Ciencias Matemáticas, Vol. 31, No. 2, Pag. 125-132, 2017
Recibido 04-2016

Elementos de Innovación Docente en la Mejora del Aprendizaje: El Impulsor Cualitativo y su Aplicación en la Resolución de Problemas en Matemáticas
Elements of Educational Innovation in the Improvement of the Learning: The Qualitative Instigator and their Application in the Resolution of Problems in Mathematics

Nelson Claudio Córdova Rosas[1]*, Ricardo Sánchez Casanova[2], Idania Urrutia Romaní[1]

Resumen Uno de los aspectos más importantes de la enseñanza de la Matemática y donde ocurre el mayor índice de decepción de los estudiantes es la resolución de problemas. Dentro de este contexto pedagógico se enmarca la realización de esta investigación que aborda el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, formulándose como objetivo a lograr, la aplicación de un nuevo elemento que contribuirá a mejorar la capacidad de resolver problemas de matemática. Este concepto se caracteriza principalmente en que el solucionador no tiene que necesariamente apegarse a un cúmulo de estrategias que no sabe, a priori, si le serán útiles a la hora de enfrentarse a un determinado problema. Este nuevo componente se genera a partir de la intuición de la propia persona y del problema en cuestión, donde el solucionador pone su atención, ya sea, a la estructura del problema, o a algún elemento interno que atrape su atención, pero que el considera relevante en la configuración del problema. Este nuevo elemento puede ser usado como elemento heurístico para encontrar caminos o vías de solución al problema. El cuál hemos denominado "Impulsor cualitativo".

Abstract One of the most important aspects in the Mathematics teaching and where it is bigger the index of the students' deception is that of the resolution of problems. Inside this pedagogic context the realization of this investigation is framed that approaches the process of teaching-learning of the resolution of mathematical problems, formulating you as objective to achieve, the application of a new element that will contribute to improve the capacity to solve mathematics problems. This concept is characterized mainly in that the solver doesn't have that necessarily to attach a priori to a heap of strategies that we do not know, if they will be we useful when facing a certain problem. This new one component it is generated starting from the own person's intuition and of the problem in question, where the solver puts its attention, either, to the structure of the problem, or to some internal element that catches its attention, but that it is outstanding in the configuration of the problem. This new element can be used as heuristic element to find roads or solution roads to the problem.

Palabras Clave
Resolución de problemas — Impulsor cualitativo — Solucionador — Problema

[1] *Universidad Técnica Federico Santa María, Ecuador–Chile, ncordova@usm.edu.ec*
[2] *Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba, ricardo.sanchez@matcom.uh.cu, idania@matcom.uh.cu*
***Autor para Correspondencia**

Introducción

La situación actual de la enseñanza de las Ciencias, y de la Matemática en particular en la ***Educación Superior del Ecuador***, presenta algunas características que es necesario se tengan en cuenta por los docentes con el fin de mejorarlas.

Desde esta perspectiva se asume que realizar un trabajo enfocado al desarrollo de ***la habilidad resolver problemas de Matemática***, es una actividad muy antigua y plurivalente que ha tenido su desarrollo a lo largo de los años, pero que a nuestro juicio, sigue necesitando de más investigación. Ya sea para la resolución de problemas del ámbito científico, como para la enseñanza de la Matemática en general.

El Ministerio de Educación de Ecuador a través de sus lineamientos generales para el bachillerato en Matemática

Superior propone que:

Los estudiantes requieren desarrollar su habilidad matemática, obtener conocimientos fundamentales y contar con destrezas que le servirán para comprender analíticamente el mundo y ser capaces de resolver problemas que surgirán en su ámbito profesional y personal y propone como eje integrador del área. Adquirir conceptos matemáticos que desarrollen el pensamiento lógico matemático y crítico para resolver problemas mediante la elaboración de modelos [9].

A propósito dentro del siglo XX en el mundo y con énfasis en Ecuador, irrumpieron paradigmas en respuesta a la necesidad de perfeccionar el proceso enseñanza–aprendizaje. Debido a que en esos años predominaba la enseñanza tradicional, autoritaria, memorística y sistema rígido.

El investigador Palacios [18], expresó sobre el proceso enseñanza– aprendizaje "es quien organiza la vida y las actividades, quien vela por el cumplimiento de las reglas y formas, quien resuelve los problemas que se plantean: el maestro reina en este universo pedagógico".

Consideramos que numerosos docentes descansan todavía su quehacer en este paradigma unos por tradicionalismo y otros para suplir la carencia de herramientas pedagógicas en la formación y desarrollo de habilidades.

Emergió luego el modelo conductista, el cual se arraigó vigorosamente en las aulas de la Educación Superior ecuatoriana hasta la actualidad. Según esta concepción, el aprendizaje se produce cuando hay un cambio en una conducta observable, negándose toda posibilidad causal-explicativa a los procesos internos de naturaleza mental.

Esto es, que la mente es una copia fiel de la realidad, este es el principio de correspondencia. "Al asumir este principio, es obligado, desde el conductismo, negar la eficacia causal de los estados mentales, por lo que el control de la conducta sigue en cualquier caso residiendo en el medio"[21].

Actualmente este paradigma es cuestionado porque ha presentado aspectos negativos traducidos en: que el alumno es visto como un ser pasivo aislado, cuya participación se encuentra fuertemente restringida por programas altamente estructurados. Investigadores como Fernández, R et al. [11], manifiestan que "las críticas al conductismo están basadas en el hecho de que determinados tipos de aprendizaje solo proporcionan una descripción cuantitativa de la conducta y no permiten conocer el estado interno en el que se encuentra el individuo ni los procesos mentales que podrían facilitar o mejorar el aprendizaje".

Los autores de esta investigación consideran que los modelos mencionados anteriormente han perdido efectividad decayendo su vigencia pues, no han sido de gran apoyo a la hora de resolver problemas, porque estos paradigmas debido a su concepción teórico-epistemológica objetivista, limitan al estudiante al explorar niveles superiores de procesamiento de la información y mucho más en el desarrollo de la creatividad.

El investigador Martínez, E. [16], postula que la esencia fundamental de la Matemática es la resolución de problemas. "Para las ciencias de la educación la resolución de problemas es importante desde el punto de vista de su enseñanza y aprendizaje y también un tema prioritario de estudio e investigación".

Esta habilidad sobre el cual muchos autores plantean diferentes significados y enfoques, entre ellos están Poincaré [20], Polya [22], Schoenfeld y muchos más, cada uno presenta un enfoque interesante propio sobre la investigación en resolución de problemas.

El análisis bibliográfico realizado por los autores, revela trabajos trascendentes en el ámbito de la resolución de problemas e incluso se evidencian estudios recientes que aportan presupuestos esenciales desde sus posiciones específicas. ***La situación problemática*** que se presenta es el sistema educativo universitario ecuatoriano, está reflejada principalmente en los estudiantes de la asignatura Matemáticas II de la Universidad Santa María Campus Guayaquil y se manifiesta a partir de las limitaciones didácticas que posee el docente a la hora de impartir su asignatura y por el bajo desarrollo de las habilidades matemáticas que presentan los alumnos.

Lo que provoca el no cumplimiento del objetivo general de la asignatura: *Iniciar la formación básica del estudiante en cálculo que posibilite la comprensión y aplicación de conceptos y técnicas a las ciencias económicas y de la ingeniería. Y que el estudiante sea capaz de desarrollar habilidades y destrezas operatorias en el planteo y resolución de problemas aplicados* [6].

A propósito, a través de diversas vías de constatación de lo anteriormente citado, entre las que se encuentran: encuestas, entrevistas a profundidad, así como resultados obtenidos producto de reuniones metodológicas dentro de la propia Universidad Santa María Campus Guayaquil, se han evidenciado insuficiencias tales como:

- Escasez de enfoques metodológicos colectivos, no se estimula el trabajo en equipos.
- Limitaciones en los docentes en la metodología enfocada a la resolución de problemas.
- Falta de sistematicidad de la enseñanza de resolución de problemas.
- Carencias en la preparación de los profesores, limitaciones en la aplicación de contenidos a problemas de economía de la vida real.
- Los alumnos presentan dificultad en materias de la especialidad a la hora de aplicar contenidos matemáticos
- Tendencia hacia el mecanicismo en los alumnos y docentes.

A partir del análisis teórico y empírico realizado, se devela una ***contradicción interna*** manifiesta en el hecho de que el docente no está preparado metodológicamente para enseñar a resolver problemas y los alumnos poseen bajo desarrollo cognitivo de las habilidades básicas para la resolución de problemas lo que influye que no se cumplan los objetivos de la asignatura relacionados con la aplicación y resolución de problemas.

A partir de estas insuficiencias y del estudio epistemológico realizado por los autores, se ha identificado el siguiente ***problema científico***: ¿Cómo contribuir a desarrollar la habilidad de resolver problemas de aplicación Matemática en los alumnos de primer año de la Universidad Santa María Campus Guayaquil en la asignatura Matemáticas II?

Esta investigación se plantea como ***objetivo*** elaborar una estrategia metodológica sustentada en un recurso heurístico denominado ***impulsor cualitativo*** que contribuya al desarrollo de la habilidad resolver problemas de aplicación del Cálculo Diferencial en la asignatura Matemáticas II en la Universidad Santa María Campus Guayaquil.

1. Desarrollo

Durante muchos años del pasado siglo XX, a partir del nacimiento de la era industrial y en un período posterior la incorporación masiva en el uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en todos los niveles, con ello el mundo se volvió más intolerante, queriendo que todas las cosas sean obtenidas más rápidamente y con menor esfuerzo.

Esta actitud adquirida por los individuos de los últimos tiempos ha afectado principalmente a la Educación en general y particularmente a la enseñanza de la Matemática, que por su propia naturaleza necesita, para desarrollar habilidades, que el estudiante de su mayor esfuerzo, no tan sólo al comienzo de un aprendizaje sino en todo el transcurso de la formación de su pensamiento matemático, que tiene como principales aliados al pensamiento reflexivo, crítico y por qué no un pensamiento creativo.

En realidad otro aspecto que ha influenciado la enseñanza de la Matemática ha sido el enfoque establecido por las distintas corrientes educativas que marcaron el siglo pasado y que están presentes todavía en las aulas educativas. Es importante destacar algunas de ellas como marco referencial, para entender la evolución de la enseñanza y en particular como se articula en este ámbito, la enseñanza de resolución de problemas en matemática. Algunas de ellas a las cuales haremos referencia tenemos: *el Conductismo, la corriente Gestalista, el Cognitivismo y el Constructivismo.*

El ***Conductismo*** define dentro de sus postulados: "toda conducta por compleja que sea, es reducible a una serie de asociaciones de o entre elementos simples"[12]. La concepción asociacionista del aprendizaje es la base fundamental del pensamiento conductista y sus implicaciones derivadas de esta forma de pensar, llegan a establecer que es posible asociar las variables que describen a los procesos mentales, con las otras variables que describen las conductas observables, casi unívocamente.

Uno de los objetivos principales del conductismo es hacer de la psicología una ciencia natural, y como tal, debería tener métodos que permitan observar y medir variables.

Según Vega, citado por Gangoso [12], expreso que la corriente conductista hace de la resolución de problemas un tratamiento superficial y confuso. La enseñanza consiste en resolver problemas "tipo", los que se aprenden ejercitando problemas similares, y mientras más ejercicios refuercen, mayor es la probabilidad de éxito.

Sin embargo esta tendencia guarda algunos aspectos positivos y existen unas primeras propuestas interesantes, por ejemplo, las que describen una secuenciación del proceso de resolución de problemas que, de alguna manera, contribuye como propuesta inicial en este ámbito.

El investigador Dewey, citado por Blanco [3], propuso seis etapas:

1. Identificación de la situación problemática.
2. Definición precisa del problema.
3. Análisis medios-fines. Plan de solución.
4. Ejecución del plan.
5. Asunción de consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Generalización.

Los autores consideran que los puntos 1 y 2 pueden como propone G. Polya [22] concentrarse en uno sólo, además, el punto 3 es claramente una estrategia asociacionista, ya que esta producción de hipótesis, obliga al estudiante a buscar diversas formas que él debiera conocer y que debiera utilizar para dar solución a un problema. Si bien es cierto, este procedimiento sirve en muchos casos, a aquel estudiante que tiene poco entrenamiento en utilizar estrategias de resolución, le juegue en contra a la hora de resolver problemas.

G. Polya [22], asociado por algunos autores, entre ellos Perales Palacios [19], a esta corriente asociacionista, en su libro como plantear y resolver problemas propone cuatro pasos para el proceso de resolución de problemas:

1. Comprensión del problema.
2. Elaboración de un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución planteada. (Visión retrospectiva)

Los autores de esta investigación comparten con Polya, en el número de pasos. Este no debe ser tan extenso que se torne tedioso, ni tan pequeño que quede incompleto. También se comparte la forma como el investigador Perales Palacios [19], presenta el primer paso del proceso: la comprensión del problema, donde se plantea preguntas que incitan al estudiante a pensar y participar de modo que comprenda mejor el problema, con preguntas tales como: "¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?" [22].

De hecho se comparte en esta investigación la propuesta de Polya [22], como un primer acercamiento a la práctica para desarrollar un buen desempeño en la resolución de problemas, sin embargo no estamos de acuerdo en su totalidad cómo presenta el punto de elaboración de un plan, porque este investigador apela demasiado a la memoria del estudiante, con preguntas tales como: "¿Se **ha encontrado** un problema semejante? ¿**Conoce** un problema relacionado con este?, mire atentamente a la incógnita y trate de **recordar** un problema que le sea familiar".

De esta forma ***el solucionador*** podría pasar mucho tiempo tratando de recordar y no plantear en definitiva el plan y producto de aquello, no resolver el problema en cuestión. Por desmotivación y frustración en el caso que el estudiante se esté iniciando en este campo.

Sin embargo la propuesta de Polya [22], es muy útil como metodología para trabajar en el aula, donde lo más relevante es el sistema de preguntas, que permiten orientar al estudiante para comprender y retener los elementos relevantes de los problemas, y un conjunto de estrategias heurísticas que permiten, sin lugar a dudas, resolver muchos problemas.

Otra corriente pedagógica que queremos mencionar e interesante para considerar en esta investigación, es la desarrollada por los psicólogos de la Gestalt. Su postura fundamental es el rechazo al atomismo conductista, cambiando principalmente las unidades de análisis, las cuales constituyen totalidades significativas.

Los autores consideran que esta concepción, en el proceso de resolución de problemas, se pretende hallar una comprensión estructural del problema, con el objetivo de encontrar relaciones que no se encuentran cuando se divide el problema en elementos más simples. Esto conlleva mediante análisis a una reorganización de todos los elementos de la situación problemática, de una forma ordenada, sistémica y más comprensible, de manera que, es más factible de ser resuelta.

En realidad los Gestalistas introdujeron el concepto de “pensamiento productivo” instaurando una diferenciación notable con el “pensamiento reproductivo”que es a juicio de los autores de esta investigación, base del pensamiento conductista. La diferencia radica en que este último, es un pensamiento mecánico, repetitivo y memorístico, en el cual intervienen, muy poco o casi nada, las operaciones mentales superiores.

Por su parte, en el pensamiento productivo están presentes el pensamiento transferencial, crítico y creativo, es en este tipo de pensamiento donde radica la potencialidad de la psicología de la Gestalt, siendo este su mayor aporte a la resolución de problemas. Esta corriente Gestaltista “evadió la responsabilidad de explicar las acciones que tienen lugar en el subconsciente. Ellos tenían profundas fisuras en el orden metodológico, pues su herramienta fundamental, la introspección, tendía a no ser confiable”[7].

Un descubrimiento interesante de los Gestalistas, es la “comprensión súbita.º Insight, en que los individuos son capaces de relacionar la resolución de problemas con la creatividad, y esta comprensión súbita, supone que el sujeto descubre un camino para determinar la solución y “este momento ocurre principalmente por una reorganización constructiva de los elementos del problema. Sin embargo no logran explicarse como ocurre”[12]

Sin embargo para que este momento mágico ocurra ellos no dan detalle, solamente apelan a una reorganización y reestructuración que les lleva a una mejor comprensión de la situación problemática.

El investigador Mayer [17], expreso que “la capacidad de captar como todas las partes del problema, encajan para satisfacer las exigencias del objetivo, implica reorganizar los elementos de la situación problemática y en consecuencia resolver el problema”.

Los autores consideran que este momento “insight“ es de alguna manera independiente de un análisis intencionado o dirigido intencionalmente por el sujeto y ocurre en un momento en que el solucionador no lo espera.

En esta investigación se propone una estrategia metodológica donde el solucionador busca un “elemento“ perteneciente al problema, ya sea de la misma estructura o un símbolo involucrado o de una representación del problema, principalmente que llame su atención, la cual le permitirá definir una estrategia relacionada con este elemento encontrado y un camino que le permita resolver el problema en cuestión, el cual no es único para cada problema necesariamente, y está determinado únicamente por el solucionador.

En cuanto a la corriente predominante durante muchos años y hasta hoy en día es la **psicología cognitivista**, surgida en los años 50. Psicólogos y educadores se alejaron del énfasis de las conductas observables y en su lugar confluyeron hacia procesos cognitivos más profundos, como el **pensamiento, la solución de problemas, la formación de conceptos y el procesamiento de la información**.

La teoría del procesamiento de la información se presenta como lo más representativo del cognitivismo y según Perales Palacios [19], interpreta el proceso de resolución de problemas, como una interacción entre el sistema de procesamiento de información del propio sujeto, el ambiente de la tarea y presume, que esta interacción produce en el que soluciona el problema, una representación mental denominada “espacio del problema”.

Aquí la analogía mente ordenador de la psicología cognitiva toma sentido y consiste “en concebir a ambos como sistemas de procesamiento del propósito general, ambos codifican, retienen y operan con símbolos y representaciones interna” [12].

Finalmente con raíces en la Psicología cognitiva surge el **Constructivismo** como una “teoría que equipara el aprendizaje con la creación de significados a partir de experiencias” [10].

En realidad en el constructivismo son factores importantes **el sujeto, las condiciones ambientales y su interacción entre ellos**, que es la fuente de donde se genera el aprendizaje. Existen posturas que manifiestan que a veces es necesario combinar posturas para alcanzar niveles más avanzados de conocimiento.

Por ejemplo, Ertmer citando a Jonassen [10], manifiesta que éste describe tres fases para la adquisición del conocimiento: introductorio, avanzado y experto. Indicando que la fase de conocimiento avanzado es, dentro del aprendizaje constructivo, la de mayor efectividad, porque puede contrarrestar prejuicios iniciales o malinterpretaciones adquiridas en la fase introductoria.

1.1 EL IMPULSOR CUALITATIVO

La propuesta de esta investigación, coincide en gran medida, con el constructivismo, y es el aspecto fundamental que proponemos donde el individuo crea su propio conocimiento, a partir de los elementos que lo rodean, es decir, su entorno. En la resolución de un problema que tiene solución, existen elementos o características propias del problema que lo conducen a ser un problema, estos elementos de alguna manera están relacionados con las variables del problema: un ***impulsor*** es un elemento que para ***el propio solucionador*** le significa un elemento clave que relaciona lo que él sabe, con una posible solución del problema, sus experiencias anteriores serán de gran ayuda para determinar un buen impulsor, incluso de acuerdo a como está su claridad mental en ese momento es muy importante a partir de allí crear y construir estrategias para solucionar el problema.

Los autores asumen que para secuenciar el proceso de resolución de problemas utilizaremos lo propuesto por Polya [22]: 1. Comprender el problema, 2.Concebir un plan, 3.Ejecución del plan y 4. Visión retrospectiva. Sin embargo afinaremos el paso 2 de la siguiente manera: ***Búsqueda de un impulsor cualitativo y concebir un plan.***

Para referirnos al estudio de la resolución de problemas y aproximarnos a la definición más universal, es necesario en primer lugar presentar, que se entiende por problema y que es resolver un problema.

Muchos autores han hecho sus contribuciones en esta área presentando definiciones que nos dan unan orientación y una visión de qué se considera un problema.

Coincidimos con el Investigador Gaulín [13], que declaraba "cuando hablo de problemas o situaciones problema, yo no hablo de ejercicios... de cosas rutinarias para practicar sino que hablo de situaciones donde hay que reflexionar, hay que buscar, hay que investigar..., donde para responder hay que pensar mucho".

Consideramos que un ejercicio para un cierto nivel del solucionador puede constituirse en un problema, en el caso que esa persona no conozca la vía de solución, ni los algoritmos necesarios para resolverlos, sin embargo utilizando sus capacidades pudiera llegar a solucionarlo.

El investigador Perales Palacios [19], da una interesante definición de problema y resolución de problema: Un ***problema*** es cualquier situación prevista o espontánea que produce por un lado, un cierto grado de incertidumbre y, por el otro una conducta tendente a la búsqueda de solución. Y por ***resolución de problemas*** es un proceso mediante el cual la situación incierta es clarificada e implica en mayor o menor medida la aplicación de conocimientos y procedimientos por parte del solucionador.

Los autores de esta investigación definen un problema: ***Como una situación que se le presenta a un individuo, el cual siente la necesidad de hacer algo respecto de esa situación, ya sea para mejorarla o solucionarla, porque en su concepción interna existe una contradicción acerca de esa situación que lo lleva a movilizarse. Sin embargo no sabe a priori cómo darle solución.***

En esta investigación cuando hablamos de resolución de problemas no estaremos pensando en problemas comunes en los que para su resolución sólo se necesita aplicar algoritmos conocidos, sino aquellos en que se ponen de manifiesto las capacidades mentales superiores para su resolución.

En realidad el ***impulsor cualitativo*** es un elemento que es susceptible de ser encontrado, en cada problema hay al menos uno, y es definido de acuerdo al criterio personal del solucionador. De hecho su característica proporciona un avance efectivo hacia la solución del problema.

Los autores de esta investigación definen el impulsor cualitativo como:
Cualquier símbolo, elemento, componente, cualidad o característica perteneciente a la estructura de un problema o a su contexto, que permite dar un salto cualitativo en la resolución del problema, siendo capaz de proyectar una o más vías de solución efectiva y clara.

1.2 APLICACIONES DEL IMPULSOR CUALITATIVO A PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

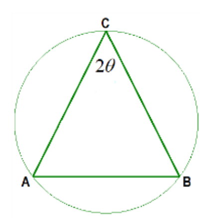
PRIMER EJEMPLO

En los "problemas"de Optimización en los cuales se pide encontrar el mayor rectángulo o triángulo que se puede inscribir en una circunferencia, o hallar el cono de mayor volumen inscrito en una esfera. Generalmente utilizamos una figura de análisis y dentro de ella un elemento que nos permite relacionar dos o más variables relevantes del problema.

El ***Impulsor Cualitativo*** tiene que ver con relacionar las dos o más variables que aparecen en la fórmula a optimizar, es decir, en este caso la búsqueda del impulsor cualitativo es trivial, puede ser una figura geométrica o la ecuación que rige dicha relación entre las variables relevantes del problema.

SEGUNDO EJEMPLO

Considera una circunferencia de radio R dado. Se inscriben en ella triángulos isósceles ABC. Con ángulo en c igual a 2θ. Calcula las dimensiones del triángulo de perímetro máximo en función del radio de la circunferencia.



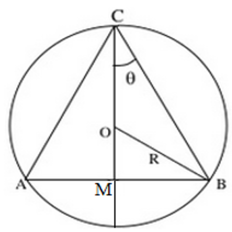
Solución:

PASO 1. COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA: Los datos del problema son los siguientes:

1. Triángulo isósceles, es decir lado $\overline{AC} = \overline{BC}$, y $< BAC =< ABC$
2. $< ACB = 2\theta$ del cual varía según el triángulo inscrito, por lo tanto es la variable del problema.
3. El radio de la circunferencia es R (valor dado).
4. Las incógnitas son las dimensiones del triángulo de perímetro máximo.

5. La idea es representar el perímetro del triángulo en términos de los datos dados R y θ para aplicar el proceso de optimización para hallar las dimensiones del triángulo que maximice el perímetro.

PASO 2A. BÚSQUEDA DE UN IMPULSOR CUALITATIVO: En este caso vemos que existe una simetría respecto al trazo CM de la figura, entonces nuestro impulsor puede ser **el triángulo** BMC que se forma con el trazo del vértice C hasta el centro del lado $\overline{AB}$. Notamos que $\overline{CM}$ es la mediana del lado $\overline{AB}$ y que relaciona elementos importantes tales como $BM = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y el ángulo θ, como falta relacionar el radio R, se introduce un radio desde el vértice B obteniendo la siguiente figura.



PASO 2B. DETERMINACIÓN DEL PLAN:

1. La estrategia es “determinar el perímetro en función de los datos R y θ utilizando las bondades del impulsor cualitativo”
2. Seguir los pasos para optimizar.

PASO 3. EJECUCIÓN DEL PLAN: Considerando el triángulo OMB: el ángulo $< MOB = 2\theta$ por ser la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco que ACB. En consecuencia: $\overline{MB} = 2R\sin 2\theta$, por lo tanto $\overline{AB} = 2R\sin 2\theta$.

Considerando el triángulo CMB:

$$BC = \frac{MB}{\sin\theta} = \frac{R\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2R\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2R\cos\theta \quad (1)$$

Luego el perímetro es:

$$P = \overline{AB} + 2\overline{BC} = 2R\sin 2\theta + 4R\cos\theta \quad (2)$$

Luego se siguen los pasos para determinar el máximo en la variable θ.

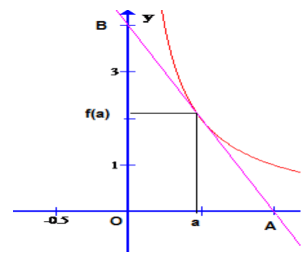
PASO 4. VISIÓN RETROSPECTIVA: Es importante saber claramente cuáles son los datos y cuál es la incógnita para buscar algún elemento que permita relacionarlos y considerarlos a todos sin dejar alguno afuera. Además queda clara la importancia de un gráfico representativo el cual permite visualizar todos los elementos involucrados en el problema.

El problema es muy interesante pues su solución no depende del radio de la circunferencia, ya que en toda circunferencia el triángulo isósceles de mayor perímetro que puede inscribirse es un triángulo equilátero, ya que la función $P(\theta)$ alcanza un máximo en $\theta = 30^o$.

TERCER EJEMPLO

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$ con $(a, f(a))$ perteneciente al gráfico de f ubicado en el primer cuadrante. Sean A y B puntos de la recta tangente a f en $(a, f(a))$. Demostrar que el área del triángulo OAB no depende del punto $(a, f(a))$.

PASO 1. COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA: Se da una función conocida como la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$ en el primer cuadrante, una recta tangente a la curva en ese cuadrante en el punto $(a, f(a))$, formando un triángulo rectángulo formado por los puntos A y B y los ejes coordenados, esto lo podemos visualizar en un gráfico para mejor comprensión:



PASO 2A. BÚSQUEDA DE UN IMPULSOR CUALITATIVO: En este caso el impulsor cualitativo es el triángulo rectángulo AOB, de hecho el triángulo encierra todos los elementos involucrados en el problema.

PASO 2B. DETERMINACIÓN DEL PLAN:

1. Debemos encontrar la ecuación de la recta y los puntos A y B.
2. Debemos calcular el área del triángulo AOB.
3. El objetivo se cumpliría al demostrar que el área es constante.

Creemos que estamos en buen camino porque estamos calculando elementos que están involucrados directamente en el problema.

PASO 3. EJECUCIÓN DEL PLAN: Primero encontramos la ecuación de la recta utilizando la derivada como la pendiente y hallamos luego los puntos A y B y posteriormente encontramos el área del triángulo

1. $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$
2. La ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + f(a)$
3. Si $y = 0$ entonces $x = f(a)\cdot a^2 + a$ así obtenemos $A = (f(a)\cdot a^2 + a, 0))$
4. Si $x = 0$ entonces $y = \frac{1}{a} + f(a)$, por lo tanto $b = (0, \frac{1}{a} + f(a))$
5. El área del triángulo OAB: $\Delta OAB = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \frac{1}{2}(f(a)\cdot a^2 + a)(\frac{1}{a} + f(a))$

Como $f(a) = \frac{1}{a}$ entonces $f(a)\cdot a = 1$ entonces tenemos:

$$\frac{1}{2a}f(a)\cdot a^2\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{2}f(a)\cdot a^2\cdot f(a) + a\frac{1}{a} + af(a) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + 1 + 1 = 2 \quad (4)$$

Por lo tanto como el área buscada es un valor fijo 2 y es independiente del punto elegido, concluimos la demostración.

PASO 4. VISIÓN RETROSPECTIVA: Vemos que cada paso es válido y correcto, siempre cual sea el punto que se elija el área será igual a 2. Esto es posible sólo para la función dada, que a su vez es derivable en todo punto de los reales menos el cero.

CUARTO EJEMPLO

Impulsores Cualitativos en ejercicios difíciles.

EJERCICIO	IMPULSOR CUALITATIVO
1.Determine el término independiente de x En el desarrollo de $\left(\frac{1}{x}+x+1\right)^{100}$	El impulsor cualitativo es el número 1
2.Calcule la integral $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx$	El impulsor cualitativo en primera instancia es la raíz y luego la "dificultad" de resolver la integral.

PROBLEMA 1. Determine el término independiente en el desarrollo de $(\frac{1}{x}+x+1)^{100}$

SOLUCIÓN: EL impulsor es el 1, el cual debe quedar como un término del binomio ya que

$$(1+(\frac{1}{x}+x))^{100}=\sum_{K=0}^{100}\binom{100}{k}1^{100-k}(\frac{1}{x}+x)^k \tag{5}$$

$$=\sum_{K=0}^{100}\binom{100}{k}(\frac{1}{x}+x)^k \tag{6}$$

Entonces se desarrolla el paréntesis utilizando la fórmula del binomio elevado a k:

$$\sum_{K=0}^{100}\binom{100}{k}(\frac{1}{x}+x)^k=\sum_{K=0}^{100}\binom{100}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x^{-1})^{k-i}x^i \tag{7}$$

$$\sum_{K=0}^{100}\sum_{i=0}^{k}\binom{100}{k}\binom{k}{i}x^{2i-k} \tag{8}$$

Ya que el término independiente es:

$$\sum_{K=0}^{100}\sum_{i=0}^{k}\binom{100}{k}\binom{k}{i}x^{2i-k} \tag{9}$$

El cual es un número cuando 2i – k = 0, es decir, 2i = k, Donde $0\le k\le 100$ es decir $0\le 2i\le 100$ o $0\le i\le 50$, en consecuencia el término independiente de x es $t_{ind}=\sum_{i=0}^{50}\binom{100}{2i}\binom{2i}{i}$.

PROBLEMA 2. Calcule la integral $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx$

SOLUCIÓN: El impulsor cualitativo son las raíces, lo que nos lleva a racionalizar para tratar de eliminarlas. Sea

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} \tag{10}$$

Entonces

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x-1}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \tag{11}$$

Pero racionalizando nuevamente obtenemos:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} \tag{12}$$

Quedando la integral de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}dx \tag{13}$$

la que pudiera ser resuelta por cambio de variable trigonométrico, pero el 1 a la derecha de la raíz complica su resolución, esto nos lleva a resolverla de otra manera, pues el dominio de integración se convierte en un nuevo impulsor cualitativo.

Vemos que

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} \tag{14}$$

es una función impar siendo integrada en el intervalo $[-1,1]$, por lo tanto la integral

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}dx=0 \tag{15}$$

2. Conclusiones

Los resultados obtenidos en el desarrollo de la investigación permiten a los autores plantear como conclusiones:

- Se hacen consideraciones teóricas y se define el impulsor cualitativo que sirve para aplicar a todo tipo de problemas, pero especialmente a problemas que no es suficiente resolverlo con entrenamiento, sino que el ingenio y la astucia del solucionador se ponen a prueba.
- Limitaciones en los docentes en la metodología enfocada a la resolución de problemas de aplicación del Cálculo Diferencial en la asignatura Matemáticas II.
- Las habilidades matemáticas tienen una estructura sistémica y la habilidad para resolver problemas constituye la expresión de lo esencial del contenido y guía el proceso de formación de las habilidades matemáticas básicas y elementales.

Referencias

[1] Armendáriz, M. V. G., Azcárate, C., Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Infancia y aprendizaje, 16* (62-63), 77-99.

[2] Ausubel, D. P., Novack, J. D., Hanesian, H. (1983). Psicología Educativa, ed. *Trillas: México.*

[3] Blanco, J. (1996). La resolución de Problemas. Una revisión teórica. *Suma 21*, 11-20.

[4] Campistrous, L. (1992). Enseñanza de la Matemática: reflexiones polémicas. *Luis Campistrous Pérez, Rizo Cabrera.–En Pedagogía, 95.*

[5] Castellanos, S., Vargas, J., Palacios, C. (2010). Desarrollo de competencias básicas por medio de la resolución de problemas: Un Estudio.126-155.

[6] Córdova, N. (2015).Syllabus de Matemáticas II . Universidad Santa María Campus Guayaquil, (págs. 1-5) Guayaquil Ecuador.

[7] Cruz, M. (2006). La enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. *Tomo I. La Habana: Educación Cubana.*

[8] Delgado, J. R. (1997). Las habilidades generales matemáticas. *Cuestiones de Didáctica de la Matemática.*

[9] Educación (2013). Lineamientos curriculares matemática Superior. Quito. Ecuador.

[10] Ertmer, P., Newby, T. (1993). Conductismo, cognitivismo y constructivismo: una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción. *Performance improvement quarterly, 6* (4), 50-72.

[11] Fernández, R., Server, P., Carvallo, E. (2006) Aprendizaje con nuevas tecnologías paradigma emergente. ¿Nuevas modalidades de aprendizaje? Resolución de problemas matemática y TIC. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa. Núm, 20.*

[12] Gangoso, Z. (1999). Investigaciones de resolución de problemas en ciencias. Texto de apoyo N. º3, (pp. 83-133). *Acta de la I escuela de verano sobre investigación en Enseñanza de las Ciencias, del programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las ciencias. Burgos.*

[13] Gaulin, D. C. (2000). Tendencias actuales en resolución de problemas. Palacio Euskalduna (págs. 1-13). Bilbao: sigma 19.

[14] Hernández, J., Socas, M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de reprensentación en Matemáticas. *Suma, 16, 82-90*.

[15] Martínez, M. (2003). Visión constructivista dinámica para la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, 21* (Extra), 043-55.

[16] Martínez, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En *Investigación en educación matemática XII* (p. 6). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

[17] Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.*

[18] Palacios, J. (1984). La cuestión escolar: críticas y alternativas. Palacios, J. Cuadernos de Pedagogía n. 39.

[19] Perales Palacios, F. (1993). La resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 11* (2), 170-178.

[20] Poincaré, H. (1908). *L'invention mathématique*.

[21] Pozo, J. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Ediciones Morata.

[22] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

[23] Ruiz, A., Carvajal, C. A., Araya, R. G. (2008). Conceptos, procedimientos y resolución de problemas en la lección de matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, (1).

[24] Schoenfeld, A. (1989). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. *Resnick, L. y Klopfer, L.(1989). Curriculum y Cognición. Buenos Aires: Aique.*