

# Solución de la ecuación diferencial fraccionaria de Poisson en una juntura p-n

## *Solution of the fractional Poisson differential equation at a p-n junction*

Karla González-Sánchez<sup>1\*</sup>, Diego Seuret-Jiménez<sup>2</sup>

**Resumen** Este trabajo brinda una solución innovadora a la ecuación de Poisson en una juntura p-n de tipo CdS/CZTS, mediante el enfoque fraccionario. Primeramente, se analizan las definiciones existentes de derivada fraccionaria y se selecciona la más acorde al problema físico en cuestión. Luego, se modela la ecuación de Poisson en términos de una ecuación diferencial fraccionaria para un valor particular del grado fraccionario de derivación. Se procede a la comparación entre los resultados obtenidos para las derivadas fraccionarias con respecto a las derivadas clásicas. Los resultados muestran que con la aplicación del cálculo fraccionario se logra una mejor aproximación, con los modelos teóricos, a los datos experimentales de las curvas IV, sin la adición de términos extras a la ecuación de Shockley, que modela un diodo de una celda solar ideal.

**Palabras Clave:** ecuaciones diferenciales, cálculo fraccionario, ecuación de Poisson, juntura p-n, semiconductores.

**Abstract** This work provides an innovative solution to the Poisson equation in a CdS/CZTS p-n junction using a fractional approach. First, the existing definitions of fractional derivatives are analyzed, and the most suitable one for the physical problem at hand is selected. Then, the Poisson equation is modeled in terms of a fractional differential equation for a particular value of the fractional derivation order. A comparison is made between the results obtained for fractional derivatives and those for classical derivatives. The results show that by applying fractional calculus, a better approximation to the experimental data of the IV curves is achieved, aligning more closely with theoretical models without the need for additional terms in the Shockley equation, which models an ideal solar cell diode.

**Keywords:** differential equations, fractional calculus, Poisson equation, p-n junction, semiconductors.

**Mathematics Subject Classification:** 97C70, 97D40, 97D70, 97I40, 97U99.

<sup>1</sup>Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Email: [karla.gonzalezsa@uaem.edu.mx](mailto:karla.gonzalezsa@uaem.edu.mx).

<sup>2</sup>Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Email: [dseuret@uaem.mx](mailto:dseuret@uaem.mx).

\*Autor para Correspondencia (Corresponding Author)

**Editado por (Edited by):** Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

**Maquetado por (Layout by):** Merling Sabater Ramírez, Instituto de Criptografía, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

**Citar como:** González-Sánchez, K.; Seuret-Jiménez, D. (2024). Solución de la ecuación diferencial fraccionaria de Poisson en una juntura p-n. *Ciencias Matemáticas*, 38(2), 41–46. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.16569203>. Recuperado a partir de <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/10665>.

## Introducción

La creciente demanda de energías sustentables ha impulsado la investigación en tecnologías como la fotovoltaica [14]. En este contexto, el enfoque matemático juega un papel importante. En el presente artículo se propone una herramienta novedosa, el cálculo diferencial fraccionario, para una interpretación alternativa a un problema clásico de la Física de

semiconductores: la ecuación de Poisson.

La importancia de la búsqueda de nuevos métodos de solución para esta ecuación radica en que, en la actualidad, los modelos teóricos que describen el comportamiento de las celdas solares difieren de los resultados experimentales [2]. Al introducir un enfoque fraccionario se espera obtener resultados más próximos a la realidad, debido a que en la literatura se reportan resultados satisfactorios en el uso del

cálculo fraccionario para algunos fenómenos físicos donde se desconoce la relación causa-efecto [11, 15].

El cálculo fraccionario, a pesar de ser considerado como una herramienta novedosa, data de 1675, cuando Gottfried Wilhelm Leibniz propuso una noción de derivada de orden no entero. Más tarde, Guillaume de l'Hôpital se cuestionaría el significado de la derivada de orden  $n = 1/2$  en una carta a Leibniz, a lo que este respondería: "esta es una paradoja aparente, pero en el futuro esta formulación permitirá extraer consecuencias muy útiles" [1]. Muchos fueron los matemáticos que más tarde contribuyeron a esta área, pero es en los últimos años que se ha visto un auge en las aplicaciones del cálculo fraccionario [1].

### Relevancia del estudio

En los dispositivos fotovoltaicos de tipo CdS/CZTS, existe una brecha entre los modelos teóricos que describen su funcionamiento y los datos experimentales. En estos modelos, la ecuación de Poisson juega un papel fundamental. Al emplear dicha ecuación en el modelo de Shockley, este necesita de la incorporación de factores de ajuste para lograr una coincidencia con los datos experimentales. Con la reformulación de la ecuación de Poisson mediante derivadas fraccionarias se pretende incorporar de forma intrínseca los efectos que tradicionalmente se modelan con dichos factores, lo que simplifica los modelos y disminuye la brecha teórica-experimental. Este trabajo representa un primer paso para identificar los mecanismos que se pueden representar con cada orden fraccionario de derivación.

### 1. Derivada fraccionaria

El cálculo diferencial fraccionario es una generalización del cálculo diferencial clásico, donde el grado de derivación puede ser no entero. Esto permite una mayor flexibilidad al modelar problemas físicos, pero aún es una herramienta que carece de robustez matemática [6].

Precisamente por esto, no existe una definición única para el concepto de derivada fraccionaria. A continuación se resumen algunas de las definiciones más relevantes de derivada fraccionaria [7, 13], de las cuales se seleccionará la más acorde al problema de investigación tratado en este artículo.

**Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville:** Dada una función  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $\alpha \in [n - 1, n)$  y  $n \in \mathbb{N}$ , la  $\alpha$ -derivada de  $f$  es:

$$D_{\alpha}^{(t)} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx,$$

donde  $\Gamma$  denota la función Gamma, una generalización del concepto de factorial.

La función Gamma se define para  $z \in \mathbb{C}$  de la siguiente forma:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{para } \operatorname{Re}(z) > 0, t \in (0, \infty),$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

**Derivada fraccionaria de Caputo:** Dada una función  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $\alpha \in [n - 1, n)$  y  $n \in \mathbb{N}$ , la  $\alpha$ -derivada de  $f$  es:

$$D_{\alpha}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx,$$

donde  $n = \lceil \alpha \rceil$  es el menor entero mayor o igual a  $\alpha$ ,  $f^{(n)}(x)$  es la derivada ordinaria de orden  $n$  de  $f$ ,  $\Gamma$  es la función Gamma,  $x$  es la variable de integración y  $t$  es la variable sobre la cual se toma la derivada fraccionaria.

**Derivada conformable:** Dada una función  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, la derivada fraccionaria conformable de orden  $\alpha$  se define como:

$$T_{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

para todo  $t > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , donde  $\varepsilon$  representa un parámetro de incremento infinitesimal.

**Derivada fraccionaria generalizada:** Sea  $\alpha \in (n, n + 1]$  un número fraccionario y  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n + 1$ -diferenciable. La derivada fraccionaria generalizada de orden  $\alpha$  está definida como:

$$D^{(\alpha)} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{[\alpha]-1}(t + \omega_{t,\alpha} t^{[\alpha]-\alpha\varepsilon}) - f^{[\alpha]-1}(t)}{\varepsilon},$$

donde  $[\alpha]$  es el menor entero mayor o igual a  $\alpha$ ,  $\omega_{t,\alpha}$  es una función que depende de  $t$  y de  $\alpha$  y  $\varepsilon$  representa un parámetro de incremento infinitesimal.

Resulta notable la diferencia entre las dos primeras definiciones y las dos últimas; las primeras pertenecen al conjunto de las definiciones de derivada fraccionaria integro-diferenciables, mientras que las últimas son definiciones de tipo algebraicas. Las primeras resultan más complejas y, por lo tanto, dificultan su aplicación en problemas prácticos.

La definición de Riemann-Liouville, además, no satisface la propiedad  $D_{\alpha}^{\alpha}(1) = 0$ , para  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , ni las fórmulas de derivada del producto y división de dos funciones [5]. La derivada conformable dio solución a alguno de estos problemas que presentan las integro-diferenciables, pero aún persisten otros, como los problemas dimensionales para fenómenos físicos.

Finalmente, la derivada fraccionaria generalizada logra aprovechar todas las ventajas de la derivada conformable y logra solucionar el problema dimensional. Además, de proporcionar una formalidad matemática en el contexto del álgebra diferencial [13]. Por estos motivos se decidió trabajar con la definición de derivada fraccionaria generalizada.

### 2. Ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial de segundo grado, que en el contexto del estudio de los semiconductores, describe cómo se distribuye la carga eléctrica en

un semiconductor, relacionando la densidad de carga  $\rho$  con el potencial eléctrico  $\psi$  [12].

Su expresión es la siguiente:

$$\nabla^2 \psi(x) = -\rho,$$

donde  $\nabla^2$  es el laplaciano, pero en la práctica se trabaja en una sola dimensión debido a la simetría que presenta el problema, pues el flujo de carga y el campo eléctrico en una celda solar son dominantes en la dirección perpendicular al plano de separación de la zona n y la zona p [8].

El caso particular que se analiza en este trabajo es el de una celda solar típica de CdS/CZTS (kesterita con sulfuro de cadmio) [3], en oscuridad, a temperatura ambiente. El tipo de juntura p-n que se modela será la juntura abrupta unilateral.

El sulfuro de cadmio es donador y su concentración de átomos donadores es inferior a la de átomos aceptores de la kesterita. Dada la relación  $N_D x_n = N_A x_p$ , donde  $x_n$  y  $x_p$  son la longitud de la región de carga espacial tipo n y tipo p, respectivamente;  $N_D$  y  $N_A$  son la densidad de átomos donadores y aceptores, respectivamente. Entonces,  $x_n$  es mucho mayor que  $x_p$ .

Es por esta razón que toda la juntura crece hacia la zona n y se describe en esta zona y no en la zona p, por lo que la ecuación de Poisson se expresa de la forma siguiente:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{qN_D}{\epsilon},$$

donde  $q$  es la carga elemental y  $\epsilon$  es la permitividad del semiconductor.

Debido a la estructura de la juntura abrupta unilateral, el potencial se toma como cero del lado p del semiconductor. Por lo que se consideran las siguientes condiciones de contorno de tipo Cauchy en el intervalo  $(0, x_n) = (0, W)$ :

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = E_m \end{cases},$$

donde  $W$  es el ancho de la zona de carga espacial, y  $E_m$  es el campo eléctrico máximo dado por la expresión [12]:

$$E_m = \frac{qNW}{\epsilon}.$$

### 3. Ecuación diferencial fraccionaria de Poisson

La ecuación de Poisson en términos de derivada fraccionaria, empleando la definición de derivada fraccionaria generalizada y bajo las condiciones planteadas anteriormente, queda expresada de la siguiente forma:

$$\omega_{x,\alpha} x^{[\alpha]-\alpha} \frac{d^{[\alpha]} \psi}{dx^{[\alpha]}} = -\frac{qN_D}{\epsilon},$$

para las mismas condiciones de contorno ya enunciadas.

La función  $\omega_x$  está dada por la distancia característica del sistema, para el caso de los semiconductores, esta sería la longitud de Debye, cuya expresión es [4]:

$$L_D = \sqrt{\frac{ek_B T}{q^2 N}},$$

donde  $T$  es la temperatura en Kelvins y  $k_B$  es la constante de Boltzmann. La expresión para la función  $\omega_x$ , para no incurrir en problemas dimensionales sería:

$$\omega_{x,\alpha} = \frac{1}{L_D^{[a]-\alpha}}.$$

De esta forma la ecuación diferencial fraccionaria de Poisson quedará expresada de la siguiente manera:

$$\frac{x^{[a]-\alpha}}{L_D^{[a]-\alpha}} \cdot \frac{d^{[a]} y}{dx^{[a]}} = -\frac{qN_D}{\epsilon}.$$

## 4. Resultados

La solución computacional de esta ecuación diferencial fraccionaria para valores típicos de una celda solar de kesterita con sulfuro de cadmio en oscuridad y a temperatura ambiente se realizó con los datos de la Tabla 1. Esto se hizo mediante un programa en Python y MATLAB creado por los autores; dicho programa está basado en el método de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden de precisión (RK45).

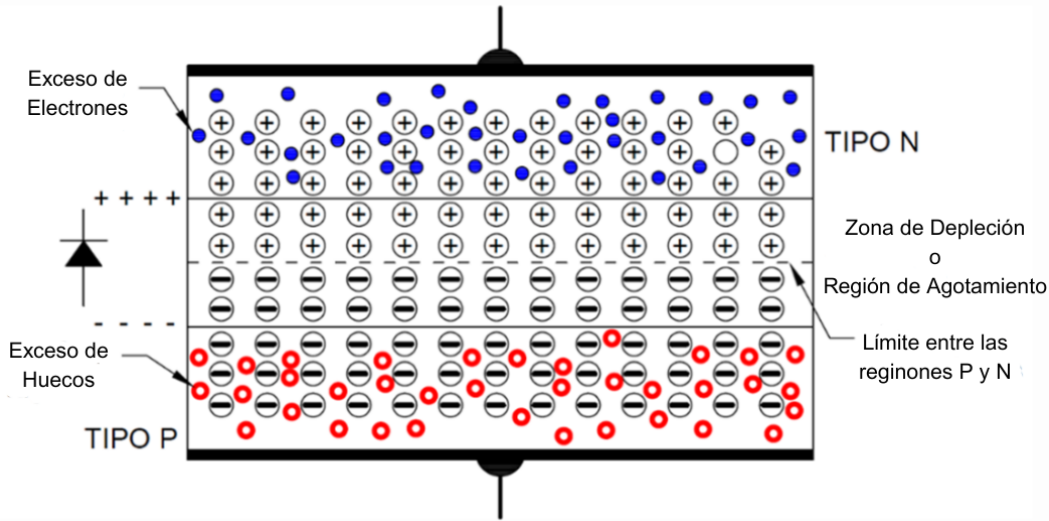
**Tabla 1.** Valores para una celda solar de kesterita con sulfuro de cadmio [Values for a kesterite solar cell with cadmium sulfide].

Símbolo	Valor	Unidad de Medida
$W$	$8,55 \times 10^{-7}$	m
$q$	$1,60218 \times 10^{-19}$	C
$N$	$10^{19}$	$\text{m}^{-3}$
$\epsilon$	$6,64 \times 10^{-11}$	$\text{C}^2/\text{Nm}^2$
$T$	300	K
$k_B$	$1,38 \times 10^{-23}$	J/K

Los valores obtenidos de la solución numérica de dicha ecuación diferencial fraccionaria se emplearon para visualizar las curvas IV mediante la conocida ecuación de Shockley, pues la solución de la ecuación de Poisson por sí sola no brinda información significativa.

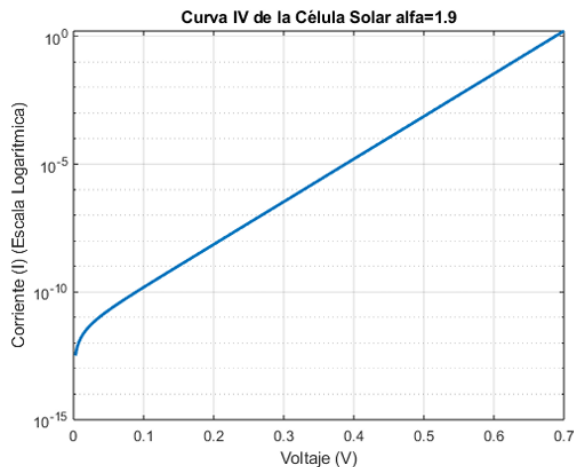
La curva IV es una gráfica que muestra la relación entre la corriente eléctrica (I), que pasa a través de un dispositivo (en este caso, una celda solar) y el voltaje (V) aplicado. Mediante esta curva se caracteriza el comportamiento eléctrico de los paneles solares. En el contexto de los semiconductores se trabaja principalmente con las curvas IV.

Por otra parte, el modelo de Shockley es un modelo idealizado de un diodo PN (de una celda solar ideal) cuya ecuación (del diodo) es la ecuación de Shockley.



**Figura 1.** Representación esquemática de una juntura p-n, mostrando las regiones tipo p (exceso de huecos) y tipo n (exceso de electrones), junto con la zona de depleción o agotamiento en el límite entre ambas regiones [Schematic representation of a p-n junction, showing the p-type region (excess of holes) and the n-type region (excess of electrons), along with the depletion region at the boundary between both areas]. Tomado de: <https://portalsolar.com.ar/enciclopedia/energia-solar/como-funcionan-las-celdas-fotovoltaicas-optoelectronica-para-salita-de-4>

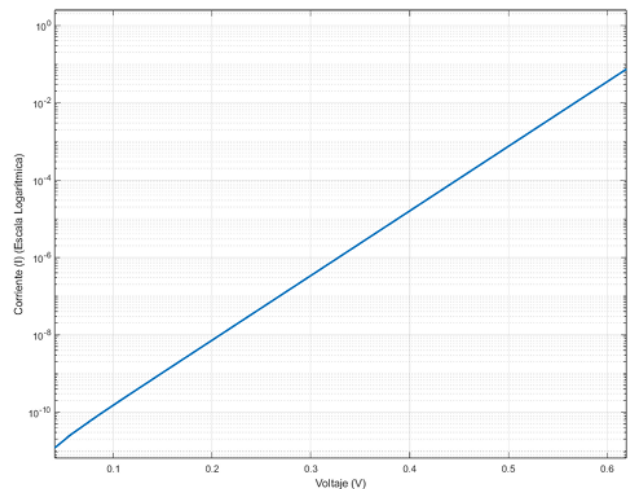
El valor de  $\alpha$  que aportó una mejor interpretación física fue  $\alpha = 1,9$ . La gráfica resultante para este valor se muestra en la Figura 2.



**Figura 2.** Representación de la curva IV para  $\alpha = 1,9$  [IV Curve representation for  $\alpha = 1,9$ ].

En la Figura 3 una representación gráfica de la curva IV para el caso clásico,  $\alpha = 2$ . Puede notarse la diferencia en el intervalo  $(0, 0,1]$  entre ambas gráficas. Al usar el modelo clásico ( $\alpha = 2$ ), se obtiene una línea recta, lo cual no describe el comportamiento real de las celdas solares. La línea recta representa un comportamiento ideal, sin considerar los mecanismos de transporte que típicamente aparecen en los análisis experimentales de las celdas solares.

El coeficiente de correlación entre ambas gráficas es el



**Figura 3.** Representación de la curva IV para  $\alpha = 2$  [IV Curve Representation for  $\alpha = 2$ ].

siguiente:

- Para  $0 < v \leq 0,1$ , el coeficiente de correlación es 0,2354.
- Para  $0,1 < v \leq 0,7$ , el coeficiente de correlación es 1.

Esto indica que la relación lineal entre ambas gráficas en el intervalo  $(0, 0,1]$  es poco significativa, pero sigue siendo positiva, lo cual tiene sentido dado el fenómeno físico en cuestión. Por otra parte, en el intervalo  $(0,1, 0,7]$ , las gráficas están perfectamente correlacionadas. De esta forma, se comprueba que mediante el cambio de grado de derivación no se pierde

información significativa para la representación de la curva IV.

Por otra parte, el factor de idealidad [10] es un parámetro adimensional que se puede determinar, entre otras formas, por la pendiente de la parte exponencial de la curva  $\ln(I)$  vs.  $V$ . Este aparece en la ecuación de Shockley y determina, en un diodo, la información sobre los procesos de conducción de corriente o recombinación que ocurren dentro del dispositivo.

el valor del factor de idealidad obtenido es  $n = 2,10$ , lo que indica que el mecanismo de transporte estaría entre recombinación-generación ( $n = 2$ ) y transporte por túnel ( $n > 2$ ) [9].

## Conclusiones

En este trabajo se modeló y solucionó la ecuación diferencial fraccionaria de Poisson para el caso de la juntura abrupta unilateral empleando la definición de derivada fraccionaria generalizada. Dada las gráficas y valores obtenidos se puede afirmar que se obtuvieron resultados satisfactorios, pues se logró una representación más cercana a la realidad, incorporando mecanismos de transporte sin la necesidad de añadir términos extras a la ecuación de Shockley. Esto estrecha la brecha existente entre los modelos teóricos y los resultados experimentales para el caso de estudio en cuestión.

## Agradecimientos

Este artículo se basa en la ponencia realizada por la autora Karla González Sánchez en el II Congreso de Matemática Aplicada a la Ingeniería el 5 de septiembre del 2024.

Este trabajo fue realizado con la ayuda financiera de la Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación de México.

## Suplementos

Este artículo no contiene información suplementaria.

## Conflictos de interés

Los autores declaramos que no tenemos ningún conflicto de interés en relación con este artículo. No hubo ninguna subvención para este artículo.

## Contribución de autoría

**Conceptualización** K.G.S., D.S.J.

**Curación de datos** K.G.S.

**Análisis formal** K.G.S.

**Adquisición de Financiamento** K.G.S.

**Investigación** K.G.S.

**Metodología** K.G.S., D.S.J.

**Administración de proyecto** D.S.J.

**Recursos** K.G.S.

**Software** K.G.S.

**Supervisión** D.S.J.

**Validación** K.G.S., D.S.J.

**Visualización** K.G.S.

**Redacción: preparación del borrador original** K.G.S.

**Redacción: revisión y edición** K.G.S., D.S.J.

## Referencias

- [1] Albadarneh, R.B.: *Fractional Euler Method and Finite Difference Formula Using Conformable Fractional Derivative*. In *ISER 10th International Conference, Kuala Lumpur, Malaysia*, 2015, ISBN 978-93-85832-34-5. [https://www.researchgate.net/publication/306392101\\_FRACTIONAL\\_EULER\\_METHOD\\_AND\\_FINITE\\_DIFFERENCE\\_FORMULA\\_USING\\_CONFORMABLE\\_FRACTIONAL\\_DERIVATIVE](https://www.researchgate.net/publication/306392101_FRACTIONAL_EULER_METHOD_AND_FINITE_DIFFERENCE_FORMULA_USING_CONFORMABLE_FRACTIONAL_DERIVATIVE).
- [2] Beckers, A.: *Robust Simulation of Poisson's Equation in a P-N Diode Down to 1  $\mu$ K*, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.02836>.
- [3] Courel, M., J.A. Andrade-Arvizu, and O. Vigil-Galán: *Towards a Cd/Cu<sub>2</sub>ZnSnS<sub>4</sub> solar cell efficiency improvement: A theoretical approach*. *Applied Physics Letters*, 2014. <https://doi.org/10.1063/1.4903826>.
- [4] Electricity-Magnetism: *Fórmula Longitud Debye Uso y Cálculo*. <https://www.electricity-magnetism.org/es/formula-longitud-debye-uso-y-calculo/>.
- [5] Hammad, A. and R. Khalil: *Fractional Fourier Series with Applications*. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 4(6):187–191, 2014. <https://doi.org/10.5923/j.ajcam.20140406.01>.
- [6] Herrera, G., M. Fernanda, R. García y J. Juan: *Ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones a la ingeniería*. *Jóvenes en la Ciencia. Revista de Divulgación Científica*, 3(2):888–892, 2017. <https://www.jovenesenlaciencia.ugto.mx/index.php/jovenesenlaciencia/article/view/2175>.
- [7] Khalil, R., M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh: *A new definition of fractional derivative*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>.
- [8] Millman, J. and S. Seely: *Electronics*. McGraw-Hill Book Company, 1951. <https://archive.org/download/in.ernet.dli.2015.238652/2015.238652.Electronics.pdf>.

- [9] Morab, S., M.M. Sundaram, and A. Pivrika: *A review on charge carrier transport in inorganic and organic semiconductors*. *Coatings*, 13(9):1657, 2023. <https://doi.org/10.3390/coatings13091657>.
- [10] Park, J., C. Yu, S. Min, J.I. Shim, and D.S. Shin: *Extracting the inherent ideality factor of a diode from electrical current–voltage characteristics*. *Electronics Letters*, 59:e13046, 2023. <https://doi.org/10.1049/el12.13046>.
- [11] Rodríguez Martín, M.: *Introducción al cálculo fraccionario y a los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios*, 2020. <https://hdl.handle.net/20.500.14352/10129>, Trabajo Final de Grado, Universidad Complutense Madrid.
- [12] Sze, S.M. and M.K. Lee: *Semiconductor Devices. Physics and Technology*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 2012, ISBN 978-0470-53794-7. <https://share.google/1VeduOtIefalMzHUG>.
- [13] Toghiani, Z. and L. Gaggero: *Generalized Fractional Differential Ring*, 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.13348>.
- [14] Tweneboah-Koduah, D., T. Prechi Botcheay, and M. Lobnibe Arah: *Globalization, renewable energy consumption and sustainable development*. *Cogent Social Sciences*, 9(1), 2023. <https://doi.org/10.1080/23311886.2023.2223399>.
- [15] Vázquez, L. y M. Pilar Velasco: *El cálculo fraccionario como instrumento de modelización*, 2011. <https://www.ucm.es/data/cont/docs/143-2013-10-07-el%20c%C3%A1lculo%20fraccionario.pdf>, Prepublicaciones del Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid.

