EL LEGADO DE JACOBO BERNOULLI A LA CIENCIA DEL CÁLCULO (UN RECONOCIMIENTO EN EL 300 ANIVERSARIO DE SU MUERTE)

Concepción Valdés Castro, Universidad de la Habana

RESUMEN
Jacob Bernoulli es uno de los matemáticos más sobresalientes del siglo XVII y además el institutor de una cultura matemática en su familia que la convirtió en una dinastía científica sin parangón en la historia. Junto a Leibniz y su hermano Johann contribuyó sustancialmente al desarrollo de la matemática de las magnitudes variables o *Nuevo Cálc*ulo como se le llamaba y lo aplicó con eficacia al estudio geométrico de las curvas y a problemas de la mecánica. Elaboró el primer método general para el estudio de problemas de optimización y con ello colaboró en el surgimiento del *cálculo de variaciones*. Lo que se considera su obra cumbre, el *Ars Conjectandi*, quedó inconclusa al morir el 16 de agosto de 1705, sin embargo, en ella nos legó la primera versión de lo que hoy conocemos como ley de los grandes números, generando la transformación en ciencia matemática del *cálculo de probabilidades*. A 300 años de su muerte escribimos este artículo como sencillo reconocimiento.

ABSTRACT
Jacob Bernoulli was one of the most prominent mathematicians of the XVIII century and the one that introduced mathematical culture in his family, that transformed it into a scientific dynasty without precedent in History. Together with Leibniz and his brother Johann, he promoted in a major way, the development of differential and integral calculus and its applications to geometrical research of curves and to solve mechanical problems. He developed the first general method of research into optimization problems, so he contributed to the birth of the Calculus of Variations. Jacob Bernoulli's most transcendental work *Ars Conjectandi* was incomplete at the time of his death, the 16 August of 1705, however, in this work Bernoulli accomplishes the first version of what today we know as the Law of Large Numbers, bringing *probability calculus* into mathematical science. 300 years after his death, we write this work as a modest acknowledgment to him.

1. INTRODUCCIÓN

Jacob Bernoulli nace en 1654 en el seno de una familia de comerciantes de la ciudad de Basilea. El deseo de su padre lo llevó a prepararse para la carrera eclesiástica, con este fin realizó estudios filosóficos, teológicos y de idiomas en la Universidad de Basilea. Se graduó con el grado de Magíster en Filosofía a los 17 años y 5 años más tarde era Doctor en Teología. Dominaba los idiomas alemán, francés, inglés, latín y griego. Pero Jacob sentía una gran inclinación hacia las Ciencias Matemáticas y a escondidas del padre estudiaba diferentes aspectos de estas ciencias sin maestro alguno y casi sin libros adecuados. Desde los 18 años ya resolvía correctamente algunos problemas difíciles de estas ciencias, en especial los relacionados con la astronomía.

Como era costumbre, al término de sus estudios comenzó Jacob Bernoulli un largo periplo de 4 años por Suiza, Francia e Italia. En esta época comenzó a llevar una libreta de notas donde incluía diferentes comentarios con carácter científico. Un lugar fundamental en estas notas lo ocupa la resolución de problemas matemáticos. Estas notas revelan cómo, de forma paulatina, Jacob se comenzó a interesar primero en los métodos matemáticos clásicos y más tarde quedó fascinado con los nuevos métodos del cálculo de los diferenciales de Leibniz, a cuyo desarrollo y perfeccionamiento contribuyó significativamente. También es posible conocer de su interés en las aplicaciones de la matemática y la época en que desarrolló sus ideas básicas plasmadas en el *Ars Conjectandi*.

Dos años después de su regreso a Basilea, Bernoulli viaja de nuevo, pero esta vez lo hace a Holanda e Inglaterra. En Amsterdam conoce a Huygens, el cual ejercerá una influencia enorme en su trabajo sobre cálculo de probabilidades. Como resultado de sus viajes, Jacob estableció relaciones con varios geómetras europeos de primera línea con los cuales mantuvo una amplia correspondencia durante toda su vida.

Su labor docente profesional se inició en 1683 cuando comenzó a enseñar Física Experimental en la Universidad de Basilea. En octubre de 1686 quedó vacante el puesto de profesor de matemáticas en la

Universidad de Basilea y como ya los éxitos de Jacob eran conocidos, el senado universitario, de forma unánime, lo eligió para este puesto. Es difícil que los asistentes a este acto modesto se imaginaran que eran testigos presenciales del comienzo de un hecho sin parangón en la Historia de las Matemáticas: desde ese instante la Cátedra de Matemática de la Universidad de Basilea sería ocupada ininterrumpidamente por un miembro de la familia Bernoulli durante más de 100 años. Aun más, los miembros de esta familia serían profesores de su Universidad natal ininterrumpidamente durante un cuarto de milenio, hasta el comienzo de la segunda mitad del siglo 20.

En el mismo año de su toma de posesión de la cátedra, Jacob Bernoulli leyó el trabajo pionero de Leibniz sobre el *Nuevo Método*, donde se publicaban por vez primera las ideas del ahora denominado *Cálculo Diferencial e Integral*, encontró ciertos resultados difíciles de comprender y le escribió a Leibniz pidiéndole aclaraciones. Leibniz estaba en un viaje de trabajo de forma que solo recibió la carta tres años después de ser escrita, cuando para Bernoulli la consulta no era en absoluto necesaria, pues no sólo lo había comprendido perfectamente, sino que ya había realizado sus primeros aportes al desarrollo de esta nueva rama de la matemática.

Uno de los episodios más significativos en la vida de Jacob Bernoulli ocurrió cuando su hermano menor Johann, comenzó a estudiar matemática bajo su tutoría. Johann, 13 años más joven que Jacob, al tiempo que estudiaba la carrera de medicina quiso que su hermano le enseñara a desentrañar los misterios de las matemáticas. Y así los hermanos, con su espíritu crítico y polemista, llegaron a dominar el cálculo diferencial e integral y a la vez, ellos mismos contribuyeron significativamente a su desarrollo. Esta relación fraternal enseguida devino en una agria rivalidad, la cual quedó plasmada inclusive en una revista científica como era el *Acta Eruditorum*.

Jacob Bernoulli realizó aportes significativos no solo al cálculo diferencial e integral, trabajó en todas las ramas de la matemática del siglo XVIII (excepto teoría de números): en geometría de curvas, probabilidades, series, ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones y mecánica y en todas fue de los pioneros.

Entre los años 1689-1704 escribió 5 memorias con el título general de *Proposiciones aritméticas acerca de las series infinitas* que fueron la primera guía que existió para el estudio de la teoría de las series. Jacob también realizó importantes trabajos en física, tales como la determinación del centro de oscilación de cuerpos sólidos y el cálculo de la resistencia de los cuerpos que se mueven en un líquido.

A pesar de sus aportes cruciales al desarrollo del Análisis Matemático, se considera que el trabajo de Jacob que ha tenido mayor trascendencia fue el *Ars Conjectandi* (Arte de las Conjeturas), publicado en Basilea en 1713 por su sobrino Nicolaus I, 8 años después de la muerte de su autor. Cuando muere Jacob Bernoulli, el trabajo estaba aún incompleto, no obstante, constituía una obra de gran significación para una nueva rama de las matemáticas que se estaba gestando en esa época: la teoría de las probabilidades.

En 1699 la Academia de París, por vez primera, eligió 8 miembros extranjeros y entre ellos estaban, además de Newton y Leibniz, los hermanos Jacob y Johann Bernoulli. Por su parte, al fundarse la Academia de Berlín también se eligió a ambos hermanos Bernoulli miembros extranjeros de la misma.

A fines del siglo XVII enfermó Jacob Bernoulli de tuberculosis y falleció, a los 50 años, el 16 de agosto de 1705.

2. APORTES DE JACOB BERNOULLI AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Uno de los problemas más acuciantes del siglo XVII era el estudio de las curvas. Los métodos desarrollados hasta el momento, fundamentalmente por Descartes y Fermat, permitían el estudio de las curvas algebraicas. Precisamente el objetivo de Leibniz cuando desarrolla su nuevo cálculo de los diferenciales es poseer un *método general* que permita el estudio de *todas las curvas*, tanto algebraicas como trascendentes. Este nuevo cálculo de diferenciales constituirá el arma principal de los hermanos Jacob y Johann Bernoulli cuando se deciden a estudiar las curvas y una amplia gama de problemas asociados con ellas.

El primer trabajo relacionado con el análisis de los infinitesimales publicado por Jacob Bernoulli fue en 1690 en el *Acta Erudirorum*. En él resolvió un problema que había sido propuesto por Leibniz tres años antes: *Encontrar la curva, situada en un plano vertical, según la cual un punto material desciende alturas iguales en tiempos iguales*.

Este problema había sido resuelto anteriormente por Leibniz y Huygens, pero la primera solución con el uso de los diferenciales fue dada por Bernoulli. Este artículo de Jacob sirvió para aclarar el alcance de la nueva metodología introducida por Leibniz, ayudó a establecer una opinión favorable sobre su alto grado de generalidad. Además, este trabajo es particularmente importante para la historia del cálculo, ya que la denominación *integral* aparece por vez primera con su significado actual de proceso inverso al de la diferenciación. Jacob concluye, proponiendo como reto a la maestría en el manejo del nuevo cálculo, el conocido como problema de la *catenaria*: *Encontrar la forma que toma una cuerda (o cadena) perfectamente flexible y homogénea por la acción sólo de su peso, si ella es fijada en sus extremos*.

Este era un viejo problema que los geómetras más eminentes de épocas anteriores no habían sido capaces de resolver satisfactoriamente. La forma que toma la cuerda o cadena tiene un gran parecido con una parábola y precisamente ésta fue la primera conjetura formulada por varios matemáticos, Galileo entre ellos. Después de lanzado el reto por Jacob Bernoulli, el problema fue resuelto geométricamente por Huygens y mediante el uso de los medios del cálculo infinitesimal por Johann Bernoulli y Leibniz. Huygens denominó a esta curva catenaria, del vocablo latino catena que significa cadena. Todas las soluciones fueron publicadas en el *Acta Eruditorum* durante el año 1691.

También se interesó Bernoulli por estudiar las espirales. Comenzó estudiando la llamada *espiral parabólica*, que él mismo introdujo, es decir la curva dada en coordenadas polares por $(p - a)^2 = 2ap\theta$, donde a y p son constantes. Para el estudio de esta curva, Jacob presenta por vez primera, aunque en forma embrionaria, una idea de lo que hoy conocemos como coordenadas polares. Además, Jacob elabora un método para construir las tangentes de esta curva, calcula el área de un sector de la misma y encuentra su punto de inflexión.

El problema de hallar la longitud de un arco de esta espiral condujo a Jacob a considerar la primera integral elíptica en la historia de la matemática. De manera que este trabajo fue un aporte importantísimo al perfeccionamiento del instrumento matemático recién creado por Leibniz.

Pero la espiral que recabó la mayor atención de Jacob fue la que actualmente se conoce como *espiral logarítmica*: $\rho = Ce^{k\theta}$, donde C es una constante cualquiera no nula. Era usual en la época que nos ocupa tratar de investigar las curvas lo más profundamente posible, intentar encontrar todos los elementos o curvas relacionadas con ellas que pudieran brindar información en cuanto a su forma, comportamiento y propiedades y que fueran potencialmente útiles en otros contextos de las Ciencias Matemáticas. Jacob Bernoulli analizó profundamente la espiral logarítmica y comprobó propiedades sorprendentes de esta curva: la evoluta es nuevamente una espiral logarítmica, también lo es la inversa con respecto al origen. Si se coloca una fuente de luz en el origen, entonces las cáusticas por reflexión y refracción son también espirales logarítmicas idénticas. (*Acta Eruditorum* junio 1691, mayo de 1692).

Esta propiedad extraordinaria, que tiene este tipo de espiral, de reproducirse bajo diversas transformaciones fue lo que motivó que Jacob la denominara *spira mirabilis* (espiral milagrosa) y ordenó que fuera colocada en la lápida de su tumba junto a la inscripción latina *Eadem Mutata Resurgo* lo que puede traducirse como: *Aún siendo modificada, resurjo*. Comentemos que tal vez debido a la ignorancia matemática del lapidario encargado de realizar la voluntad del difunto Bernoulli, la espiral que aparece grabada en su tumba es la de Arquímedes y no la logarítmica, como él había dispuesto.

Jacob Bernoulli estudió otras muchas curvas y este estudio contribuyó significativamente al desarrollo del naciente cálculo de los diferenciales. En particular se interesó por la curva que denominó *elástica* (1694, *Acta Eruditorum*, junio) y que puede describirse de la forma siguiente: Una barra se fija verticalmente en un extremo, un peso es colocado en el otro extremo de modo que este puede desplazarse horizontalmente. La curva es la forma que toma la barra bajo el efecto del peso. Bernoulli dedujo la ecuación diferencial de la elástica:

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$

donde a es la distancia horizontal entre los dos extremos de la barra. La solución la expresó mediante una construcción geométrica, equivalente a la fórmula analítica $ay = \int_0^x \frac{ax^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Bernoulli pudo haber escrito esta expresión, pero no lo hace, pues para él lo importante era poder construir la curva en forma geométrica.

Entonces analizó lo que se conoce como construcción por cuadratura, asumiendo sin explicación, que es posible determinar un rectángulo (ay) con área igual al área bajo la curva. También calculó el diferencial de arco de la elástica lo que le dio la posibilidad de encontrar la relación entre esta curva y la isócrona paracéntrica.

La *isócrona paracéntrica* la estudia Jacob en el mismo trabajo en que publica sus resultados sobre la elástica. Este problema lo había propuesto Leibniz en 1689 y consistía en: *encontrar la curva plana que describe un punto pesado P que se mueve de modo que su distancia a un punto fijo O varíe proporcionalmente al tiempo empleado al recorrer cada arco de dicha curva*. Para resolver este problema Jacob plantea la ecuación diferencial

$$\frac{d(ar)}{2\sqrt{ar}} = \frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}},$$

la cual resultaría complicada aún con los métodos desarrollados posteriormente.

En el lado derecho reconoció el diferencial de la longitud de arco de la elástica y así concluyó que podía dar una construcción por rectificación.

Algo después, en septiembre de ese mismo año, retomó Jacob la determinación de la isócrona paracéntrica y la describió haciendo uso de una curva que introdujo especialmente para ello: la que llamó *lemniscata* (teniendo en cuenta la palabra latina que describe su aspecto en forma de lazo) y que hoy conocemos como lemniscata de Bernoulli, la cual es una curva algebraica. Así que Jacob Bernoulli logró dar una solución del problema por rectificación de una curva accesible y, para las concepciones de la época, podía considerarse el problema resuelto.

Ambos métodos, la construcción "por cuadratura" y la construcción "por rectificación" eran métodos aceptados en la época, sin embargo los geómetras de entonces se inclinaban a considerar preferibles los últimos, por ejemplo, Leibniz opinaba que reducir un problema a la rectificación de una curva era mejor que reducirlo a una cuadratura, pues "la dimensión de una línea es más simple que la dimensión del plano".

En junio de 1696 el hermano de Jacob, Johann Bernoulli retó a la comunidad matemática a resolver el problema de la *braquistócrona*, añadiendo que "la curva era una bien conocida de los matemáticos". El problema se expresa como sigue: *Dados dos puntos A y B en un plano vertical, hallar el camino AMB por el que una partícula móvil M, descendiendo por su propio peso, iría de A a B en el menor tiempo posible*.

Aunque la curva solución al problema resultó una curva realmente muy bien conocida y apreciada por los matemáticos, la cicloide, la novedad del problema en sí era evidente: no se trata de encontrar puntos donde una curva tiene un máximo o un mínimo, sino que la misma incógnita buscada es una curva la cual debe minimizar cierta relación. Según palabras de Leibniz este tipo de problemas "*resulta muy bello y hasta el momento totalmente desconocido*".

Varios matemáticos resolvieron el problema de la braquistócrona: Newton publicó su solución (anónimamente) en el número de enero de *Phylosophical Transactions* de 1697, las soluciones de Johann, Jacob y L'Hôpital aparecieron todas en el número de mayo de 1697 del *Acta Eruditorum*. Sin embargo, el único que reconoció en este tipo de problemas un nuevo campo de investigación, fue Jacob Bernoulli. El trabajo en que Jacob resuelve el problema de la braquistócrona tiene especial interés para el futuro desarrollo de las Ciencias Matemáticas, lleva el original título *Resolución del* problema de mi hermano*, a quien yo a mi vez planteo otro.* El problema propuesto por Jacob es una generalización del antiguo *problema isoperimétrico*: *entre todas las curvas que tienen un mismo perímetro, encontrar aquella que encierra un área mayor.* Jacob enuncia su problema en los siguientes términos:

De entre todas las figuras de igual perímetro sobre la base común BN, determínese la curva BFN que aunque ella misma no contenga la máxima área, en cambio haga que sí la tenga otra curva BZN cuya ordenada PZ es proporcional a una potencia o raíz del segmento PF o del arco BF.

El enunciado del problema, Jacob Bernoulli lo acompaña de una retórica desafiante, de la cual puede deducirse la confianza que tenía en la generalidad y potencia del método por él elaborado. La respuesta de su hermano Johann fue inmediata y la realizó en un tono agresivo, sin embargo, la solución al problema isoperimétrico dada por Johann no resultó satisfactoria. Después de un enconado y nada fraternal debate, Jacob decidió, en junio de 1700, publicar en el *Acta Eruditorum* una nota titulada *La solución del problema isoperimétrico*, que fue seguida por el trabajo *Análisis del problema isoperimétrico general* (en el número de marzo de 1701 de la misma publicación), donde desarrolla su metodología.

Este trabajo de Jacob ejerció gran influencia en Euler cuando elaboró el primer método general de resolución de este tipo de problemas. Posteriormente Lagrange introdujo un nuevo procedimiento mediante la utilización del concepto de *variación*. La importancia de este concepto fue reconocida por Euler, quien bautizó a la nueva rama del análisis matemático como *Cálculo de Variaciones*. Es interesante notar que cuando se propone y resuelve el problema de la braquistócrona sólo habían pasado 13 años de la publicación del artículo de Leibniz que colocó la primera piedra en el futuro edificio del cálculo diferencial.

Entre los años 1689-1704 Jacob Bernoulli publicó 5 memorias con el título general de *Proposiciones aritméticas acerca de las series infinitas* que fueron la primera guía que existió para el estudio de la teoría de series infinitas. Estos trabajos tomaron la forma de tesis asignadas a sus estudiantes para la defensa y fueron publicados por su sobrino Nicolaus I como apéndice al *Ars Conjectandi*.

En estas memorias Bernoulli da varias demostraciones de la divergencia de la serie armónica, encuentra la suma de algunas series convergentes y demuestra la conocida como "desigualdad de Bernoulli": $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Para la serie de los inversos de los cuadrados de los números naturales solo probó que su suma era menor que 2, mediante comparación con la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n(n+1)}$, pero no pudo encontrar el valor exacto de la suma. Por ello escribió: "Si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora han eludido nuestros esfuerzos, nuestra gratitud será enorme". Este desafío lanzado por Jacob pronto se conoció como el problema de Basilea y fue resuelto por Euler, quien encontró $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Jacob dedica las últimas tres memorias a la aplicación de las series de potencias a los problemas de cuadratura y rectificación de curvas, es decir a la resolución de integrales para las cuales no era posible encontrar explícitamente una primitiva.

No son estos los únicos aportes de Jacob al Nuevo Cálculo, pero si aún quedan dudas de su talento y su indiscutible mérito como "calculista" pasemos a valorar su contribución al arte de las conjeturas.

3. JACOB BERNOULLI Y LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

Ya a fines del siglo XV aparecen enunciados claramente los primeros problemas que hoy asociaríamos al cálculo de probabilidades. Por ejemplo, en la obra de Lucas Pacioli *Suma de conocimientos de aritmé*tica, *geometría, relaciones y proporcionalidad* (1494), en la parte de la obra titulada *Problemas no Habituales* aparece enunciado el problema conocido como de la repartición equitativa de la apuesta: *Se realiza un cierto juego hasta 60 puntos y se hace una apuesta de 22 ducados. En razón de ciertas circunstancias, el juego no puede ser terminado y la apuesta debe ser repartida. En el momento de la suspensión, uno de los jugadores ha alcanzado la cifra de 50 puntos y el otro la de 30. ¿Cuál parte de la apuesta debe recibir cada contrincante?*

La primera solución correcta a éste y a otros problemas relacionados con el concepto de probabilidad va a aparecer en el conocido carteo entre Pascal y Fermat, en el cual muchos sitúan el origen de la ciencia de la probabilidad. En este intercambio epistolar ambos correspondientes van a exhibir soluciones correctas de los problemas considerados, no obstante, no se delimitará ninguno de los conceptos básicos de la teoría de probabilidades. Tanto Pascal como Fermat solo se limitan a calcular el número de casos posibles y favorables al suceso en cuestión, lo que, desde luego, constituye un paso importante para la posterior aparición del concepto de probabilidad.

En 1655 el holandés Christian Huygens viajó a París y conoció los problemas sobre los cuales trataba la correspondencia entre Pascal y Fermat. A su regreso a Holanda, Huygens se propuso encontrar él mismo la solución a estos problemas. Como resultado de su esfuerzo, escribió la obra titulada *De los razonamientos en los juegos de azar,* la cual fue publicada en 1657 como un apéndice al libro Estudios matemáticos de su maestro F. Van Schooten. Ésta fue la primera obra escrita relacionada con el cálculo de probabilidades y va a ejercer una influencia decisiva en Jacob Bernoulli.

Los problemas relacionados con la teoría de probabilidades Jacob Bernoulli los estudió durante los últimos 20 años de su vida. Se trazó una meta para suplir una necesidad urgente en su época: escribir un tratado que sirviera de manual sobre esta nueva rama de las matemáticas. Sin embargo, Jacob no pudo concretar las ideas fundamentales que lo animaban, así que su obra más importante *Ars Conjectandi*, estaba incompleta cuando muere su autor. Este trabajo solo se publicará en forma inacabada en 1713, 8 años después de la muerte de Bernoulli. Su sobrino Nicolaus I es quien se va a encargar de la edición de esta obra. En el prólogo al libro, Nicolaus I realizó un llamamiento a los matemáticos invitándolos a completar el trabajo iniciado por Jacob. Sin embargo los matemáticos que compartían estos intereses como De Moivre y Montmort declinaron la oferta.

A pesar de estar inconcluso, el *Ars Conjectandi* es considerado el trabajo más original de Jacob Bernoulli y una obra de gran significación para la Teoría de Probabilidades. Jacob comienza el libro con una reproducción significativamente comentada del trabajo de Huygens. En el trabajo de Huygens, la probabilidad aún no se destaca como un concepto objeto de investigación. En la época que nos ocupa, esta palabra era utilizada con diferentes acepciones, sin asignársele una definición precisa. En su libro, Bernoulli le dedica gran atención a este concepto.

Bernoulli divide su libro en cuatro partes, pero desde un punto de vista actual, podemos distinguir dos secciones muy bien diferenciadas. Las tres primeras partes, donde Jacob obtiene resultados importantes, pero que están estrechamente relacionadas con los problemas y métodos que ya en su época se discutían. Podemos decir que estas tres partes están escritas en el espíritu de Huygens y pueden considerarse como la culminación de la prehistoria en el desarrollo de la ciencia del azar. En la cuarta parte de su obra, Jacob rompe radicalmente con la temática tradicional, va a realizar consideraciones infinitesimales en el cálculo de probabilidades cuando enuncia y demuestra el teorema límite. Con este teorema y las ideas que en el se desarrollan podemos decir que comienza realmente la historia de la teoría de probabilidades.

La primera parte del *Ars Conjectandi* se titula *Apuntes sobre los posibles cálculos en los juegos de azar de Christian Huygens con notas de Jacob Bernoulli*. Jacob considera que la comprensión adecuada de estas primeras proposiciones resulta esencial para entender toda la obra.

La primera proposición es:

> *Si tengo iguales posibilidades de obtener a y b, entonces esto me vale* $\frac{a+b}{2}$.

Para aclarar la idea Jacob propone un ejemplo ilustrativo:

> *Supongamos que alguien oculta en una mano 3 monedas y en la otra 7. Dos personas indican cada una a diferentes manos y obtienen las monedas correspondientes a la mano señalada. Ambos conjuntamente obtendrán 10 monedas. Cada uno tuvo idéntico derecho al señalar las manos, así que la esperanza conjunta debe ser dividida a la mitad, o sea que la esperanza de cada uno es obtener 5 monedas. En el caso cuando en una mano haya a monedas y en la otra nada, la esperanza de cada uno será igual a a/2.*

De forma semejante, pero utilizando p + q urnas en lugar de las manos, argumenta la proposición:

> *Si el número de casos en los cuales se obtiene la suma a es igual a p y el número en los que ocurre la suma b es q y todos los casos pueden producirse igualmente, entonces el valor de la esperanza es* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

A continuación comienza el análisis de los problemas relacionados con la repartición equitativa de las apuestas. Bernoulli llama la atención acerca de que, en tales problemas, es necesario tener en cuenta, para los cálculos, sólo las partidas que están obligados a ganar cada uno de los jugadores para poder ganar el juego, y no tiene ninguna influencia el resultado de las partidas que ya transcurrieron. Después de un análisis detallado, concluye que cuando se tiene una apuesta de a unidades, al primer jugador le falta una partida y al segundo dos, la repartición equitativa (es decir, tomando en cuenta los posibles resultados si el juego hubiera continuado) es en la proporción 3:1, esto es, 3a/4 para el primero y a/4para el segundo. Si al primero le faltara una y al segundo tres partidas, entonces el primero debe recibir 7a/8 y el segundo a/8 y así sucesivamente. Y concluye en forma general: "si a mí me falta una partida y a mi oponente le faltan n, entonces mi parte de la apuesta y la de él deben relacionarse en la proporción de (2^n – 1):1".

También Bernoulli observa que podría pensarse que la proporción en el reparto de la apuesta deba ser la misma cuando lo es la proporción de partidas que cada jugador debe ganar. Sin embargo, esto no es así, por ejemplo, cuando las partidas que restan por ganar a cada jugador son respectivamente 2 y 4, el primero debe recibir 13a/16 y el segundo 3a/16. Pero si las partidas necesarias a cado uno fueran 3 y 6, entonces deberían obtener respectivamente 219a/256 y 37a/256. Es evidente que en el segundo caso al jugador que va ganando le corresponde una parte menor de la apuesta.

Señalemos la forma tan original que Bernoulli propone para aclarar la imposibilidad de aplicar el teorema de la suma de probabilidades cuando los sucesos son compatibles. Para ello pone el ejemplo:

> *"Si a dos individuos que merecen la pena de muerte se les indica que tiren los dados, con la condición de que aquél que obtenga menos puntos mantiene la pena y el otro, que obtuvo más puntos, conserva su vida y ambos conservan la vida, si obtienen el mismo número de puntos, entonces encontramos para la esperanza de uno 7/12..., pero de esto no debe concluirse que la esperanza del otro sea 5/12, ya que evidentemente ambas son iguales, luego el otro también debe esperar 7/12 de vida, lo que da para los dos 7/6 de vida, o sea más de una vida. La causa radica en que no hay ningún caso en que los dos deban morir y si hay varios casos en que ambos pueden quedar vivos*."

Para los problemas de repartición de las apuestas Huygens había propuesto las tablas correspondientes a 3 jugadores y comenta que para ello es necesario saber calcular el número de formas en que pueden obtenerse cierta cantidad de puntos con una cantidad de dados prefijada. Sobre esta nota Bernoulli comenta que la forma de contar los casos posibles es aburrida y larga, por lo que él propone una forma rápida y fácil de lograrlo para cualquier caso sin excepción. El resultado propuesto puede expresarse de la forma siguiente: el número de maneras de obtener m puntos en el lanzamiento de n dados es igual al coeficiente de x^m en el desarrollo de $(x + x^2 + x^3 +\ldots+ x^6)^n$. Esto, sin dudas, es un antecedente del uso de las funciones generatrices que se concreta explícitamente en la obra de Laplace.

Bernoulli generaliza el análisis del problema de la división de las apuestas al caso cuando un juego es no equitativo. Enunciemos más precisamente este tipo de problema:

> *Supongamos que se realiza un juego que consta de n partidas, de forma que en cada una el primer jugador tiene una probabilidad p de ganar y una probabilidad q = 1 - p de perder (y por lo tanto de que gane su contrincante). Queremos conocer* ***cuál es la probabilidad de que el primer jugador haya ganado k partidas del total de n jugadas***.

Este esquema es uno de los aportes cruciales de Jacob, que en su honor lleva el nombre de *esquema de Bernoulli*.

En la segunda parte expone Jacob los resultados sobre combinatoria conocidos hasta el momento, incluyendo sus propios resultados. En particular introduce los números que más tarde Euler denominó *números de Bernoulli*. En la tercera parte utiliza las herramientas desarrolladas en las dos primeras para resolver 24 problemas sobre juegos de azar que eran discutidos en la época.

Las tres primeras partes del Ars Conjectandi tienen un indudable valor, en ellas se asimilan de forma novedosa una serie de problemas estándares para la teoría de probabilidades. Estas partes constituyen un aporte esencial no solo a esta teoría sino a la Matemática en general. Sin embargo, la parte fundamental del *Ars Conjectandi* es la última e inconclusa, que Bernoulli titula *Applicationes Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis (Aplicación de la doctrina a cuestiones civiles, morales y económicas)*. Del título se infiere que en esta última parte, Bernoulli pretendía aplicar el arte de las conjeturas a la solución de problemas no vinculados con los juegos de azar, más concretamente, a problemas de tipo económico y social.

Nadie pone en duda la gran cantidad de aplicaciones que ha encontrado en nuestros días la teoría de probabilidades, tanto en las ciencias naturales y sociales como en la tecnología. Sin embargo, en el siglo XVIII resultaba difícil hacer un uso efectivo de las probabilidades en áreas de la actividad humana que no estuvieran relacionadas con los juegos de azar. Gran parte de las aplicaciones de los cálculos con probabilidades que se realizan actualmente están relacionados con la definición estadística de probabilidad, esta noción aparece por vez primera en esta parte del *Ars Conjectandi* y en gran medida está sustentada por la conocida como ley de los grandes números (así la llamaría posteriormente Poisson).

Sin embargo, en el siglo XVII la noción de probabilidad tenía una connotación filosófica y no matemática. La cuarta parte del Ars Conjectandi comienza con la aclaración de qué entiende su autor por probabilidad en un sentido matemático:

> *"Probabilidad es un grado de certeza y difiere de la certeza absoluta como una parte difiere del todo. Si, por ejemplo, el todo y la certeza absoluta – la cual designaremos por la letra a o por el símbolo de la unidad 1 – se supone que consiste en 5 probabilidades o partes, tres de las cuales favorecen la existencia o futura existencia de algún suceso, las dos restantes son contrarias a su existencia o futura existencia, este suceso se dice que tiene (3/5)a o 3/5 de la certeza."*

Más adelante define lo que entiende por el arte de las conjeturas y lo relaciona con la probabilidad:

> *"Ars conjectandi se define como el arte de medir lo más exacto posible la probabilidad de las cosas, para que en nuestros juicios o acciones podamos siempre elegir o seguir lo que será encontrado como lo mejor, más satisfactorio, moderado y razonable. En esta unidad se resume toda la sabiduría del filósofo y la prudencia del político."*

Bernoulli continúa esta parte realizando algunas consideraciones, de tipo filosófico, relacionadas con el azar. Su punto de vista era el denominado *determinista* y que más tarde se daría en llamar laplaciano (asociándolo así a la figura de Laplace):

> *"Es totalmente indudable que dada una posición de los dados, la velocidad y la distancia a la mesa en el momento en que se lanzan, éstos no pueden caer de otra forma que en la que en efecto lo hacen."*

A continuación Bernoulli explica por qué es difícil aplicar los cálculos con probabilidades a fenómenos que sean diferentes de los juegos de azar. Comenta que, cuando pueden contarse el número de casos y la frecuencia con que éstos aparecen en las pruebas, entonces es posible calcular la fuerza demostrativa de estas pruebas y la probabilidad correspondiente. Pero aparecen nuevas dificultades y aclara muy acertadamente:

> *"Toda la cuestión se reduce a que para hacer una suposición correcta sobre alguna cosa se hayan calculado exactamente, tanto el número de casos, así como determinado cuales de ellos pueden encontrarse más fácilmente que otros. Pero aquí encontramos un obstáculo, ya que sólo excepcionalmente es posible hacer esto y casi nunca se logra, excepto en los juegos que dependen del azar, los cuales, desde un inicio, los inventores se esforzaron por hacerlos equitativos, ellos fueron construidos de modo tal que es totalmente conocido el número de casos que conducen a ganar o a perder y ambos tipos de situaciones pueden encontrarse igual de fácil. En la mayoría de los fenómenos, que dependen o bien de la acción de las fuerzas naturales o bien de la voluntad libre de las personas no tiene lugar ni lo uno ni lo otro..."*

Seguidamente, Bernoulli comenta que

> *"en estos casos tenemos otro camino, y aquello que no es posible obtener a priori puede, al menos, obtenerse a posteriori, esto es, por múltiples observaciones de los resultados en ejemplos semejantes... Para tales razonamientos se necesita gran cantidad de observaciones... Aunque esto, naturalmente, es conocido de todos, la demostración construida sobre fundamentos científicos, en general, no es tan frecuente, por esto necesitamos exponerla. Precisamente se trata de investigar si, ante tal aumento del número de las observaciones, la probabilidad alcanzará realmente la relación entre el número de los casos bajo los cuales un cierto suceso puede ocurrir o no ocurrir..., es decir, si el problema tiene su asintótica,…"*

En el párrafo anterior podemos reconocer la definición de probabilidad a través de las observaciones estadísticas, es decir la que actualmente se conoce como *definición estadística de probabilidad*.

Veamos cómo enuncia Jacob Bernoulli su teorema fundamental:

"Supongamos que el número de casos favorables se relaciona al número de los no favorables exacta o aproximadamente como r es a s, o al número total de casos como r es a r + s o r es a t, esta relación se encuentra entre los limites (r + 1)/t y (r – 1)/t. Se quiere demostrar, que es posible realizar tal cantidad de experiencias, para que en cualquier número (C) de veces sea más probable que el número de las obeservaciones favorables caiga entre estos límites y no fuera de ellos, esto es que la relación entre las observaciones favorables y el numero total de todas ellas será no mayor que (r + 1)/t y no menor que (r – 1)/t."

La demostración que hace Bernoulli de este teorema es totalmente correcta, se basa en la consideración del término central en el desarrollo del binomio $(p + q)^n$. Además encontró un estimado del valor de N que es necesario tomar para satisfacer la desigualdad del teorema. Pero este estimado era bastante burdo y por ello, las comprobaciones prácticas que realizó lo llevaron a notar que el número real de experimentos necesarios era mucho menor que el proporcionado por su estimado. Tal vez esto hizo que no confiara demasiado en el resultado obtenido y fuera una de las razones por las que nunca se decidió a publicar sus investigaciones.

Posteriormente durante todo el siglo XVIII y parte del XIX se realizaron numerosos ensayos para verificar experimentalmente el teorema de Bernoulli, en especial con el lanzamiento de una moneda. Por ejemplo, en 1777 el naturalista francés G. L. Buffon realizó un experimento con el lanzamiento de una moneda. En un total de 4040 tiradas, escudo salió en 2048 ocasiones y cara en 1992. De modo que obtuvo una frecuencia de 0,507 para escudo y 0,493 para cara, las cuales están suficientemente próxima a 0,5.

El trabajo de Jacob Bernoulli abrió para la teoría de probabilidades un nuevo camino de desarrollo y la convirtió en una disciplina científica que utilizaba profusamente los métodos matemáticos, con una temática relacionada con aquellos fenómenos que dependen de la influencia de factores casuales y cuyas leyes pueden ser detectadas a través de observaciones reiteradas.

El primer resultado importante que da continuación a estas ideas lo obtuvo en 1733 A. de Moivre. El objetivo perseguido por De Moivre fue mejorar la forma en la que Bernoulli estimó el número de ensayos necesarios para asegurar que la frecuencia observada se aproxime a la probabilidad buscada. Para ello utilizó un desarrollo en serie de la integral de la función que ahora conocemos como *densidad normal*.

De Moivre demostró, para el caso p = ½, un resultado que posteriormente Laplace generaliza para cualquier p entre 0 y 1, y consiste en la estimación de la desviación de la frecuencia observada, X/N, respecto de la probabilidad p cuando se han realizado N pruebas independientes. En lenguaje actual, el teorema límite de Moivre-Laplace puede enunciarse como: Dados dos números a y b cualesquiera se tiene

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{a \le \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}} \le b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}\,dt, \text{donde } q = 1 - p.$$

Este tipo de resultado es lo que más tarde se denominó teorema central del límite y, que junto a la *ley de los grandes números*, constituye uno de los principales logros de la teoría de probabilidades en el siglo XVIII.

Los resultados de Bernoulli y De Moivre aclararon el concepto probabilidad mediante el descubrimiento, por medios analíticos, de teoremas que demostraban propiedades esenciales de este concepto. Estos teoremas límites no solo pusieron de manifiesto facetas desconocidas del concepto probabilidad, sino que sentaron las bases para su posterior aplicación a la ciencia, la tecnología y, tal como lo soñó Jacob Bernoulli, a las ciencias sociales.

Al respecto se expresan A.N. Kolmogorov y B. V. Gnedenko:

*"En una construcción formal de un curso de teoría de probabilidades, los teoremas límites se presentan como una clase de superestructura sobre los capítulos elementales, en los cuales todos los problemas tienen un carácter finito, puramente aritmético. Sin embargo, [...]**sin los teoremas límites** es imposible comprender el contenido real de los conceptos primarios de nuestra ciencia [....]. En efecto, todo el valor epistemológico de la teoría de probabilidades está basado sobre esto: que los fenómenos aleatorios masivos en su acción colectiva crean una regularidad estrictamente no aleatoria." (B. Gnedenko, A. Kolmogórov (1949)).*

A Jacob Bernoulli corresponde el enorme mérito de ser el primero en advertir la importancia de este punto de vista sobre la probabilidad y, como se infiere del título de esta cuarta parte, intuyó su especial relevancia en las aplicaciones. La muerte prematura de Jacob Bernoulli dejó inconclusa su obra cumbre, el Ars Conjectandi. Sin embargo, los tres siglos que nos separan de su muerte han confirmado definitivamente la confianza expresada por su sobrino Nicolaus I, cuando finaliza el prólogo con las siguientes palabras:

> *Esperamos, que en cualquier caso, estos principios generales, expuestos por el autor en los 5 capítulos de la última parte, serán útiles al lector para la resolución de muchas cuestiones particulares.*

REFERENCIAS

BERNHARDT, H. (1989): "La familia de matemáticos Bernoulli", En **Biografías de grandes matemáticos**. H. Wussing & W. Arnold. Prensas Universitarias de Zaragoza.

BOS, H.J.M. (1993): "Lectures in the History of Mathematics". **Amer. Math. Soc**.

CHABERT, J.L. (1993) : "Le problème brachistochrone". En **Histoires de problèmes. Histoire des Mathématiques**. I.R.E.M. Paris.

DASTON, L. (1995): **Classical Probability in the Enlightenment**, Princenton Univ. Press

GOLDSTINE, H.H. (1980): **A History of the Calculus of Variations**. Springer. New York.

HACKING, I (1971): "Jacques Bernoulli's Art of Conjecturing", **British J. Phil. Sci**. 22(3), 209-229.

HORMIGÓN, M. (1994): **Las matemáticas en el siglo XVIII**. Akal. Madrid.

MAISTROV, L.E. (1974): **Probability Theory: A Historical Sketch**, Academic Press.

MATHÚNA, D. Ó (2000): **The Bernoulli Project**. Dungaldan Press. Dundalk, Ireland.

NIKIFOROVSKII, V.A. (1984): **Los grandes matemáticos Bernoulli**. Moscú. (en ruso)

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. y C. VALDÉS CASTRO (2001): **Los Bernoulli. Geómetras y viajeros**, Nivola, Madrid.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. y C. VALDÉS CASTRO (2004): **De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo**, Nivola, Madrid.

SHAFER, G. (1996): "The significance of Jacob Bernouilli's Ars Conjectandi for the philosophy of probability today", **J. Econom**. 75(1), 15-32.

STRUIK, D. (1969): **A Source Book in Mathematics**. Harvard Univ. Press. Cambridge.

En el sitio http://gallica.bnf.fr/ aparecen los números de las *Acta Eruditorum* correspondientes a los años 1691-1702, donde pueden consultarse la mayoría de los artículos de Jacob Bernoulli citados en este trabajo.