Artículo Original / Original Research

Ciencias Matemáticas, Vol. 36, No. Único, 2022-2023, Pag. 43-49
Recibido (*Received*): 27-04-2024, Revisado (*Reviewed*): 22-05-2024
Aceptado (*Accepted*): 14-07-2024, En línea (*Online*): 18-07-2024

El problema de Riemann para el sistema de Lamé-Navier bidimensional
The Riemann problem for the two-dimensional Lamé-Navier system

Diego Esteban Gutierrez Valencia[1], Daniel Alfonso Santiesteban[2], Ricardo Abreu Blaya[3]*

Resumen Este trabajo está dedicado a estudiar un sistema de ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad Lineal: el sistema de Lamé-Navier. Mediante el Análisis Complejo, este sistema se reescribe en términos del operador de Cauchy-Riemann y su complejo conjugado. Con esta reescritura se obtiene una nueva factorización del sistema que permite encontrar soluciones explícitas. Posteriormente se resuelve el problema de Riemann asociado a este sistema elástico. Finalmente, se definieron operadores integrales de tipo Teodorescu que posibilitan la generalización de los resultados cuando se consideran dominios con frontera fractal.

Palabras Clave: operador de Cauchy-Riemann, operador de Teodorescu, problema de Riemann, sistema de Lamé-Navier.

Abstract *This paper is devoted to the study of a system of equations of the Theory of Linear Elasticity: the Lamé-Navier system. By means of Complex Analysis, this system is rewritten in terms of the Cauchy-Riemann operator and its complex conjugate. With this rewritten, a new factorization of the system is obtained, which allows finding explicit solutions. Subsequently, the Riemann problem associated to this elastic system is solved. Teodorescu-type integral operators were defined that allow the generalization of the results for domains with fractal boundary.*

Keywords: *Cauchy-Riemann operator, Teodorescu operator, Riemann problem, Lamé-Navier system.*

Mathematics Subject Classification: 28A80, 30E25, 74B05.

[1]Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero, México. Email: diegogutierrez@uagro.mx
[2]Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero, México. Email: danielalfonso950105@gmail.com
[3]Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero, México. Email: rabreublaya@yahoo.es
*Autor para Correspondencia (*Corresponding Author*)

Editado por (*Edited by*): Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba.

Citar como: Gutierrez Valencia, D.E, Alfonso Santiesteban, D., & Abreu Blaya, R. (2024). El problema de Riemann para el sistema de Lamé-Navier bidimensional. *Ciencias Matemáticas*, 36(Único), 43–50. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.13916459. Recuperado a partir de https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/9069.

Introducción

La Teoría de la Elasticidad Lineal es fundamental para el estudio de materiales elásticos lineales e isotrópicos sujetos a deformaciones pequeñas. Un hecho característico de esta teoría es que las ecuaciones que la rigen son ecuaciones diferenciales parciales lineales y por consiguiente el útil principio de superposición es aplicable. Uno de los primeros investigadores que usó el Análisis Complejo para la formulación matemática de muchos de los problemas elásticos fue el georgiano Nikoloz Muskhelishvili. Las fórmulas de Kolosov-Muskhelishvili [24] se utilizan en la resolución del problema de Dirichlet que consiste en encontrar el equilibrio elástico del cuerpo deformado si se conocen los desplazamientos sobre su frontera. Las soluciones a este problema se obtienen de ecuaciones integrales mediante la fórmula de Cauchy. En ingeniería de materiales se estudian los compuestos de matriz metálica del aluminio, los cuales son usados para el desarrollo de materiales aeroespaciales y en la industria de la defensa [5]. Las aplicaciones en ingeniería aeroespacial de las matrices de composición del metal y la cerámica son muy novedosas [23]. Los ejemplos en la práctica son innumerables y además se ha convertido en una teoría primordial dentro de la Mecánica de los Medios Continuos. El campo de desplazamiento bidimensional (u,v) de los puntos de un sólido elástico lineal e isotrópico en presencia de una fuerza externa (X,Y) es descrito por el conocido sistema de Lamé-Navier:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u+X &=0, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v+Y &=0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\mu>0$ y $\lambda>-\frac{2}{3}\mu$ son constantes físicas conocidas como parámetros de Lamé. El símbolo Δ denota al operador de Laplace en $\mathbb{R}^2$ y $\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ es la divergencia del desplazamiento [24, p. 97]. El sistema fue introducido por Gabriel Lamé en el método de separación de variables para la solución de la ecuación de onda en coordenadas elípticas y se debe a la Ley de Hooke [20]. Este sistema tiene su análogo m-dimensional y en la literatura también se usa el término de ecuación de Navier-Cauchy. Remitimos al lector a los trabajos más recientes: [4], [6] y [17]. Producto del estudio de las ecuaciones diferenciales en combinación con el Análisis Complejo, surge el problema de Riemann. Brevemente este problema de frontera se basa en hallar una función a trozos que sea solución de una ecuación diferencial dada y que satisfaga determinadas condiciones de frontera. El problema de Riemann es muy utilizado en dinámica de fluidos, ondas electromagnéticas, gases y en la teoría de colas [8, 12, 13, 27]. Este problema es clásico dentro del Análisis Complejo y se remonta a la disertación doctoral del propio Bernhard Riemann en 1851. En [15] se da un tratamiento eficiente de este problema y se ha convertido en referencia obligada para toda investigación concerniente a este tema. El reciente trabajo de Abreu-Blaya trata sobre estos tipos de problemas para las funciones que anulan al operador Δ^2: funciones biarmónicas [3]. Otros trabajos en el ámbito de soluciones a ecuaciones diferenciales de orden superior son [21] y [18]. Por otra parte, el problema de Riemann cuando la frontera del dominio no es rectificable ha sido estudiado por varios autores entre los que destaca Boris Kats (consultar [9, 10]).

Relevancia del estudio

El problema de Riemann junto al sistema de Lamé-Navier tienen gran aplicabilidad hoy en día. En la medida en que los parámetros de Lamé (μ,λ) sean de diferente naturaleza en el dominio interior y exterior entonces el problema resulta mucho más interesante. En el trabajo de [22] tal problema es estudiado en correspondencia con un desacoplamiento del sistema cuasiestático de termoelasticidad con un problema de Riemann en un dominio simplemente conexo. En ese artículo los autores se enfocan en el uso de sistemas $(\lambda,1)$-bianalíticos sin haber diferencias significativas en la aproximación al problema inicial.

Por otra parte, en [14] se tratan compuestos elásticos periódicos reforzados con fibras paralelas con fases transversalmente isotrópicas considerando un contacto imperfecto. Aquí se trata un tipo de problema de valor en la frontera el cual es examinado dando solución a los llamados problemas $({}_{\lambda 3}L)^{\mathbb{C}}$ mediante el uso del método de homogenización asintótica e integrales elípticas de tipo Cauchy. Existen diferencias sustanciales entre el método utilizado en [14] y el nuestro; sin embargo, para solucionar el problema del salto cuando la curva es suave fue necesaria también una transformada de tipo Cauchy. El análisis numérico hecho en [14] puede ayudar a obtener algunas analogías para futuros resultados en nuestras investigaciones del problema de Riemann.

Los aportes de nuestro trabajo se enmarcan en generalizar la naturaleza de las fronteras que acotan los dominios desde un contorno suave hasta una irregularidad geométrica fractal en el sentido de d-sumabilidad. El Teorema 10 sintetiza los resultados principales y brinda condiciones para la solubilidad del problema general (9), teniendo en cuenta las características del contorno y en especial la consideración de parámetros de Lamé de distinta naturaleza en los dominios interior y exterior.

1. Planteamiento del problema

Esta investigación pretende reescribir el sistema de Lamé-Navier (1) a su forma compleja y hallar una solución al problema de Riemann asociado a este sistema. A continuación se enunciará el mismo:

Dado un dominio Ω_+ con frontera Γ, encontrar una solución F de la ecuación siguiente:

$$\left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\overline{\partial_z\partial_z F}+\left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\partial_{\bar z}\partial_z F=0, \tag{2}$$

tal que se satisfagan las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} F^+(t)-G_0(t)F^-(t)=f_0(t), & t\in\Gamma, \\ \partial_z F^+(t)-G_1(t)\partial_z F^-(t)=f_1(t), & t\in\Gamma, \\ \partial_z F(\infty)=0, F(z)=O(\ln|z|) \text{ cuando } z\to\infty, & \end{cases} \tag{3}$$

donde las funciones dadas G_0, G_1, f_0, f_1 pertenecen a la clase de funciones de Hölder $C^{(0,\nu)}(\Gamma)$ y G_0, G_1 no tienen ceros sobre Γ.

Aquí los operadores $\partial_{\bar z}$ y ∂_z representan respectivamente al operador de Cauchy-Riemann y su conjugado.

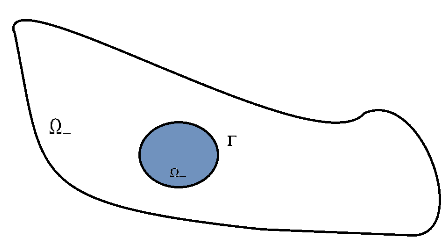

Figura 1. Dominio interior Ω_+ acotado por una frontera suave Γ y dominio exterior Ω_-.

El problema que surge de las ecuaciones (2)-(3) posee casos específicos interesantes. Por ejemplo, en (3) si se tiene que $G_0(t)\equiv G_1(t)\equiv 1$ entonces se obtiene el llamado «problema de salto» en términos de Gakhov (1980). Otro tipo de problema surge cuando el dominio Ω está acotado por una frontera fractal que para efectos de aplicabilidad estaría más relacionado a las formas irregulares de los materiales en la cotidianidad. La Figura 1 muestra una representación de los dominios interior Ω_+ y exterior Ω_-, los cuales están acotados por una frontera suave.

El *objetivo general* de este trabajo es encontrar condiciones necesarias y suficientes para la solubilidad del problema de frontera (2)-(3) y hallar la o las soluciones en forma explícita. Entonces, los objetivos específicos son:

1. Estudiar el problema de salto relacionado a (2)-(3) cuando el dominio está acotado por una frontera suave.
2. Generalizar el resultado del problema del salto para un dominio con frontera fractal siguiendo las ideas del trabajo preliminar [9] en relación con los problemas de Riemann para funciones analíticas.
3. Extender los resultados del problema del salto para el problema (2)-(3) cuando se considera $G_0(t) \neq 1$, o bien $G_1(t) \neq 1$, y ahora asumiendo un dominio acotado por una curva fractal.

Dada la naturaleza del problema (2)-(3), sus soluciones tienen una representación integral que se deriva haciendo uso del método propuesto en [7]. Para nuestro objetivo es imprescindible examinar los siguientes dos trabajos sobre operadores integrales cuando se consideran curvas no rectificables [1, 11].

2. Nociones preliminares y resultados auxiliares

Considere la función de valores complejos $f = u + iv$ en la variable $z = x + iy$, y los operadores $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ y $\partial_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$. Después de algunos cálculos se tiene para el sistema de ecuaciones (1) lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)(\partial_x\theta + i\partial_y\theta) + \mu[\Delta u + i\Delta v] \\ = 2(\lambda+\mu)\partial_{\bar{z}}\theta + \mu\Delta f \quad &= \quad -X - iY.\end{aligned}$$

Es conocido que $4\partial_{\bar{z}}\partial_z = \Delta$. Por otra parte $\theta = \partial_z f + \overline{\partial_z f}$, lo que implica que $\partial_{\bar{z}}\theta = \partial_{\bar{z}}\partial_z f + \partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\bar{f}$. Así se llega directamente a la forma compleja de (1):

$$\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\bar{f} + \left(\frac{\lambda+3\mu}{2}\right)\partial_{\bar{z}}\partial_z f = g(z), \qquad (4)$$

donde $g(z) = -\frac{1}{2}(X+iY)$. Para efectos de simplicidad de notación, de ahora en adelante $\alpha = \frac{\lambda+\mu}{2}$ y $\beta = \frac{\lambda+3\mu}{2}$, así (1) se reescribe como:

$$\alpha\partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\bar{f} + \beta\partial_{\bar{z}}\partial_z f = g(z). \qquad (5)$$

El lado izquierdo en (5) está dado por el operador diferencial $\mathscr{L}_{\alpha,\beta}$, que llamaremos operador de Lamé-Navier:

$$\mathscr{L}_{\alpha,\beta}[f] := \alpha\partial_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\bar{f} + \beta\partial_{\bar{z}}\partial_z f.$$

El planteamiento del problema de Riemann dado por Gakhov (1980) es como sigue:

Sea Γ un contorno suave y cerrado, sean G y g dos funciones que satisfacen la condición de Hölder en Γ tal que G no se desvanece en Γ y sea $\Omega_+(\Omega_-)$ el interior (exterior) de Γ. Hallar una función Φ analítica en $\Omega_+ \cup \Omega_-$ (incluyendo al punto infinitamente alejado $\infty \in \Omega_-$), que admite extensiones continuas Φ^+ y Φ^- hasta Γ de los dominios interior y exterior respectivamente, tal que la condición de frontera:

$$\Phi^+(t) - G(t)\Phi^-(t) = g(t),$$

se satisface para todo $t \in \Gamma$. Reiterar que cuando $G \equiv 1$ el problema anterior hace referencia al llamado problema del salto para funciones analíticas como un caso particular. Una solución completa al problema anterior está desarrollada en la literatura [15]. Es de mencionar que el concepto de índice de Gakhov juega un papel importante en la solución de este mismo:

$$ind(G) := \frac{1}{2\pi}[\arg G]_\Gamma,$$

donde $[.]_\Gamma$ se refiere a la variación a lo largo de Γ. Este índice es un número entero que indica el número de enrollado de la curva Γ.

La siguiente definición sigue las ideas elaboradas en Bory-Reyes et al. (2017) donde se define la clase de funciones $Lip(1+\nu,\Gamma)$, $(0<\nu<1)$, como el espacio de colecciones:

$$\mathbf{f} := \{f_0, f_1, f_2\},$$

de funciones uniformemente acotadas definidas en Γ y tales que para $t, \tau \in \Gamma$ se tienen las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned}|f_0(t) - f_0(\tau) - (t-\tau)f_1(\tau) - (\overline{t-\tau})f_2(\tau)| &\leq c|t-\tau|^{1+\nu}, \\ |f_1(t) - f_1(\tau)| &\leq c|t-\tau|^{\nu}, \\ |f_2(t) - f_2(\tau)| &\leq c|t-\tau|^{\nu},\end{aligned}$$

con $c>0$.

Esta clase de funciones resuelve el problema de extender una función definida en un compacto a todo el espacio mediante una función continuamente diferenciable hasta cierto orden. El primero que resolvió este problema fue el estadounidense Hassler Whitney mediante su «Teorema de extensión» [26]. A continuación se expone una versión compleja del mismo:

Teorema 1 (Teorema de extensión de Whitney) *Sea $f \in Lip(1+\nu,\Gamma)$. Entonces existe una función compleja de soporte compacto $\tilde{f} \in C^{1,\nu}(\mathbb{C})$ que satisface:*

1. $\tilde{f}|_\Gamma = f_0,\ \partial_z\tilde{f}|_\Gamma = f_1,\ \partial_{\bar{z}}\tilde{f}|_\Gamma = f_2,$
2. $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{C}\setminus\Gamma)$,
3. $|\partial_z^{j_1}\partial_{\bar{z}}^{j_2}\tilde{f}| \leq c\, dist(z,\Gamma)^{\nu-1}$, *para* $j_1 + j_2 = 2$ *y* $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$.

La intervención de la fractalidad en este trabajo tiene como objetivo el otorgamiento de aplicabilidad práctica al estudiar superficies acotadas por fronteras irregulares. En este camino, se considera la fractalidad en el sentido de d-sumabilidad siguiendo los aportes de [19]. Se dice que Γ es d-sumable para algún $1<d<2$ si la integral impropia:

$$\int_0^1 N_\Gamma(\tau)\tau^{d-1}\,d\tau,$$

converge, donde $N_\Gamma(\tau)$ se refiere al número mínimo de bolas de radio τ necesarias para cubrir Γ. La importancia de la anterior definición se manifiesta en el siguiente resultado en conexión con la descomposición de Whitney:

Lema 2 ([19]) *Si Ω es un dominio de Jordan de $\mathbb{R}^2$ y su frontera Γ es d-sumable, entonces la expresión $\sum\limits_{Q\in\mathscr{W}}|Q|^d$, llamada la d-suma de la descomposición de Whitney $\mathscr{W}$ de Ω, es finita.*

3. Resultados principales

Tomando en consideración los aportes hechos en [7] se define el siguiente operador de tipo Teodorescu.

Definición 3 *Sea $g\in C(\overline{\Omega})$, el operador de tipo Teodorescu se define como:*

$$\mathscr{T}_\Omega^{\mathscr{L}}[g](z)=\frac{1}{\pi}\int_\Omega\left[\alpha^*\frac{\xi-z}{\overline{\xi-z}}\overline{g(\xi)}-\beta^*\ln|\xi-z|^2 g(\xi)\right]d\xi, \tag{6}$$

donde $\alpha^*=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$ y $\beta^*=\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

Este operador (6) se comporta como el inverso por la derecha del operador de Lamé-Navier $\mathscr{L}_{\alpha,\beta}$.

Lema 4 *Si $f\in Lip(1+\nu,\Gamma)$, entonces $\partial_z^{j_1}\partial_{\bar z}^{j_2}\tilde f(z)\in L^p(\Omega)$, $j_1+j_2=2$ para $p=\frac{2-d}{1-\nu}$.*

Demostración. La demostración de este lema sigue del uso de la tercera condición del teorema de extensión de Whitney y posteriormente aplicar el Lema 2. ■

Nótese que para $\nu>d/2$ se tiene que $p=\frac{2-d}{1-\nu}>2$, lo que significa que bajo esta condición se deduce que $\partial_z^{j_1}\partial_{\bar z}^{j_2}\tilde f(z)\in L^p(\Omega)$, para algún $p>2$. Claramente esto es equivalente para $\mathscr{L}_{\alpha,\beta}(\tilde f)$. A continuación se presentará uno de los resultados principales de esta investigación.

Teorema 5 *Sean $f\in Lip(1+\nu,\Gamma)$ y Γ un contorno cerrado d-sumable con $\nu>\frac{d}{2}$. El problema de contorno dado por:*

$$\begin{cases}\mathscr{L}_{\alpha,\beta}F(z)=0, & z\in\Omega_+\cup\Omega_-,\\ F^+(t)-F^-(t)=f_0(t), & t\in\Gamma,\\ \left[\partial_z F^+\right](t)-\left[\partial_z F^-\right](t)=f_1(t), & t\in\Gamma,\end{cases} \tag{7}$$

tiene por solución:

$$F(z)=\chi_\Omega(z)\tilde f(z)-\mathscr{T}_\Omega^{\mathscr{L}}\left[\mathscr{L}_{\alpha,\beta}\left(\tilde f(z)\right)\right],\ z\in\Omega_+\cup\Omega_-, \tag{8}$$

donde $\chi_\Omega(z)$ denota a la función característica del dominio Ω.

Demostración. El hecho de que la ecuación (8) satisfaga el operador $\mathscr{L}_{\alpha,\beta}$ se deduce directamente de la definición del operador tipo Teodorescu $\mathscr{T}_\Omega^{\mathscr{L}}$. En cuanto a la primera condición de contorno de (7), fácilmente se puede comprobar que el operador $\mathscr{T}_\Omega^{\mathscr{L}}\left[\mathscr{L}_{\alpha,\beta}\left(\tilde f(z)\right)\right]$ no experimenta salto cuando z pasa por Γ. Por otro lado, para examinar la segunda condición de contorno se hace uso del Teorema 6.1 en [25]. Se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\partial_z F(z) &= \chi_\Omega(z)\partial_z\tilde f(z)+\frac{\alpha^*}{\pi}\overline{\int_\Omega\frac{\mathscr{L}_{\alpha,\beta}\left(\tilde f(\xi)\right)}{\xi-z}d\xi}\\ &- \frac{\beta^*}{\pi}\int_\Omega\frac{\mathscr{L}_{\alpha,\beta}\left(\tilde f(\xi)\right)}{\xi-z}d\xi.\end{aligned}$$

Como $\nu>d/2$, $\mathscr{L}_{\alpha,\beta}\left(\tilde f(\xi)\right)\in L^p(\Omega)$, con $p>2$, entonces:

$$\frac{1}{\pi}\int_\Omega\frac{\mathscr{L}_{\alpha,\beta}\left(\tilde f(\xi)\right)}{\xi-z}d\xi,$$

representa una función continua en $\mathbb{R}^2$ que obviamente no experimenta salto y por tanto la segunda condición de (7) se satisface. ■

Observación 6 *En el problema (7) (cuando Γ es suave) si se adicionan las condiciones de decaimiento en el infinito: $\partial_z F(\infty)=0$ y $F(z)=\mathscr{O}(\ln|z|)$, entonces se puede demostrar que la única solución (salvo una constante) estará dada por la siguiente transformada de tipo Cauchy:*

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_\Omega^{\mathscr{L}}f(z)) &= -\frac{\alpha\alpha*}{2\pi i}\int_\Gamma\overline{\frac{f_0(\xi)}{\xi-z}d\xi}-\frac{\beta\beta*}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_0(\xi)}{\xi-z}d\xi\\ &+ \frac{\alpha*}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\xi-z}{\overline{\xi-z}}\left[\alpha f_1\overline{d\xi}+\beta\overline{f_1\,d\xi}\right]\\ &+ \frac{\beta*}{2\pi i}\int_\Gamma\ln|\xi-z|^2\left[\alpha\overline{f_1}\,d\xi-\beta f_2\overline{d\xi}\right].\end{aligned}$$

Considerando los aportes presentados en [16], ahora se presentarán las soluciones relacionadas al problema de Riemann general (2)-(3). Si se considera la función analítica $\mathscr{H}(z)=\alpha^\pm\overline{\partial_z F(z)}+\beta^\pm\partial_z F(z)$, entonces el problema (2)-(3) se puede reescribir como:

$$\begin{cases}\alpha^\pm\partial_z\partial_{\bar z}\overline{F}+\beta^\pm\partial_{\bar z}\partial_z F=0, & z\in\Omega_+\cup\Omega_-,\\ F^+(t)-G_0(t)F^-(t)=g_0(t), & \\ \mathscr{H}^+(t)-G_1(t)\mathscr{H}^-(t)=g_1(t), & t\in\Gamma,\\ \mathscr{H}(\infty)=0, F(z)=\mathscr{O}(\ln|z|), & \text{si } z\to\infty,\end{cases} \tag{9}$$

donde las funciones G_0, G_1, g_0, g_1 pertenecen a la clase de Hölder $C^{(0,\nu)}(\Gamma)$ y son tales que G_0, G_1 no se anulan en Γ. También, el contorno cerrado Γ se asumirá d-sumable con $1<d<2$.

Note que esta nueva reescritura del problema (2)-(3) no involucra directamente a las derivadas parciales de la función F, en cambio se tiene una nueva función $\mathscr{H}$ que permite tratar de forma indirecta el problema para obtener soluciones más explícitas. En un primer momento, considerando los aportes de [2] se define la integral de tipo Cauchy que ayudará en la obtención de las soluciones del problema (9).

Definición 7 *Sea $d \in (1,2)$ y sea Ω un dominio con frontera Γ d-sumable. Si $\nu > d-1$, la integral de tipo Cauchy de la función $g \in C^{(0,\nu)}(\Gamma)$ está definida por:*

$$(\boldsymbol{C}^*_\Gamma g)(z) = \tilde{g}(z)\chi_\Omega(z) - \int_\Omega \frac{\partial_{\bar{\zeta}}\tilde{g}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta,\ z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma, \tag{10}$$

donde χ_Ω es la función característica de Ω y $\tilde{g}$ denota la extensión de Whitney de g.

Observe que por hipótesis la función $\mathscr{H}$ es analítica, lo que significa que $\partial_{\bar{z}}\mathscr{H} = 0$, y con la segunda condición de contorno de (9), se estaría trabajando con un problema de Riemann para funciones analíticas, cuya solución es bien conocida en la literatura [15]. Debido al siguiente problema para $\mathscr{H}$:

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}}\mathscr{H} = 0, \\ \mathscr{H}^+(t) - G_1(t)\mathscr{H}^-(t) = g_1(t), \qquad t \in \Gamma, \\ \mathscr{H}(\infty) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

se deduce entonces la siguiente proposición:

Proposición 8 *Suponga que $\dim_H(\Gamma) - 1 < \mu < \frac{2\nu - d}{2-d}$. Si el índice de Gakhov κ_1 es no negativo, entonces la solución general del problema (11) en la clase de funciones $C^{0,\nu}$ está dada por:*

$$\mathscr{H}(z) = \Psi_1(z) + X_1(z)P_{\kappa_1 - 1}(z), \tag{12}$$

con,

$$X_1(z) = \begin{cases} X_1^+(z) = e^{\left(\boldsymbol{C}^*_\Gamma \ln\left[z^{-\kappa_1}G_1\right]\right)(z)} & z \in \Omega_+, \\ X_1^-(z) = z^{-\kappa_1} e^{\left(\boldsymbol{C}^*_\Gamma \ln\left[z^{-\kappa_1}G_1\right]\right)(z)} & z \in \Omega_-, \end{cases}$$

$$\Psi_1(z) = X_1(z)\left[\tilde{g_1}(z)X_1^{-1}(z) - \int_{\Omega_+} \frac{\left[\partial_{\bar{\zeta}}\tilde{g_1}\right](\zeta)X_1^{-1}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta\right],$$

donde $P_{\kappa_1 - 1}(z)$ es un polinomio arbitrario de grado $\kappa_1 - 1$. Si $\kappa_1 = 0$ entonces la solución es idénticamente igual a $\Psi_1(z)$. Sin embargo, si $\kappa_1 < 0$, entonces este problema tiene como solución (12) si y solo si se satisfacen las condiciones siguientes:

$$\int_{\Omega_+} \frac{\left[\partial_{\bar{\zeta}}\tilde{g_1}\right](\zeta)}{X_1^+(\zeta)}\zeta^k\, d\xi d\eta = 0,\ k = 1, \ldots, -\kappa_1.$$

Ahora suponga que una solución al problema (9) viene dada por la fórmula de Kolosov-Muskhelishvili, es decir,

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\mu}\varphi(z) - \frac{z}{2\mu}\overline{\varphi'(z)} - \frac{1}{2\mu}\overline{\psi(z)}, \tag{13}$$

donde $\kappa = \frac{3\mu + \lambda}{\lambda + \mu} = 3 - 4\rho$ siendo ρ el radio de Poisson y φ, ψ son funciones analíticas en Ω. Lo anterior significa que (13) satisface no solo el sistema de Lamé-Navier (9), sino que también cumple la primera condición de contorno en (9), lo cual permite mediante cálculos algebraicos encontrar una relación directa entre las funciones φ, ψ y $\mathscr{H}$ como sigue:

$$\varphi'(z) = \sigma\mathscr{H}(z),\ \ z \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \tag{14}$$

con $\sigma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{2(1-\rho)}$. Integrando en (14) se obtiene φ en términos de la función $\mathscr{H}$, la cual ya está calculada. Teniendo en cuenta las expresiones para φ y φ' solo basta encontrar ψ, la cual es fácilmente deducida de la fórmula (13) y la primera condición de contorno en (9). Efectivamente, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\kappa}{2\mu}\varphi^+(t) - \frac{t}{2\mu}\overline{\varphi'(t)}^+ - \frac{1}{2\mu}\overline{\psi^+(t)}$$
$$-\frac{\kappa}{2\mu}G_0(t)\varphi^-(t) + \frac{t}{2\mu}G_0(t)\overline{\psi^+(t)} = g_0(t).$$

Despejando ψ se obtiene:

$$\psi^+(t) - \frac{\mu^+}{\mu^-}\overline{G_0(t)}\psi^-(t) = g_0^*(t), \tag{15}$$

donde,

$$\begin{aligned} g_0^*(t) \quad &:= \quad -2\mu^+\overline{g_0(t)} + \kappa^+\overline{\varphi^+(t)} - \frac{\kappa^-\mu^+}{\mu^-}G_0(t)\varphi^-(t) \\ &- \quad \varphi'(t)^+ + \frac{\mu^+}{\mu^-}\varphi'(t)^-. \end{aligned}$$

En virtud de (14) y bajo la hipótesis de que ψ es una función analítica se tiene nuevamente un problema de Riemann para funciones analíticas cuya solución será enunciada en la siguiente proposición.

Proposición 9 *Suponga que $\dim_H(\Gamma) - 1 < \mu < \frac{2\nu - d}{2-d}$. Si el índice de Gakhov asociado a la función $\overline{G_0}$ es $\kappa_0^* \geq 0$, entonces la solución general del problema (15) en la clase de funciones $C^{0,\nu}$ está dada por:*

$$\psi(z) = \Psi_2(z) + X_2(z)P_{\kappa_0^* - 1}(z), \tag{16}$$

con,

$$X_2(z) = \begin{cases} X_2^+(z) = e^{\left(\boldsymbol{C}^*_\Gamma \ln\left[z^{-\kappa_0^*\frac{\mu^+}{\mu^-}\overline{G_0(t)}}\right]\right)(z)}, & z \in \Omega_+, \\ X_2^-(z) = z^{-\kappa_0^*} e^{\left(\boldsymbol{C}^*_\Gamma \ln\left[z^{-\kappa_0^*\frac{\mu^+}{\mu^-}\overline{G_0(t)}}\right]\right)(z)}, & z \in \Omega_-, \end{cases}$$

$$\Psi_2(z) = X_2(z)\left[g_0^*(z)X_2^{-1}(z) - \int_{\Omega_+} \frac{\left[\partial_{\bar{\zeta}}g_0^*\right](\zeta)X_2^{-1}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta\right],$$

donde $P_{\kappa_0^* - 1}(z)$ es un polinomio complejo arbitrario de grado $\kappa_0^* - 1$ o es idénticamente igual a 0 si $\kappa_0^* = 0$. Si $\kappa_0^* > 0$, entonces este problema tiene solución si y solo si se satisfacen las condiciones siguientes:

$$\int_{\Omega_+} \frac{\left[\partial_{\bar{\zeta}}g_0^*\right](\zeta)}{X_2^+(\zeta)}\zeta^k\, d\xi d\eta = 0,\ k = 1, \ldots, -\kappa_0^*.$$

Finalmente, los resultados obtenidos se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 10 *Suponga que* $\dim_H(\Gamma) - 1 < \mu < \frac{2\nu - d}{2-d}$. *La solución al problema de Riemann* (9) *tiene la forma:*

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\mu}\varphi(z) - \frac{z}{2\mu}\overline{\varphi'(z)} - \frac{1}{2\mu}\overline{\psi(z)},$$

donde φ, φ' *y* ψ *se obtienen de las Proposiciones 8 y 9.*

Conclusiones

Los métodos del Análisis Complejo son bien conocidos e importantes en la investigación de ecuaciones en derivadas parciales en el plano. En esta investigación se resolvió un problema de Riemann asociado al clásico sistema de Lamé-Navier bidimensional. Usando transformadas de tipo Teodorescu se pudieron extender los resultados para el caso de considerar dominios con frontera d-sumable. Una aplicación directa de este problema de frontera radica en la construcción de polinomios ortogonales soluciones al sistema elástico con un determinado peso dado por la propia condición de frontera. Además, el análisis numérico de problemas de Riemann provee un efectivo método para resolver ecuaciones diferenciales parciales integrables. También son aplicables en la extracción de determinados valores asintóticos y el hecho de considerar dominios fractales aumenta esta aplicabilidad en problemas variacionales, telecomunicaciones, conductores y aislantes, caos e incluso en litografías.

Suplementos

El trabajo no cuenta con información complementaria.

Agradecimientos

Diego Esteban Gutierrez Valencia y Daniel Alfonso Santiesteban agradecen la Beca Nacional para Estudios de Posgrado del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) (CVU: 962613, 1043969).

Conflictos de interés

Se declara que no existen conflictos de interés.

Contribución de autoría

Conceptualización D.E.G.V

Curación de datos D.E.G.V

Administración del proyecto R.A.B.

Investigación R.A.B., D.A.S., D.E.G.V

Supervisión R.A.B.

Metodología D.E.G.V

Validación R.A.B.

Visualización D.E.G.V

Redacción: preparación del borrador original D.A.S., D.E.G.V

Redacción: revisión y edición D.A.S.

Referencias

[1] Abreu-Blaya, R., Bory Reyes , J. y Kats , B. A.: *Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 380(1):177–187, 2011. Disponible en https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.068.

[2] Abreu Blaya, R., Bory Reyes , J., Moreno García , T. y Peña Pérez , Y.: *Analytic Riemann boundary value problem on h-summable closed curves*. Applied Mathematics and Computation, 227:593–600, 2014. Disponible en https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.053.

[3] Abreu Blaya, R.: *A Riemann jump problem for biharmonic functions in fractal domains*. Analysis and Mathematical Physics, 11:1–13, 2021. Disponible en https://doi.org/10.1007/s13324-020-00469-x.

[4] Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya , R. y Árciga Alejandre , M.P.: *On a generalized Lamé-Navier system in* $\mathbb{R}^3$. Mathematica Slovaca, 72(6):1527–1540, 2022. Disponible en https://doi.org/10.1515/ms-2022-0104.

[5] Arunachalam, R. y Pradeep Krishnan , K.: *Compressive response of aluminum metal matrix composites*. 2021. Disponible en https://doi.org/10.1016/b978-0-12-803581-8.11818-1.

[6] Barber, J.R. y Klarbring , A.: *Solid mechanics and its applications*, 2003. Disponible en https://www.springer.com/series/6557.

[7] Begehr, H.: *Integral representations in complex, hypercomplex and Clifford analysis*. Integral transforms and Special functions, 13(3):223–241, 2002. Disponible en https://doi.org/10.1080/10652460213518.

[8] Ben-Dor, G., Igra , O. y Elperin , T.: *Handbook of shock waves, three volume set*. Elsevier, 2000. Disponible en https://www.sciencedirect.com/book/9780120864300/handbook-of-shock-waves.

[9] Boris Kats, A.: *The Riemann problem on a closed Jordan curve*. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, (4):68–80, 1983. Disponible en https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=6993&option_lang=eng.

[10] Boris Katz, D. y Boris Kats , A.: *Non-rectifiable Riemann boundary value problem for bi-analytic functions*. Complex Variables and Elliptic Equations, 66(5):843–852, 2021. Disponible en https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1751134.

[11] Bory-Reyes, J., De la Cruz Toranzo , L. y Abreu Blaya , R.: *Singular integral operator involving higher order Lipschitz classes*. Mediterranean Journal of Mathematics, 14(2):38, 2017. Disponible en https://doi.org/10.1007/s00009-017-0881-2.

[12] Chen, G.Q. y Wang , D.: *The Cauchy problem for the Euler equations for compressible fluids*. En *Handbook of mathematical fluid dynamics*, volumen 1, páginas 421–543. Elsevier, 2002. Disponible en https://doi.org/10.1016/S1874-5792(02)80012-X.

[13] Chorin, A. J.: *Random choice methods with applications to reacting gas flow*. Journal of computational physics, 25(3):253–272, 1977. Disponible en https://doi.org/10.1016/0021-9991(77)90101-2.

[14] Felipe-Sosa, R., Otero , J.A. y Solis , F.J.: *A solution for antiplane-strain local problems using elliptic integrals of Cauchy type*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(14):5177–5192, 2017. Disponible en https://doi.org/10.1002/mma.4379.

[15] Gakhov, F. D.: *Boundary value problems*. Courier Corporation, 1990. Disponible en https://books.google.com.mx/books/about/Boundary_Value_Problems.html?id=9G7sfwTDv8QC&redir_esc=y.

[16] Gutierrez Valencia, D. E., Abreu Blaya , R., Árciga Alejandre , M. P. y Peña Pérez , Y.: *On the Riemann problem in fractal elastic media*. Analysis and Mathematical Physics, 13(1):3, 2023. Disponible en https://doi.org/10.1007/s13324-022-00764-9.

[17] Gutierrez Valencia, D. E., Abreu Blaya , R., Árciga Alejandre , M.P. y Moreno García , A.: *On the Plane Lamé–Navier System in Fractal Domains*. Complex Analysis and Operator Theory, 15:1–15, 2021. Disponible en https://doi.org/10.1007/s11785-021-01088-5.

[18] Han, H., Liu , H. y Wang , Y.: *Riemann boundary-value problem for doubly-periodic bianalytic functions*. Boundary Value Problems, 2018:1–20, 2018. Disponible en https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1687690.

[19] Harrison, J. y Norton , A.: *The Gauss-Green theorem for fractal boundaries*. Duke Mathematical Journal, 67(3), 1992. Disponible en 10.1215/S0012-7094-92-06724-X.

[20] Lamé, G.: *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogenes en équilibre de température*. Editeur inconnu, 1837. Disponible en http://www.numdam.org/item/JMPA_1837_1_2__147_0.pdf.

[21] Lin, F.: *Riemann-Hilbert's mixed boundary value problem for bianalytic functions*. En *2011 International Conference on Multimedia Technology*, páginas 2330–2331. IEEE, 2011. Disponible en https://doi.org/10.1109/ICMT.2011.6002370.

[22] Lin, J., Xu , Y. y Li , H.: *Decoupling of the quasistatic system of thermoelasticity with Riemann problems on the bounded simply connected domain*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(4):1377–1387, 2018. Disponible en https://doi.org/10.1002/mma.4669.

[23] Lino Alves, F.J., Baptista , A.M. y Marques , A.T.: *Metal and ceramic matrix composites in aerospace engineering*. En *Advanced composite materials for aerospace engineering*, páginas 59–99. Elsevier, 2016. Disponible en https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100037-3.00003-1.

[24] Muskhelishvili, N.I.: *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, volumen 15. Noordhoff Groningen, 1953. Disponible en https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-017-3034-1.

[25] Vekua, I. N.: *Generalized analytic functions*. Elsevier, 2014. Disponible en https://www.sciencedirect.com/book/9780080096933/generalized-analytic-functions.

[26] Whitney, H.: *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. Hassler Whitney Collected Papers, páginas 228–254, 1992. Disponible en https://www.ams.org/journals/tran/1934-036-01/S0002-9947-1934-1501735-3/S0002-9947-1934-1501735-3.pdf.

[27] Zhao, Y. y Su , X.: *Computational fluid-structure interaction: Methods, models, and applications*. Academic Press, 2018. Disponible en https://doi.org/10.1016/C2017-0-00711-5.