UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE CAMPO CENTRAL DE LA MECÁNICA CLÁSICA

Jorge Erick López Velázquez*, Julián Bravo Castillero[1] y Reinaldo Rodríguez Ramos
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba

RESUMEN
En este trabajo se prueba la equivalencia entre tres definiciones del concepto de campo central de la mecánica clásica, en el espacio euclidiano n -dimensional, usando técnicas no estándar. La demostración involucra importantes procedimientos y conceptos de la geometría y el álgebra lineal. El carácter integrador de estas ideas pudiera ser de interés para estudiantes de licenciatura en matemática.

ABSTRACT
In this work a proof of the equivalence between three definitions of central field concept of classical mechanics in n -dimensional euclidean space is presented by using a non-traditional way. The proof involves important techniques and concepts of linear algebra. The connected character of these ideas could be interesting for mathematics students, which have this subject included in their curricula.

INTRODUCCIÓN

Es natural encontrar estudiantes de la carrera de licenciatura en matemática sin motivación previa para estudiar contenidos de la disciplina de mecánica que, frecuentemente, aparecen en materias de sus currículos. Sin embargo, importantes técnicas y conceptos matemáticos son usados en mecánica y, más aún, teorías matemáticas modernas surgen a partir de tener que resolver problemas en mecánica (ver, por ejemplo [1]).

El objetivo fundamental de esta contribución es ilustrar un enfoque geométrico para introducir el concepto de campo central de la mecánica clásica. Este punto de vista permite la integración de importantes definiciones de la geometría y el álgebra lineal con los fundamentos matemáticos de este concepto clave de la mecánica clásica.

En [1], el concepto de campo central con centro O se introduce como un campo vectorial en el plano euclidiano que es invariante con respecto al grupo de los movimientos del plano que mantienen fijo a O Seguidamente, en la página 30 de [1] se plantea el siguiente problema: Demuestre que todos los vectores de un campo central están situados sobre rayos con origen en O de manera que la magnitud del campo vectorial en cada punto sólo depende de la distancia del punto al centro del campo. El contenido de este problema se corresponde con la definición que usualmente se utiliza en la literatura para introducir el concepto de campo central (ver, por ejemplo: página 30 en [2], página 72 en [3], y página 81 en [4], etc.). En este trabajo se presenta una solución del problema, arriba mencionado, planteado en [1], en un contexto más general del espacio euclidiano n-dimensional. Los resultados que se presentarán a continuación fueron logrados por el estudiante JELV durante un curso de mecánica clásica, que recién finalizó en enero de 2006, bajo el asesoramiento de los profesores JBC y RRR.

CARACTERIZACIONES MATEMÁTICAS DE LOS CAMPOS DE FUERZAS CENTRALES

Notaciones: Se trabajará en el espacio vectorial euclidiano n -dimensional denotado por R^n, cuyos elementos r, son vectores columnas (o matrices de orden $n \times 1$)), con la base canónica $(e_i)_{i=1}^n$ y el producto escalar dado por $\langle r, s\rangle = r^T s \quad \forall r, s \in R^n$. El símbolo A^T denota la transpuesta de la matriz A. La norma $\| r \|$

E-mail: [1]jbravo@matcom.uh.cu
*Estudiante de cuarto año de Licenciatura en Matemática

de un vector $r \in R^n$ se representa por el número real no-negativo $r = \| r \| = \sqrt{\langle r,r \rangle}$. Con $O_n(R)$ se identifica al conjunto de todos las matrices ortogonales de orden n. El convenio de suma abreviada de Einstein será utilizado.

Para lograr el propósito de esta comunicación es necesario recordar qué se entiende por movimiento en R^n y algunas de sus propiedades relevantes.

Definición 1. (Movimiento en R^n) Se llama movimiento en R^n, a toda transformación $T: R^n \to R^n$ que es una isometría, es decir, tal que $d(T(r), T(s)) = d(r,s)\ \forall r,s \in R^n$, donde $d(r,s) = \sqrt{\langle r-s, r-s \rangle}$.

Teorema 1. Una transformación $T: R^n \to R^n$ es un movimiento en R^n si y solo si existen $G \in O_n(R)$ y $b \in R^n$ tales que $T(r) = Gr + b \quad \forall\, r \in R^n$.

Demostración:

(Necesidad) Se cumple $\langle T(r)-T(s), T(r)-T(s) \rangle = \langle r-s, r-s \rangle \quad \forall r,s \in R^n$. Por otra parte, la transformación $g: R^n \to R^n$ definida por $g(r) = T(r) - T(0)$ satisface las siguientes condiciones: (i) $g(0) = 0$ y (ii) $\langle g(r)-g(s), g(r)-g(s) \rangle = \langle r-s, r-s \rangle$. Haciendo s = 0 en (ii) se verifica que g es una isometría, es decir $\langle g(r), g(r) \rangle = \langle r,r \rangle$ por lo que desarrollando la condición (ii) resulta, en virtud del carácter bilineal del producto escalar, que $\langle g(r), g(s) \rangle = \langle r,s \rangle$. Si $g(e_i) = a_{ji} e_j$ entonces la matriz $A = (a_{ij})$ es ortogonal, $A^T A = I$, donde I denota a la matriz unidad de orden *n*. En efecto, note que, $(A^T A)_{il} = a_{ki} a_{kl} = a_{ji} a_{kl} \delta_{jk} = a_{ji} a_{kl} \langle e_j, e_k \rangle =$ $= \langle a_{ji} e_j, a_{kl} e_k \rangle = \langle g(e_i), g(e_l) \rangle = \langle e_i, e_l \rangle = \delta_{il}$, siendo δ_{ij} las componentes de la delta de Kronecker.

Ahora, si $r = r_i e_i$ representa un vector arbitrario de R^n, se tiene que $g(r) = s = s_k e_k$ y de $(A^T s)_i = a_{ki} s_k =$ $= a_{ji} s_k \delta_{jk} = a_{ji} s_k \langle e_j, e_k \rangle = \langle a_{ji} e_j, s_k e_k \rangle = \langle g(e_i), g(r) \rangle = \langle e_i, r \rangle = r_i$ resulta que $A^T s = r$ de donde $g(r) = s = Ar$ por lo que $T(r) = Ar + T(0)$ completa la prueba.

La suficiencia es inmediata pues

$$d(T(r), T(s))^2 = [T(r) - T(s)]^T [T(r) - T(s)] = [G(r-s)]^T G(r-s) = (r-s)^T G^T G(r-s) = (r-s)^T (r-s) = d(r,s)^2 .$$

Nota 1. Este teorema le brinda al estudiante una útil caracterización de todos los posibles movimientos en R^n, a partir de la cual se pueden obtener aquellos, que satisfacen ciertas propiedades restrictivas. Por ejemplo, se puede ver que una transformación T, es un movimiento en R^n que deja fijo a O, si y solo si $T(r) = Gr \ \ \forall\, r \in R^n$ con $G \in O_n(R)$. En particular, estos son los movimientos de interés para introducir el concepto de campo central siguiendo el enfoque geométrico indicado por V.I. Arnold en página 29 de [1].

Proposición 1. Dado $r \in R^n$ existe una matriz $Q \in O_n(R)$ tal que el vector Qr tiene sus n -1 últimas coordenadas nulas.

Demostración: Usando la técnica de descomposición Q-R, que los estudiantes conocen de los cursos donde reciben métodos numéricos del álgebra lineal (ver, por ejemplo: página 363 en [5]), existe una matriz $Q' \in O_n(R)$ y un vector $r' \in R^n$, con las n -1 últimas coordenadas nulas, tales que $r = Q' r'$ lo que implica que $Q'^T r = r'$, por lo que basta considerar $Q = Q'^T$ para completar la prueba.

Corolario 1. Si dos vectores r, s $\in R^n$ tienen igual magnitud, o sea r = s, entonces existe R $\in O_n(R)$ tal que s = Rr.

Demostración: De la proposición 1, existen $Q_1, Q_2 \in O_n(R)$ tales que $Q_1 r$ y $Q_2 s$ tienen sus últimas n - 1 coordenadas nulas, y como $\| Q_1 r \| = \| r \| = \| s \| = \| Q_2 s \|$ resulta que $Q_1 r = Q_2 s$ ó $Q_1 r = -Q_2 s$ de donde se tiene que $s = Rr$ para $R = Q_2^{-1} Q_1$ o $R = -Q_2^{-1} Q_1$.

Corolario 2. Dado $r \in R^n$, existe $G \in O_n(R)$ tal que $r \in \mathrm{Ker}(I - G)$ y $\dim \mathrm{Ker}(I - G) = 1$.

Demostración: Se considera la matriz diagonal $B = (b_{ij})$, donde $b_{11} = 1$ y $b_{kk} = -1$, para $k = 2,..., n$. Note que $B \in O_n(R)$. Se verifica que $G = Q^{-1} B Q$ cumple lo deseado (donde la matriz Q es del tipo estudiado en la proposición 1). En efecto, $G \in O_n(R)$ por ser producto de matrices ortogonales, además se cumple que $(I - G)r = Q^{-1}(I - B)Qr = 0$ pues si $A = I - B$, entonces $AQr = 0$.

Finalmente, $\dim \mathrm{Ker}(I - G) = \dim \mathrm{Ker} A = n - \mathrm{rang} A = n - (n - 1) = 1$.

Teorema 2. (Caracterizaciones matemáticas de los campos de fuerzas centrales)

Para un campo vectorial de fuerzas $f : R^n \to R^n$, son equivalentes:

1) f tiene un potencial $U(\mathbf{r}) = U(r)$, que solo depende de r.

2) Existe una función real $k : R \to R$ tal que $f(\mathbf{r}) = k(r)\mathbf{r}$. .

3) f permanece invariante ante los movimientos en R^n que dejan fijo a O.

3') $f(G\mathbf{r}) = Gf(\mathbf{r}) \quad \forall G \in O_n(R) \quad$ y $\quad \forall \mathbf{r} \in R^n$.

Nota 2. La condición 3') no es más que la traducción al lenguaje matemático de la condición 3), teniendo en cuenta la Nota 1. La demostración asociada a la aplicación de los resultados previamente presentados es la correspondiente a la implicación de 3) para 2), sin embargo para que el trabajo sea auto-contenido incluiremos las ideas básicas de todas las demostraciones. A modo de complemento e integración con resultados del análisis matemático y sus aplicaciones, se puede sugerir a los estudiantes que repasen el enunciado y la demostración del teorema 1, página 205 de [6] lo que les permitirá reconocer, además, la equivalencia de las definiciones involucradas en este teorema 2 con la invarianza del trabajo realizado por el campo de fuerzas f, en abiertos simplemente conexos, y su repercusión en la ley de la conservación de la energía mecánica.

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2). Hallando el gradiente de $U = U(r)$ para obtener que $k(r) = -\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}(r)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Definiendo $U(r) = -\int_{r_0}^{r} k(\rho)\rho\, d\rho$.

2) $\Rightarrow$ 3´). Sea $G \in O_n(R)$ y $\mathbf{r} \in R^n \Rightarrow f(G\mathbf{r}) = k(\| G\mathbf{r} \|)G\mathbf{r} = k(\| \mathbf{r} \|)G\mathbf{r} = k(r)G\mathbf{r} = Gf(\mathbf{r})$.

3´) $\Rightarrow$ 2). Sea $\mathbf{r} \in R^n$ con $\mathbf{r} \neq 0$, tomando a G como en el corolario 2, es decir r = Gr, resulta que de $f(\mathbf{r}) = f(G\mathbf{r}) = Gf(\mathbf{r})$ se tiene que $\mathbf{r}, f(\mathbf{r}) \in \mathrm{Ker}(I - G)$ y como $\dim \mathrm{Ker}(I - G) = 1$ entonces existe $k'(\mathbf{r}) \in R$ tal que $f(\mathbf{r}) = k'(\mathbf{r})\mathbf{r}$.

Para probar que $k'(\boldsymbol{r}) = k(r)$ se consideran dos vectores $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in R^n$ tales que $r = s$, luego según el corolario 1 existe $R \in O_n(R)$ tal que $\mathbf{s} = R\mathbf{r}$ de donde $k'(\mathbf{s})\mathbf{s} = f(\mathbf{s}) = f(R\mathbf{r}) = Rf(\mathbf{r}) = k'(\mathbf{r})\mathbf{s}$ implica que $k'(\mathbf{s}) = k'(\mathbf{r})$ por lo que $k'(\mathbf{r}) = k(r)$.

COMENTARIOS

Este enfoque geométrico aquí presentado para introducir la definición de campo central le permite al estudiante, de licenciatura en matemática, palpar la integración entre importantes conceptos y técnicas de diferentes disciplinas de la carrera (geometría, álgebra, análisis matemático y análisis numérico). La caracterización matemática dada sienta las bases para posibilitarle el conocimiento de dos propiedades invariantes para los campos de fuerzas centrales (el trabajo y el momento angular) que les facilitará asociar la existencia de leyes de conservación (de la energía mecánica y del momento angular) a la de primeras integrales de las ecuaciones del movimiento de Newton y consecuentemente su integración en cuadraturas. Este último comentario les representa un aporte desde la mecánica al conocimiento de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

AGRADECIMIENTOS

A los profesores Ángela M. León Mecías y Alejandro Mesejo Chiong por sus valiosas sugerencias para mejorar la presentación de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] ARNOLD, V.I. (1989): **Mathematical methods of classical mechanics** (Second edition) Springer-Verlag, New York.

[2] LANDAU, L.D. and E.M. LIFSHITZ (1976): **Mechanics** (Third edition) Pergamon Press, New York.

[3] GOLDSTEIN, H.; C. POOLE and J. SAFKO (2000): **Classical Mechanics** (Third edition) Addison Wesley, San Francisco.

[4] SUSSMAN, G.J.; J. WISDOM and M.E. MAYER (2000): **Structure and Interpretation of Classical Mechanics**, MIT Press, Cambridge.

[5] HIGHAM, N.J. (1996): **Accuracy and Stability of Numerical Algorithms**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[6] FERNÁNDEZ MUÑIZ, J.L. y G. TORRE MOLNÉ (1984): **Análisis Matemático**. Tomo IV, Editorial Pueblo y Educación, La Habana.