$$

La acción del operador de Moisil-Teodorescu según la expresión (4) sobre la primera de ellas (19a), ofrece el siguiente resultado:

$$D\underline{\varphi}(\underline{x}) = D[\underline{E}(\underline{x}) - i\underline{H}(\underline{x})] = -\nabla \cdot \underline{E}(\underline{x}) + \nabla \times \underline{E}(\underline{x}) - i\nabla \times \underline{H}(\underline{x}) \tag{20}$$

Teniendo en cuenta la redefinición operacional de las funciones vectoriales del campo, la reescritura de la ecuación que involucra a la divergencia del campo eléctrico en tales términos, las expresiones (18a) y (18b) y omitiendo la dependencia con la variable espacial ($\underline{x}$), se obtiene:

$$D\underline{\varphi} = \frac{\rho}{\varepsilon\sqrt{\mu}}[1 - \alpha\beta] + \alpha\underline{\varphi} + \alpha\beta D\underline{\varphi} - i\underline{j} \tag{21}$$

A partir de la realización de algunas transformaciones algebraicas en ambos miembros de la expresión anterior, se deduce la ecuación que satisface la función bicuaterniónica $\underline{\varphi}$:

$$(D - \frac{\alpha}{1-\alpha\beta})\underline{\varphi} = -\frac{i}{\alpha}\nabla \cdot \underline{j} - \frac{i}{\alpha}\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\underline{j} \tag{22}$$

De forma similar para la función $\underline{\psi}(\underline{x})$ se tiene:

$$D\underline{\psi}(\underline{x}) = D[\underline{E}(\underline{x}) + i\underline{H}(\underline{x})] = -\nabla\cdot\underline{E}(\underline{x}) + \nabla\times\underline{E}(\underline{x}) + i\nabla\times\underline{H}(\underline{x}) \tag{23}$$

Un procedimiento análogo al empleado para obtener (22), conduce al siguiente resultado:

$$(D + \frac{\alpha}{1+\alpha\beta})\underline{\psi} = -\frac{i}{\alpha}\nabla\cdot\underline{j} + \frac{i}{\alpha}\frac{\alpha}{1+\alpha\beta}\underline{j} \tag{24}$$

Introduciendo las notaciones $\alpha_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$, $\alpha_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha\beta}$, $\lambda_1 = -\frac{i}{\alpha}$, $\lambda_2 = -\frac{i}{\alpha}\alpha_1$ y $\lambda_3 = \frac{i}{\alpha}\alpha_2$ así como los operadores modificados de Dirac $D+\alpha_1 = D_{-\alpha_1}$ y $D+\alpha_2 = D_{\alpha_2}$, las expresiones (22) y (24) resultan:

$$D_{-\alpha_1}\underline{\varphi} = \lambda_1\nabla\cdot\underline{j} + \lambda_2\underline{j} \tag{25}$$

$$D_{\alpha_2}\underline{\psi} = \lambda_1\nabla\cdot\underline{j} + \lambda_3\underline{j} \tag{26}$$

Las ecuaciones (25) y (26) constituyen las expresiones del sistema de ecuaciones de Maxwell en forma cuaterniónica para los medios quirales y campos monocromáticos. Las magnitudes α_1 y α_2 son los números de ondas, en general distintos debido a que caracterizan la propagación de las ondas con polarizaciones circulares opuestas. Los mismos corresponden a ondas que giran el plano de polarización a la derecha en un caso y en otro, a la izquierda. En ausencia de fuentes el sistema se transforma en:

$$D_{-\alpha_1}\underline{\varphi} = 0 \tag{27}$$

$$D_{\alpha_2}\underline{\psi} = 0 \tag{28}$$

1.3 Teoría de los problemas de contorno para campos electromagnéticos en dominios con fronteras fractales: caso no quiral

Los resultadosde de este apartado aparecen ampliamente abordados en [7, 13, 14]. Sólo se sintetizan aquí los que tienen que ver directamente con el problema objeto de resolución.

Teorema 1.1 . *Sea $g \in C^{0,\nu}(\Gamma)$ y $\nu > \frac{d}{3}$. Si existe una función $G \in C^{0,\nu}(\Omega\cup\Gamma)$, que sea además α-hiperholomorfa y satisfaga el problema de Dirichlet homogéneo:*

$$\begin{cases} D_\alpha G = 0, \ \underline{x}\in\Omega \\ G|_\Gamma = g, \end{cases} \tag{29}$$

Entonces:

$$T_\alpha D_\alpha \tilde{g}|_\Gamma = 0 \tag{30}$$

Teorema 1.2 ***Teorema recíproco del (1.1)***. *Si se cumple:*

$$T_\alpha D_\alpha \tilde{g}|_\Gamma = 0 \tag{31}$$

Entonces existe una función $G \in C^{0,\nu'}(\Omega\cup\Gamma)$ ($\nu' < \nu$) que satisface el problema homogéneo de Dirichlet:

$$\begin{cases} D_\alpha G = 0, \ \underline{x}\in\Omega \\ G|_\Gamma = g, \end{cases} \tag{32}$$

Los teoremas anteriores ofrecen las condiciones necesarias y suficientes para que el problema homogéneo de Dirichlet homogéneo (29), sea soluble.

Es notable nuevamente la relación que deben satisfacer la dimensión métrica superior y el exponente de Hölder: $\nu > \frac{d}{3}$. Bajo el supuesto de que sea válido el teorema 1.1, la función dada por la expresión $\tilde{g} - T_\alpha D_\alpha \tilde{g}$ no depende de la elección particular del tipo de extensión de Whitney $\tilde{g}$. Ello posibilita establecer fórmulas de representación de tipo Cauchy en dominios con fronteras fractales para ciertas clases de ecuaciones de Dirac homogéneas [15, 16]. Es por tal razón que el siguiente teorema es de importancia pues establece la forma explícita de la solución del problema de Dirichlet referido.

Teorema 1.3 *Sea $G \in C^{0,\nu}$ en $\Omega\cup\Gamma$ con $\nu > \frac{d}{3}$, una función α-hiperholomorfa en Ω con la traza g sobre la frontera Γ. Por tanto es válida la siguiente fórmula:*

$$G(\underline{x}) = \tilde{g}(\underline{x}) - T_\alpha D_\alpha \tilde{g}(\underline{x}), \ \underline{x}\in\Omega. \tag{33}$$

Observación 1.1 *Si la función G en el recién formulado teorema se elige como una función que adopta valores vectoriales, entonces (33) conduce a que la función g satisfaga:*

$$Sc(T_\alpha D_\alpha \tilde{g}(\underline{x})) = 0, \ \underline{x}\in\Omega. \tag{34}$$

2. Resultados

2.1 Problema interior de Dirichlet homogéneo para los operadores $D_{-\alpha_1}$, D_{α_2}

Teniendo en cuenta los resultados de los epígrafes 1.2 y 1.3, el problema homogéneo interior de Dirichlet en medios quirales con fronteras fractales, queda enunciado y formulado en los siguientes términos:

Problema homogéneo interior de Dirichlet:

Determinar la función $\underline{\varphi}$ en el dominio Ω, de la clase $C^{0,\nu}(\Omega\cup\Gamma)$ y cuya condición de frontera es de la misma clase $C^{0,\nu}(\Gamma)$, de manera que:

$$\begin{cases} D_{-\alpha_1}\underline{\varphi} = 0, \ \underline{x}\in\Omega \\ \underline{\varphi}\big|_\Gamma = \underline{e} - i\underline{h} \end{cases} \tag{35}$$

Sean los campos $\underline{E}$ y $\underline{H}$ tales que satisfacen el sistema (17a)-(17d). Los enunciados de los teoremas (1.1) y (1.2) se unifican y resulta el teorema que se ofrece a continuación. El mismo establece las condiciones de solubilidad del problema homogéneo interior de Dirichlet 35 para el operador $D_{-\alpha_1}$ y constituye uno de los resultados fundamentales de la aplicación de la teoría desarrollada en [7, 13, 14], a los dominios quirales con fronteras fractales.

Teorema 2.1 *Sean las funciones $\underline{E}\big|_\Gamma = \underline{e}$, $\underline{H}\big|_\Gamma = \underline{h}$: $\in C^{0,\nu}(\Gamma)$; sea además $\nu > \dfrac{d}{3}$. Sea la función $\underline{\varphi}$ que satisface el problema 35*

La condición necesaria y suficiente para que el problema referido tenga solución es:

$$T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}} - i\underline{\tilde{h}})\big|_\Gamma = 0$$

La solución explícita del problema (35) se da en el siguiente teorema, que constituye una particularización del teorema (1.3).

Teorema 2.2 *Sea $\nu>\frac{d}{3}$ y la función $\underline{\varphi}\in C^{0,\nu}(\Omega\bigcup\Gamma)$ tal que satisfaga el problema (35). La solución de dicho problema está dada por la expresión:*

$$\underline{\varphi}=\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}}-T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}}) \tag{36}$$

De forma similar son válidos los siguientes teoremas que incorporan la función $\underline{\psi}$ y el operador D_{α_2}.

Teorema 2.3 *Sean las funciones $\underline{E}\big|_{\Gamma}=\underline{e},\ \underline{H}\big|_{\Gamma}=\underline{h}:\in C^{0,\nu}(\Gamma)$; sea además $\nu>\frac{d}{3}$. Sea el problema interior de Dirichlet homogéneo:*

$$\begin{cases} D_{\alpha_2}\underline{\psi}=0,\ \underline{x}\in\Omega \\ \underline{\psi}\big|_{\Gamma}=\underline{e}+i\underline{h} \end{cases} \tag{37}$$

La condición necesaria y suficiente para que el problema tenga solución es:

$$T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\big|_{\Gamma}=0$$

Teorema 2.4 *Sea $\nu>\frac{d}{3}$ y la función $\underline{\psi}\in C^{0,\nu}(\Omega\bigcup\Gamma)$ tal que satisfaga el problema (37). La solución de dicho problema está dada por la expresión:*

$$\underline{\psi}=\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}}-T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}}) \tag{38}$$

Los teoremas (2.1)-(2.4) constituyen los fundamentos que permiten la reconstrucción de los campos monocromáticos y representa otro resultado esencial de la investigación de los medios no quirales. El mismo se sintetiza en el siguiente teorema.

Teorema 2.5 ***(Reconstrucción de los campos electromagnéticos armónicos en ausencia de fuentes)*** *Sean las funciones vectoriales del campo electromagnético $\underline{E},\underline{H}$ con las siguientes propiedades: $\underline{E},\underline{H}\in C^{0,\nu}(\Omega\bigcup\Gamma)$, satisfacen las ecuaciones de Maxwell (17a)-(17d) en el dominio Ω; sus valores de frontera son tales que $\underline{E}\big|_{\Gamma}=\underline{e},\ \underline{H}\big|_{\Gamma}=\underline{h}:\in C^{0,\nu}(\Gamma)$; sea además $\nu>\frac{d}{3}$. Entonces se cumple que:*

$$T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\big|_{\Gamma}=T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\big|_{\Gamma}=0 \tag{39}$$

$$Sc(T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}}))=Sc(T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}}))=0,\ \underline{x}\in\Omega. \tag{40}$$

Recíprocamente: el cumplimiento de las condiciones (39) y (40) implica que las ecuaciones de Maxwell (17a)-(17d) y las condiciones de frontera $\underline{E}\big|_{\Gamma}=\underline{e},\ \underline{H}\big|_{\Gamma}=\underline{h}$, las satisfacen los siguientes campos:

$$\underline{E}=\underline{e}-\frac{1}{2}T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})-\frac{1}{2}T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}}) \tag{41}$$

$$\underline{H}=\underline{h}+\frac{1}{2i}T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})-\frac{1}{2i}T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}}) \tag{42}$$

Demostración:
Las funciones $\underline{\varphi}(\underline{x})=\underline{E}(\underline{x})-i\underline{H}(\underline{x})$ y $\underline{\psi}(\underline{x})=\underline{E}(\underline{x})+i\underline{H}(\underline{x})$ permiten reducir el sistema (17a)-(17d) al par de ecuaciones (27)-(28). Al mismo tiempo, las funciones $\underline{\varphi}(\underline{x})$ y $\underline{\psi}(\underline{x})$ cumplen con los teoremas (2.1) y (2.3) respectivamente. Considerando que las funciones del campo son vectoriales y la observación (1.1), se deducen las expresiones (39) y (40) que era lo que quería demostrarse.
La afirmación recíproca se demuestra mediante cálculo directo. Este consiste en adicionar y sustraer las expresiones para $\underline{\varphi}(\underline{x})$ y $\underline{\psi}(\underline{x})$, y obtener las expresiones siguientes:

$$\underline{E}=\frac{1}{2}[\underline{\psi}(\underline{x})+\underline{\varphi}(\underline{x})];\quad \underline{H}=\frac{1}{2i}[\underline{\psi}(\underline{x})-\underline{\varphi}(\underline{x})] \tag{43}$$

Las condiciones sintetizadas en la expresión (39) son necesarias y suficientes para la solubilidad de los problemas (35) y (37), según establecen los teoremas correspondientes. Por otra parte las soluciones de dichos problemas son establecidas por los teoremas (2.2) y (2.4). Sustituyendo las expresiones (36) y (38) en (43), se obtienen las fórmulas (41) y (42) que era lo que quería demostrarse.

Expresiones vectoriales para los campos eléctrico y magnético

Las expresiones vectoriales explícitas de los campos (41) y (42) se obtienen, empleando la fórmula de representación integral que corresponde a la transformada de Teodorescu cuya forma general está dada por (7). La sustitución del operador $D_{-\alpha_1}$ en (7), de la condición de frontera $(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})$, y el cálculo a partir de la expresión general (4) particularizado para funciones cuaternónicas con parte escalar nula (la dependencia de los valores de frontera $\underline{e}$ y $\underline{h}$ de los integrandos, con la variable $\underline{y}$ se omiten, en aras optimizar el espacio), conducen a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}}) &= -\int_{\Omega}E_{-\alpha_1}(\underline{y}-\underline{x})\nabla\cdot\underline{\tilde{e}}\,dV(\underline{y}) \\ &+\int_{\Omega}E_{-\alpha_1}(\underline{y}-\underline{x})\nabla\times\underline{\tilde{e}}\,dV(\underline{y})+i\int_{\Omega}E_{-\alpha_1}(\underline{y}-\underline{x})\nabla\cdot\underline{\tilde{h}}\,dV(\underline{y}) \\ &-i\int_{\Omega}E_{-\alpha_1}(\underline{y}-\underline{x})\nabla\times\underline{\tilde{e}}\,dV(\underline{y})-\alpha_1\int_{\Omega}E_{-\alpha_1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{\tilde{e}}\,dV(\underline{y}) \\ &+i\alpha_1\int_{\Omega}E_{-\alpha_1}(\underline{y}-\underline{x})\underline{\tilde{h}}\,dV(\underline{y}) \end{aligned} \tag{44}$$

La sustitución en cada una de las integrales de la expresión correspondiente al núcleo (6b) o solución fundamental del operador $E_{-\alpha_1}$, el desarrollo de los productos cuaterniónicos mediante el empleo de la fórmula (2) y la agrupación de las partes escalar y vectorial, ofrece como resultado:

$$Sc[T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})] = -\alpha_1\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{y}|}\nabla\cdot(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}+\frac{i\alpha_1}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\cdot\nabla\times(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\alpha_1\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}-\frac{i\alpha_1}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\cdot(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y}) \quad (45)$$

$$Vec[T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})] =$$
$$\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}-\frac{i\alpha_1}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\nabla\cdot(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\alpha_1\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{y}|}\nabla\times(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\alpha_1^2\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{y}|}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$+\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}+\frac{i\alpha_1}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\times\nabla\times(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\alpha_1\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_1|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[-\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}+\frac{i\alpha_1}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\times(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y}) \quad (46)$$

Un procedimiento similar al empleado, permite obtener las partes escalares y vectoriales de $T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})$, pero teniendo en cuenta la expresión (6a). Las fórmulas resultantes son:

$$Sc[T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})] = \alpha_2\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{y}|}\nabla\cdot(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$+\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}-\frac{i\alpha_2}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\cdot\nabla\times(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$+\alpha_2\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}-\frac{i\alpha_2}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\cdot(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y}) \quad (47)$$

$$Vec[T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})] =$$
$$\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}-\frac{i\alpha_2}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\nabla\cdot(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\alpha_2\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{y}|}\nabla\times(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\alpha_2^2\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi|\underline{x}-\underline{y}|}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})+$$
$$\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[-\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}+\frac{i\alpha_2}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\times\nabla\times(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y})$$
$$-\alpha_2\int_\Omega \frac{e^{i\alpha_2|\underline{x}-\underline{y}|}}{4\pi}[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|^3}-\frac{i\alpha_2}{|\underline{x}-\underline{y}|^2}](\underline{y}-\underline{x})\times(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})\,dV(\underline{y}) \quad (48)$$

Los campos $\underline{E}$ y $\underline{H}$ son funciones cuaterniónicas puramente vectoriales y por tanto sus partes escalares son nulas. Así, las expresiones para tales funciones pueden deducisrse mediante dos procedimientos: mediante la búsqueda de combinaciones integrales en aras de encontrar las partes vectoriales o simplemente adoptando directamente las partes vectoriales (46), (48) y sustituirlas en:

$$\underline{E} = \underline{e} - \frac{1}{2}Vec[T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})] - \frac{1}{2}Vec[T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})] \quad (49)$$

$$\underline{H} = \underline{h} + \frac{1}{2i}Vec[T_{-\alpha_1}D_{-\alpha_1}(\underline{\tilde{e}}-i\underline{\tilde{h}})] - \frac{1}{2i}[T_{\alpha_2}D_{\alpha_2}(\underline{\tilde{e}}+i\underline{\tilde{h}})] \quad (50)$$

Las expresiones que resultan de la sustitución de (46) y (48) en (49) y (50), constituyen la forma explícita de las componentes de los campos electromagnéticos armónicos, en ausencia de fuentes y para medios quirales con fronteras fractales.

3. Conclusiones

Los medios quirales se diferencian por su naturaleza física de los no quirales. Ello se expresa entre otros rasgos, por el acoplamiento de los campos eléctrico y magnético que tiene lugar en los primeros y cuya intensidad determina las propiedades electromagnéticas.

Los problemas de contorno para tales medios se diferencian con respecto a los no quirales en el hecho de plantearse, formularse y resolverse considerando dos números ondulatorios (α_1, α_2), en lugar de uno, consecuencia del fenómeno de la propagación de dos ondas con distintas velocidades, después de la incidencia de una onda plana en la frontera que lo separa de otro en el que está ausente la propiedad de quiralidad.

El problema homogéneo interior de Dirichlet en dominios quirales con fronteras fractales y para campos electromagnéticos armónicos, es soluble, no para valores arbitrarios del exponente de Hölder que caracteriza la condición de frontera y la d-sumabilidad de las fronteras que delimitan los dominios, sino cuando se cumple la condición: $\nu > \frac{d}{3}$.

Bajo el cumplimiento de las condiciones de solubilidad del problema objeto de interés del presente artículo, se han obtenido fórmulas explícitas para las funciones vectoriales que caracterizan al campo electromagnético en dominios quirales con fronteras fractales.

Los resultados de la teoría de los problemas de contorno para campos electromagnéticos en dominios no quirales con fronteras fractales, son aplicables a los medios más generales como los quirales, con similares características en cuanto a la fractalidad. Ello constituye una muestra del alcance de los métodos desarrollados y sus posibilidades para la formalización de una teoría electrodinámica fractal.

Referencias

[1] Gürlebeck, K., Sprössig, W. (1990). Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. Basel, Boston, Berlin: BirkhäuserVerlag.

[2] Gürlebeck, K., Sprössig, W. (1997). Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers. Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto: John Wiley and Sons.

[3] Kravchenko, V.V., Shapiro, M.V. (1996). Boundary value problems for time-harmonic electromagnetic fields. En: Integral representations for spatial models of mathematical physics (138-146). Harlow Essex: Addison Wesley Longman Limited.

[4] Mitrea, M., Torres, R.H., Welland, G.V. (1996). Regularity and approximation results for the Maxwell problem on C^1 and Lipschitz domains. En: J. Ryan (ed.), Clifford Algebras in Analysis and Related Topics (297-308). Boca Raton, New York, London, Tokyo: CRC Pres.

[5] Kravchenko, V.V. (2003). Applied quaternionic analysis. Research and Exposition in Mathematics, 28. Lemgo: Heldermann Verlag.

[6] McIntosh, A., Mitrea, M. (1999). Clifford algebras and Maxwell's equations in Lipschitz domains. Math. Meth. Appl. Sci., vol. 22, no. 18, 1599-1620.

[7] Abreu Blaya, R.; Ávila Ávila, R., Bory Reyes, J. (2015). Boundary value problems for Dirac operators and Maxwell's equations in fractal domains. Math. Meth. Appl. Sci., vol. 38, 393-402.

[8] Khmelnytskaya Guerasimova, K. (2005). Solución analítica y numérica de problemas con valores en la frontera para el campo electromagnético en medios quirales. Tesis en opción al grado de Doctora en Comunicación y Electrónica. Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, México, DF.

[9] Khmelnytskaya, K.V. Kravchenko, V.V. Oviedo, H. (2001). Quaternionic integral representations for electromagnetic fields in chiral media. Telecommunications and Radio Engineering 56 (2001), No. 4&5, 53-61.

[10] Gürlebeck,K.;Habetha, K.; Sprössig, W. (2008) Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space. Berlin: Birkhäuser Verlag AG.

[11] Ward, J.P. Quaternions and Cayley Number. (1997). Algebra and applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publisher.

[12] Ávila, Ávila, R.; Abreu Blaya, R.; Borys Reyes, J. (2016). Álgebra cuaterniónica y algunas aplicaciones. Instituto Politécnico Nacional. México: DR, Sociedad Cooperativa, ISBN: 978-607-8292-35-6.

[13] Ávila Ávila, R. (2016). Problemas de contorno para campos electromagnéticos y funciones polimonogénicas en dominios con fronteras fractales. Tesis en opción al título de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Oriente.

[14] Abreu Blaya, R., Ávila Ávila, R., Bory Reyes, J., Rodríguez-Dagnino, R.M. (2015). Cauchy representation formulas for Maxwell equations in 3-dimensional domains with fractal boundaries. Bull. Braz. Math. Soc., New Series, vol. 46, no. 4, 681-700.

[15] Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J. (2009). A Martinelli-Bochner formula on fractal domains. Arch. Math., vol. 92, no. 4, 335-343.

[16] Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Brackx, F., De Schepper, H., Sommen, F. (2010). A Hermitian Cauchy formula on a domain with fractal boundary. J. Math. Anal. Appl., vol. 369, 273–282.