Ciencias Matemáticas, Vol. 32, No. 1, Pag. 31-35, 2018
Recibido 09-2017

Estratificación e inclinación en ciertas álgebras de tipo A_n equiorientada
Tilting Theory and Stratification in certain algebras of type A_n equioriented

José Armando Vivero González[1], José Fidel Hernández Advíncula[2]

Resumen En el marco del estudio de los sistemas estratificantes y las álgebras cuasi-hereditarias es bien conocido el teorema de la correspondencia, que asocia a una estratificación su módulo característico de una forma esencialmente única. En este trabajo nos interesamos por el problema inverso, o sea, si dado un módulo inclinante T existirá un orden de los simples tal que el álgebra sea cuasi-hereditaria y T su módulo característico. Estudiamos en particular las álgebras A_n equiorientadas con relación $rad^2 A_n = 0$, llegando a la conclusión de que en este tipo de álgebras la correspondencia es biunívoca.

Abstract In the study of stratified systems and quasi-hereditary algebras it is well known that to each stratification is associated an essentially unique tilting module called characteristic module. In the present work we are interested in the inverse problem, i.e. given a tilting module T, is it possible to find an ordering of the simples such that the algebra becomes quasi-hereditary and T is the characteristic module? We studied algebras of type A_n equioriented, bounded by $rad^2 A_n = 0$, getting to the conclusion that in this case there is a one-to-one correspondence.

Palabras Clave
álgebra cuasi-hereditaria — módulo inclinante — módulo característico

[1] *Departamento de Matemática, Universidad La Habana, Cuba, jvivero@matcom.uh.cu*
[2] *Departamento de Matemática, Universidad La Habana, Cuba, fidel@matcom.uh.cu*

Introducción

En las últimas décadas la teoría de representaciones de álgebras asociativas se ha desarrollado de manera vertiginosa, sus ramificaciones y aplicaciones alcanzan a muchas ramas de la matemática, desde la topología hasta la teoría de números. Sus interacciones con la física, en particular a través de la teoría de representaciones de álgebras de Lie, han sido muy fructíferas, siendo un tema de investigación de gran impacto en la actualidad.

En este desarrollo ha jugado un papel central la llamada teoría de inclinación, principalmente debido a los trabajos de Brenner y Butler [13] por un lado y por el otro los aportes fundamentales de Happel y Ringel [3]. Esta teoría ha sido crucial para entender la categoría de módulos sobre ciertos tipos de álgebras como son las hereditarias, las inclinadas y más recientemente las álgebras de conglomerado.

En general la teoría de inclinación trata la comparación entre la categoría de módulos sobre un álgebra A y la categoría de módulos sobre $End\,T$, siendo T un A-módulo inclinante [2], [6].

En este trabajo nos alejamos de este enfoque, concentrándonos en la propiedad de un inclinante de ser módulo característico. Es conocido de [11] que entre las álgebras hereditarias las únicas que cumplen que todo inclinante es característico son las de tipo A_n equiorientada. Nos propusimos entonces estudiar las álgebras A_n equiorientadas, pero imponiendo la relación $rad^2 A_n = 0$. Fue posible mostrar que para estas álgebras existe una biyección entre módulos inclinantes básicos y órdenes de los simples para los cuales es cuasi-hereditaria, dando una respuesta afirmativa a la pregunta de si todo inclinante es característico.

1. Módulos Inclinantes Generalizados

El estudio de los módulos inclinantes, conocido en la literatura como teoría de inclinación, está encaminado a la comparación entre las categorías de módulos finitamente generados sobre una cierta $k-$álgebra A y el álgebra de endomorfismos de uno de sus módulos inclinantes. Esta teoría puede pensarse como una generalización de la teoría de Morita, mediante la cual es posible establecer una equivalencia entre las categorías $mod\,A$ y $mod\,B$ donde $B = End(P)$ y $P = \oplus_{i=1}^{n} P_i$, siendo P_i un representante de cada isoclase de proyectivos indescomponibles. Este módulo P llamado progenerador es el modelo para definir la noción de módulo inclinante, con la que es posible demostrar un resultado clave en teoría de representaciones llamado Teorema de Inclinación o de Brenner-Butler [6], [2], [5].

La noción de módulo inclinante de la que acabamos de hablar ha sido generalizada en varias direcciones [7], [10]. A lo largo de este trabajo se entiende por módulo inclinante (generalizado) T a un módulo que satisfaga la siguiente

Definición Un $A-$módulo T se dice inclinante si

(i) $dp(T) = n$.

(ii) $Ext^i(T,T) = 0$, para $i \geq 1$.

(iii) $|T| = |A|$.

Recordamos que $|M|$ denota el número de sumandos directos indescomponibles de M no isomorfos entre sí. En lo que sigue vamos a trabajar con álgebras de dimensión global finita, luego la condición (i) quedará tácitamente verificada. Para la condición (iii) basta tomar el número de sumandos directos igual al número de simples no isomorfos. La única condición que tal vez se dificulta un poco es la segunda y para analizarla usamos la definición de $Ext^i(M,N)$, su propiedad de aditividad como funtor en ambas variables y el hecho de que $Ext^i(P,-) = 0$ y $Ext^i(-,I) = 0$, donde P e I denotan un módulo proyectivo e inyectivo respectivamente. Veamos un ejemplo que además nos va a servir para ilustrar el resultado final.

Sea el álgebra A_3 equiorientada y la relación $rad^2 A_3 = 0$, la cual se representa mediante el carcaj

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \quad \text{con la relación } \ \alpha\beta = 0.$$

Los módulos indescomponibles son fáciles de describir y su carcaj de A-R viene dado por

$$\begin{tikzcd}
 & P_2 \arrow[dr] & & & \\
S_3 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_2 \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_1 \\
 & & & P_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Como no puede haber dos sumandos directos de T que sean los extremos de una sucesión de A-R, pues $Ext^1(\tau^{-1}M,M)$ no sería cero, los candidatos a ser módulo inclinante son $T_1 = S_3 \oplus P_2 \oplus P_1$; $T_2 = S_3 \oplus P_2 \oplus S_1$; $T_3 = S_3 \oplus P_1 \oplus S_1$; $T_4 = P_2 \oplus S_2 \oplus P_1$ y $T_5 = P_2 \oplus P_1 \oplus S_1$.

De ellos hay dos que son inclinantes: T_1 que es el trivial (progenerador) y T_4 pues es un módulo APR. Otro inclinante es T_5 y para ver esto notemos que, como P_1 y P_2 son proyectivos e inyectivos y en virtud de la aditividad del funtor de extensión, basta analizar $Ext^i(S_1,S_1)$. Tomemos entonces la siguiente resolución proyectiva de S_1

$$0 \to S_3 \to P_2 \to P_1 \to S_1 \to 0.$$

Luego de aplicar el funtor $Hom(-,S_1)$ se obtiene el complejo

$$0 \to H(S_1,S_1) \to H(P_1,S_1) \to H(P_2,S_1) \to H(S_3,S_1) \to 0,$$

donde $H(M,N) = Hom_A(M,N)$. De la sucesión anterior se infiere que $Ext^i(S_1,S_1) = 0, \forall i > 0$.

Los dos módulos que restan T_2 y T_3 no son inclinantes pues $Ext^2(S_1,S_3) \neq 0$. Al igual que para el ejemplo anterior, tomamos la misma resolución proyectiva, pero aplicamos el funtor $Hom(-,S_3)$ para obtener el complejo

$$0 \to Hom(P_1,S_3) \to Hom(P_2,S_3) \to Hom(S_3,S_3) \to 0.$$

Como $Hom(P_2,S_3) = 0$ y $Hom(S_3,S_3) \cong k$ esta sucesión no puede ser exacta en el tercer término, luego $Ext^2(S_1,S_3) \neq 0$ y por tanto ni T_2 ni T_3 son módulos inclinantes.
Podemos concluir que para esta álgebra hay solamente tres módulos inclinantes básicos (sus sumandos directos no son isomorfos entre ellos).

2. Algebras Cuasi-Hereditarias

Comenzamos dando la definición y comentaremos algunas nociones básicas sobre álgebras cuasi-hereditarias. Aunque existen varias maneras equivalentes de definirlas y mucha literatura sobre ellas y sus generalizaciones [1], [9], [12] nos conformaremos con una exposición básica y sucinta, pero completamente suficiente para nuestras necesidades.

Sea A un álgebra de artin y $S_1,\ldots,S_n$ un orden prefijado de los módulos simples. Consideremos sus cubiertas proyectivas $P_1,\ldots,P_n$ y sus envolturas inyectivas $I_1,\ldots,I_n$. LLamaremos **módulo estándar** asociado a S_i y lo denotamos por Δ_i al máximo cociente de P_i cuyos factores de composición S_j cumplen que $j \leq i$. Sea $\Delta = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\}$, denotamos por $F(\Delta)$ a la clase cuyos objetos son los módulos M que poseen una **filtación estándar**, quiere decir que existe una cadena de submódulos $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ tal que cada cociente M_i/M_{i-1} es isomorfo a algún Δ_i, para todo $i = \overline{1,n}$.

El álgebra A se dice **estándarmente estratificada (EE)** si cada proyectivo está contenido en $F(\Delta)$ y es **cuasi-hereditaria (CH)** si además para todo módulo estándar Δ_i cada factor de composición S_j ocurre solo una vez. Una condición que caracteriza las álgebras cuasi-hereditarias entre las estándarmente estratificadas es que su dimensión global es finita. Como ya se dijo antes trabajaremos con álgebras que cumplen esta última propiedad, por lo tanto en lo que sigue todas las álgebras EE serán cuasi-hereditarias.

Es preciso no perder de vista que esta definición depende del orden de los simples, por lo que es posible que una misma álgebra sea EE para un orden y no lo sea para otro. Es posible incluso que varios órdenes tengan asociado el mismo conjunto de módulos estándares y por tanto definen la misma clase $F(\Delta)$. A dos estratificaciones que cumplan esta última relación se les llamará equivalentes.

Para ilustrar estas definiciones retomemos el álgebra de la sección anterior, cuyo carcaj con relaciones es el siguiente

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \ , \ \alpha\beta = 0.$$

En este análisis suele ser más útil representar los módulos por sus sucesiones de Loewy [6]:

$$P_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}, \quad P_2 = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}, \quad P_3 = 3.$$

Esta es un álgebra de Nakayama [5], luego cada módulo tiene una única serie de composición, que es precisamente la serie radical, por tanto $\{0\} \subset S_2 \subset P_1$ es la serie de composición de P_1. Sus factores de composición son S_1 y S_2 y sus cocientes son P_1 y S_1. Con la notación usada puede verse que en el caso de P_2 sus factores de composición son S_2 y S_3 y sus cocientes P_2 y S_2.

Con esto podemos comenzar a chequear cada uno de los seis órdenes de los simples para ver en cuáles el álgebra es EE:

(1) Sea el orden $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$. Los módulos estándar son $\Delta_1 = S_1, \Delta_2 = S_2, \Delta_3 = S_3$. Del párrafo anterior tenemos que $P_i \in F(\Delta)$ para $i = 1, 2, 3$. Luego en este orden el ágebra **es EE** y además $F(\Delta) = mod A_3$.

(2) Sea el orden $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_2}\}$. Los módulos estándar son $\Delta_1 = S_1$, $\Delta_3 = S_3$, $\Delta_2 = P_2$. Con este orden el álgebra **no es EE** porque $P_1 \notin F(\Delta)$.

(3) Sea el orden $\{\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_3}\}$. Los módulos estándar son $\Delta_2 = S_2$, $\Delta_1 = P_1$, $\Delta_3 = S_3$. Con este orden el álgebra **es EE** pues cada proyectivo tiene una filtración con cocientes en Δ.

(4) Sea el orden $\{\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1}\}$. Los módulos estándar son $\Delta_2 = S_2$, $\Delta_3 = S_3$, $\Delta_1 = P_1$. En este orden también **es EE**.

(5) Sea el orden $\{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$. Los módulos estándar son $\Delta_3 = S_3, \Delta_1 = S_1, \Delta_2 = P_2$. En este caso vuelve a suceder que $P_1 \notin F(\Delta)$, por tanto el álgebra **no es EE**.

(6) Sea el orden $\{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1}\}$. Los módulos estándar son $\Delta_3 = S_3, \Delta_2 = P_2, \Delta_1 = P_1$. Otra vez el álgebra **es EE** y $F(\Delta) = proj A_3$.

Hemos visto que hay 4 órdenes para los cuales el álgebra es EE, aunque (3) y (4) definen los mismos módulos estándar, luego son equivalentes.

2.1 Módulos Característicos

A continuación veremos qué relación existe entre las álgebras cuasi-hereditarias y los módulos inclinantes. El siguiente teorema [8] nos será de gran utilidad.

Teorema 1 Sea $(A, \preceq)$ un álgebra EE.
Entonces existe un módulo inclinante T, único salvo isomorfismo, tal que $add\,T = F(\Delta) \cap Y(\Delta)$, donde $Y(\Delta) = \{Y \in mod A : Ext^1(F(\Delta), Y) = 0\}$.

Este módulo T es llamado módulo característico y cumple propiedades deseables que hacen que se justifique su nombre. Es oportuno señalar que para dos estratificaciones equivalentes, el módulo característico asociado a cada una difiere solamente en el orden de los sumandos directos.

Teorema 2 Sea A una k-álgebra y $\preceq$ un orden de los simples tal que el álgebra es EE. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.

(i) Para cada $i \in [1, n]$ existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Delta_i \longrightarrow T_i \longrightarrow X_i \longrightarrow 0.$$

donde $X_i \in F(\{\Delta_j\} : j < i)$.

(ii) El conjunto $\{T_i\}$ está formado por módulos indescomponibles y el módulo característico asociado a $(A, \preceq)$ es $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$.

Retomemos el ejemplo del álgebra A_3 con la relación $rad^2 A_3 = 0$. Ya sabemos que tiene tres inclinantes y cuatro órdenes para los que es EE, pero dos de ellos son equivalentes, luego tienen asociado el mismo módulo característico. De esta forma tenemos para esta álgebra una correspondencia biunívoca entre órdenes para los cuales es EE, salvo equivalencia, y módulos inclinantes no isomorfos. Podemos incluso aplicar el teorema anterior y saber a qué orden corresponde qué inclinante.

- Para el orden (1) tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{gathered} 0 \to \Delta_1 = S_1 \to S_1 \to 0, \\ 0 \to \Delta_2 = S_2 \to P_1 \to S_1 \to 0, \\ 0 \to \Delta_3 = S_3 \to P_2 \to S_2 \to 0, \end{gathered}$$

  En la segunda sucesión $S_1 \in F(\Delta_1)$ y $S_2 \in F(\Delta_1, \Delta_2)$. Luego $T_1 = S_1 \oplus P_1 \oplus P_2$ es el módulo inclinante asociado.

- Análogamente para el orden (3) se obtiene el módulo $T_3 = S_2 \oplus P_1 \oplus P_2$ y para el (4) tenemos el módulo $T_4 = S_2 \oplus P_2 \oplus P_1$. Es fácil ver que $T_3 \cong T_4$, lo cual se desprende del hecho de que ambos órdenes son equivalentes.

- En el caso de (6) puede comprobarse que su módulo característico es $T_6 = S_3 \oplus P_2 \oplus P_1$, que es el progenerador.

No siempre la correspondencia anterior es uno a uno. Por ejemplo el álgebra de Kronecker $1 \rightrightarrows 2$ tiene infinitos inclinantes [5] y solo dos órdenes para los simples.
Otro ejemplo de que esta correspondencia puede ser muy variada es el álgebra dada por $1 \rightleftarrows 2$ con la relación $rad^2 A = 0$, la cual no es estándarmente estratificada en ningún orden y solo tiene al inclinante dado por la suma de los proyectivos indescomponibles.

En la siguiente sección vamos a profundizar un poco más sobre la naturaleza de esta correspondencia para ciertos tipos de álgebras.

3. Álgebras de tipo A_n equiorientada con la relación $rad^2 A_n = 0$

En esta sección vamos a investigar cómo se comporta la correspondencia entre estratificación e inclinación en las álgebras dadas por

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \ , \ rad^2 A_n = 0.$$

Antes de comenzar explicaremos por qué estudiar esta clase de álgebras en particular. Notemos primeramente que es un álgebra no hereditaria, lo que pudiera conducirnos a pensar cómo es la correspondencia en este último caso. Está demostrado en [11] que entre las álgebras hereditarias de tipo representación finita las únicas que cumplen con la propiedad de que cada inclinante es característico son las de tipo A_n equiorientada. En cualquier otra es posible construir un módulo inclinante que no tenga sumandos directos simples y por tanto no sea característico.

Lo primero que haremos será estudiar los módulos indescomponibles sobre una cualquiera de estas álgebras, a fin de cuentas son los bloques con los que se construyen los inclinantes. Es posible escribir los proyectivos indescomponibles usando las sucesiones de Loewy

$$P_1 = \frac{1}{2},\ P_2 = \frac{2}{3},\ \ldots,\ P_n = n$$

Todos los proyectivos excepto P_n son inyectivos, así como S_1. Luego esta álgebra tiene $2n-1$ indescomponibles y el espacio vectorial de los homomorfismos entre dos cualesquiera de ellos es bien cero o isomorfo al cuerpo k. Para este tipo de álgebras el carcaj de Auslander Reiten toma la forma

$$\begin{tikzcd}
 & P_{n-1} \arrow[dr] & & & & & & P_1 \arrow[dr] & \\
S_n \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_{n-1} \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & (\cdots) \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & S_1 \\
 & & & P_{n-2} \arrow[ur] & & P_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Una inspección cuidadosa de este carcaj nos permite darnos cuenta de que cada inclinante tendrá entre sus sumandos directos indescomponibles al menos un simple. Podemos de hecho ir más allá y demostrar lo siguiente.

Proposición 1 Sea $T = \bigoplus_{k=1}^{n} T_k$ un módulo inclinante básico, entonces T tiene un único sumando directo simple.

Demostración Supongamos que $S_i \ncong S_j$ son sumandos directos de T. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $1 \leq i < j \leq n$. Vamos a analizar qué sucede con $Ext^i(S_i, S_j)$ y para ello tomemos la resolución proyectiva de S_i :

$$0 \to S_n \to \cdots \to P_j \to \cdots \to P_i \to S_i \to 0$$

y apliquemos $Hom(-, S_j)$ para obtener el complejo

$$0 \to H(S_i, S_j) \to \cdots \to H(P_j, S_j) \to \cdots \to H(S_n, S_j) \to 0.$$

Alrededor de $Hom(P_j, S_j)$ tenemos lo siguiente

$$0 \to Hom(P_j, S_j) \to 0.$$

Como $Hom(P_j, S_j) \cong k$, el complejo no puede ser exacto en ese término, luego $Ext^{j-i}(S_i, S_j) \neq 0$ y T no sería inclinante.

Este resultado en combinación con la descripción de los indescomponibles nos dice que esta álgebra tiene exactamente n módulos inclinantes, uno asociado a cada simple y podemos escribirlos de la siguiente forma.

$$T_i = S_i \oplus (\oplus_{j \neq n} P_j),\ i = 1, \ldots, n.$$

Nos proponemos ahora investigar si para cada inclinante existe un orden tal que el álgebra es cuasi-hereditaria. Por el teorema 1 basta con probar que existen n órdenes para los cuales el álgebra es EE y que no sean equivalentes dos a dos. Consideremos los siguientes órdenes:

(1) Sea el orden $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Los módulos estándar son $\Delta_1 = S_1, \ldots, \Delta_n = S_n$ y el álgebra es EE.

(2) Sea el orden $\{e_2, e_3, \ldots, e_n, e_1\}$. Los módulos estándar son $\Delta_2 = S_2, \ldots, \Delta_n = S_n, \Delta_1 = P_1$ y de nuevo es EE, pues se filtran todos los proyectivos.

$$(\cdots)$$

(k) Sea el orden $\{e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n, e_{k-1}, \ldots, e_1\}$. Aquí es $\Delta_k = S_k, \Delta_{k+1} = S_{k+1}, \ldots, \Delta_n = S_n, \Delta_{k-1} = P_{k-1} \ldots, \Delta_1 = P_1$. Todos los proyectivos se filtran, luego el álgebra es EE.

$$(\cdots)$$

(n) Sea el orden $\{e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1\}$. Los módulos estándar son $\Delta_n = S_n, \ldots, \Delta_1 = P_1$ y el álgebra es EE.

Estos n órdenes para los cuales el álgebra es EE no son equivalentes pues si tomamos dos de ellos que sean diferentes, digamos (i) y (j), tales que $i < j$ se tiene que S_i es módulo estandar en (i) pero no en (j). Los razonamientos antes desarrollados constituyen la prueba del siguiente enunciado.

Proposición 2 Para las álgebras de tipo A_n equiorientada con la relación dada por $rad^2 A_n = 0$, existe una correspondencia biunívoca entre módulos inclinantes básicos y estratificaciones no equivalentes entre sí.

Con esto damos respuesta al problema de encontrar la relación entre los conceptos de inclinación y estratificación en los tipos de álgebras aquí estudiadas. El teorema 2 y el ejemplo que le sigue muestran cómo encontrar explícitamente el módulo inclinante asociado a cada estratificación.

Referencias

[1] J. F. Hernández Advíncula. *Sobre as Álgebras Estandarmente Estratificadas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2004.

[2] I. Assem. *Tilting Theory - An Introduction*, volume 26. Banach Center Publications, 1990.

[3] C.M.Ringel D.Happel. *Tilted Algebras*. Transactions of the Amer. Math. Soc., 1982.

[4] A. J. Figueredo and P. S. A. Wolf. Assortative pairing and life history strategy. *Human Nature*, 20:317–330, 2009.

[5] A. Skowroński I. Assem, D. Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 1. London Mathematical Society, 2006.

[6] M. I. Platzeck M. Verdecchia I. Assem, J. A. Cappa. *Módulos Inclinantes y Álgebras Inclinadas*. Bahía Blanca, Argentina, 2008.

[7] H. Krause L. A. Hügel, D. Happel, editor. *Handbook of Tilting Theory*. 2006.

[8] I. Reiten M. Auslander. Applications of contravariantly finite subcategories. In *Advances in Mathematics*, number 86. 1991.

[9] M. L. Shaid. Sistemas estratificantes lineales. Master's thesis, UNAM, 2011.

[10] I. Reiten T. Adachi, O. Iyama. $\tau - TiltingTheory$. arXiv:1210.1036v4, 2013.

[11] I. Vázquez. Relación entre inclinación y estratificación en álgebras hereditarias de representación finita. Master's thesis, Universidad de La Habana, 2010.

[12] Changchang Xi. *Standardly Stratified Algebras and Cellular Algebras*. Cambridge Philosophical Society, 2002.

[13] S. Brenner y M. Butler. *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*. Proc. ICRA II, 1979.