La generalización de un orden de medias: desde la geometría hasta el cálculo

Effective properties for multi-phase fibrous elastic composites.

Otilio B. Mederos Anoceto (omederosa@gmail.com)
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, México
Rita Roldán Inguanzo (rroldan@matcom.uh.cu) y José E. Martínez, Serra (josee@uclv.edu.cu)
Facultad de Matemática Física y Computación, Universidad Central de Las Villas, Cuba

Resumen

En este trabajo se presenta un conjunto de problemas, observaciones y preguntas para facilitar a los profesores la preparación de actividades para un proyecto de aprendizaje sobre el establecimiento de un orden total para la extensión del concepto de media p-ésima en tres contextos: el geométrico para $p \in \{-2,-1,1,2\}$, el algebraico para $p \in Z$ y el del cálculo diferencial para $p \in R$. Lo planteado para estos tres contextos diferentes propicia el trabajo de articulación vertical desde la enseñanza secundaria hasta la universitaria, así como el de integración de conocimientos en el caso de los dos primeros contextos. Los resultados obtenidos utilizando técnicas del cálculo diferencial muestran la facilidad con que se generalizan los resultados alcanzados con técnicas de la geometría sintética y del álgebra básica.

Abstract

This paper presents a set of problems, comments and questions to make it easier for the teachers, the preparation of activities, in order to perform a learning project on the establishment of a total order for the extension of the concept of p-nth mean in three contexts: the geometric for $p \in \{-2,-1,1,2\}$, the algebraic for $p \in Z$ and the differential calculus for $p \in R$. The raised for these three different contexts, it facilitates the work of vertical link from secondary education to university; as well as the integration of knowledge in the case of the first two contexts. The results obtained using the differential calculus techniques show the ease with which it generalizes the results achieved with techniques of synthetic geometry and basic algebra.

1. Introducción

El proceso de enseñanza requiere la creación de condiciones para que se produzca la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes. Muchas de estas condiciones pueden lograrse con la realización de un proyecto de aprendizaje basado en una organización significativa de los contenidos, mediante el cual se propicien las condiciones para que el estudiante amplíe, modifique o rechace, las estructuras que posee a partir de la presentación del nuevo conocimiento en forma significativa.

En este artículo se presenta un conjunto de problemas, observaciones y preguntas que pueden facilitar a los profesores la preparación de actividades para una población determinada de alumnos, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje con dos características específicas sobre el desarrollo del concepto de media p-ésima. Por una parte, el desarrollo de este concepto se hace a partir del establecimiento de una relación de orden para la colección de medias p-ésimas para $p \in \{-2,-1,1,2\}$ en el contexto geométrico, y las generalizaciones de esta relación de orden a las colecciones correspondientes a $p \in Z\backslash\{0\}$ en el contexto algebraico, y a$p \in R\backslash\{0\}$ en el contexto del cálculo diferencial. Por otra parte, lo planteado para estos tres contextos diferentes, propicia el trabajo de articulación vertical desde la enseñanza secundaria hasta la universitaria; así como el de integración de conocimientos en el caso de los dos primeros contextos.

Los contenidos se han organizado por medio del planteamiento y la resolución de problemas estructurados de manera que cada uno de ellos vaya surgiendo como una necesidad del propio desarrollo conceptual, algunos de los cuales pueden ser planteados y resueltos por los propios estudiantes, para lo cual se ofrecen sugerencias y observaciones contenedoras de consejos didácticos oportunos para la realización de un proyecto de aprendizaje.

En la asignatura "Resolución de problemas" del primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de las Villas, Cuba y en asignaturas optativas de Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Coahuila, México, se han aplicado proyectos de aprendizaje para el desarrollo del concepto de media p-ésima, tomando como base la organización de los contenidos del presente artículo han sido utilizados, con resultados satisfactorios.

En la primera sección de este trabajo se presentan algunos resultados y definiciones necesarios para el desarrollo de las secciones siguientes.

2. Resultados y definiciones auxiliares

Todo concepto posee siempre dos características lógicas: el contenido y la extensión. El contenido de un concepto es un conjunto de propiedades esenciales de objetos del mismo, que es suficiente para distinguir sus nuevos objetos. La extensión de un concepto es la clase (conjunto) de de los objetos que dicho concepto abarca. Los objetos de la extensión se materializan mediante una de sus representaciones (gráfica, analítica, etc.) o una clase de representaciones equivalentes en el sentido de representar el mismo objeto. En Mederos y Roldan (2014) se da la definición siguiente de concepto:

Definición 1.1

Se define un concepto como un par (E, C), donde por E se indica la extensión del concepto y por C se denota su contenido; es decir, un conjunto $\{Pi\}_{i \in I}$ (I es un conjunto) de modelos de propiedades esenciales del objeto, cuyo cumplimiento es suficiente para determinar si un objeto dado pertenece o no a la extensión del concepto.

En Mederos y Martínez (2005) se ejemplifican, haciendo uso de la resolución de problemas y ejercicios, los procesos de formación de los conceptos de media p-ésima y media numérica que culminan con las definiciones 1.2 y 1. 3, que a continuación se exponen:

Definición 1.2

Se llama *media numérica de dos números reales positivos a* y *b*, a todo número $M(a, b)$ que satisface las propiedades:

(i) La media numérica de dos números reales positivos toma un valor entre el menor y el mayor de los números; i. e.,

$$mín\{a,b\} \leq M(a,b) \leq máx\{a,b\}.$$

(ii) La igualdad de la expresión anterior solo es válida para $a = b$; i.e.,

$$mín\{a,b\} = M(a,b) = máx\{a,b\} \Leftrightarrow a = b.$$

(iii) La media numérica es invariante ante un cambio de escala; i.e.,

$$M(ta,tb) = t.M(a,b) \text{ para todo } t \in \boldsymbol{R}.$$

En el artículo escrito por Nicolai (1977) se presenta esta definición del concepto de media numérica. La extensión del concepto de media numérica de dos números reales se indica por $\mathfrak{M}_n(a,b)$. El contenido de este concepto es {(i), (ii), (iii)}.

Definición 1.3

Se denomina media p-ésima de dos números reales positivos a y b para $p \in R\backslash\{0\}$ al número

La extensión del concepto de media p-ésima se denota por $M_p(a,b)$. En Mederos y Martínez (2005) se demuestra que el concepto de media numérica es una generalización del concepto de media p-ésima, ya que:

- Para todo número real p se cumple que

$$mín\{a,b\} \leq M_p(a,b) \leq máx\{a,b\}$$
$$mín\{a,b\} = M_p(a,b) = máx\{a,b\} \Leftrightarrow a = b;$$
$$M_p(ta,tb) = t \cdot M_p(a,b)$$

- Pertenecen a $\mathfrak{M}_n(a,b) \setminus \mathfrak{M}_p(a,b)$ la media geométrica $G(a,b) = \sqrt{ab^n}$ y los números $M_{p_1p_2}(a,b)$ definidos, para todo los números reales p_1 y p_2 tales que p1p2 ≥ 0 y $p_1 + p_2 \neq 0$, por la igualdad

$$M_{p_1p_2}(a,b) = \left(\frac{a^{p_1}b^{p_2} + a^{p_2}b^{p_1}}{2}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2}} \qquad (1)$$

Entre las medias p-ésimas resaltan los casos particulares $p \in \{-2,-1,1,2\}$, a saber:

- La media aritmética $M_1(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$
- La media cuadrática $M_2(a,b) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$
- La media armónica $M_{-1}(a,b) = \left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \dfrac{2ab}{a+b}$
- La media armónica cuadrática $M_{-2}(a,b) = \dfrac{\sqrt{2}\,ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

En este trabajo se considera que un concepto ya formado se ha desarrollado cuando se ha logrado, entre otros, al menos uno de los resultados siguientes:

1. La ampliación de la clase de elementos conocidos de su extensión.
2. El establecimiento de isomorfismos entre su extensión y la extensión de otros conceptos u otros conjuntos.
3. La determinación de nuevas propiedades de los elementos de su extensión.
4. La generalización de una propiedad que cumplen los elementos de una colección de objetos de la extensión a una colección mayor de objetos de su extensión.
5. El establecimiento de relaciones significativas con otros conceptos.

Mediante la colección $\{M_{p_1p_2}(a,b)\}$ definida por la igualdad (1) se desarrolla el concepto de media numérica con un resultado de tipo 1.

En la sección 3 de este trabajo se establece un orden para la colección de medias numéricas

$$\{M_p(a,b)\}_{p\in\{-2,-1,1,2\}} \cup \{G(a,b)\}$$

utilizando herramientas geométricas. En la sección 4 se generaliza esta relación de orden a la colección

$$\{M_p(a,b)\}_{p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \cup \{G(a,b)\}$$

utilizando herramientas algebraicas. En la sección 5 se generaliza esta relación de orden construida en la sección 5 a la colección

$$\{M_p(a,b)\}_{p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \cup \{G(a,b)\}.$$

De esta forma se desarrolla el concepto de media numérica mediante un resultado de tipo 4.

Continúa la sección 6 con la construcción de un isomorfismo creciente entre la extensión del concepto de media p-ésima de dos números reales positivos a y b $(a < b)$, y el intervalo (a,b), por lo que se logra el desarrollo del concepto de media p-ésima por medio de un resultado del tipo 2. Culmina esta sección estableciendo un isomorfismo creciente entre el eje real y el segmento (a,b), que es una relación significativa al asociar a cada punto del eje real (que corresponde a un valor de p) un punto de (a,b) (que corresponde a $M_p(a,b)$. El intervalo (a, b) es una representación gráfica de todas las medias p-ésimas y de la media geométrica, tal que dados dos puntos de este intervalo el de la izquierda representa la menor de las dos medias, por lo tanto se desarrolla el concepto de media p-ésima mediante un resultado del tipo 5.

3. Ordenamiento de cinco medias numéricas

Según ideas de Iles-Wilson (1977), Wei (1977) y de los propios autores, en esta sección se ordenan las medias geométrica, aritmética, cuadrática, armónica y armónica cuadrática, mediante construcciones y demostraciones geométricas sencillas. A través de cuatro problemas se prueban sucesivamente las relaciones $G \leq M_1$, $M_{-1} \leq G$, $M_1 \leq M_2$ y $M_{-2} \leq M_{-1}$, que indicamos respectivamente por R_1,R_2,R_3 y R_4; es decir, se prueba la cadena de desigualdades $M_{-2} \leq M_{-1} \leq G \leq M_1 \leq M_2$.

Problema 1

Dados dos números positivos a y b *(a < b)*, pruebe, utilizando una construcción geométrica adecuada, que su media aritmética $M_1(a,b)$ es mayor o igual que la media geométrica *G(a,b)*.

Sugerencia. Construya un semicírculo con diámetro de longitud $a + b$.

Solución. Sean el semicírculo de la figura 1 con diámetro $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, donde se tiene que $|\overline{AC}| = a$, $|\overline{CB}| = b$ y $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Por el teorema de Thales el triángulo *ABD* es rectángulo en *D* y por el teorema de las alturas se tiene que $|\overline{CD}|^2 = |\overline{AC}| \cdot |\overline{CB}|$. De esta última igualdad resulta que $|CD| = \sqrt{ab} = G(a,b)$.

Como $\overline{OD}$ es un radio del semicírculo, su longitud cumple obviamente la cadena de igualdades $|\overline{OD}| = \frac{a+b}{2} = M_1(a,b)$ y como, además, es la hipotenusa del triángulo *OCD*, del cual $\overline{CD}$ es un cateto, se cumple que $|\overline{CD}| < |\overline{OD}|$. Con ello se ha probado que $G(a,b) = \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} = M_1(a,b)$. Q.e.d.

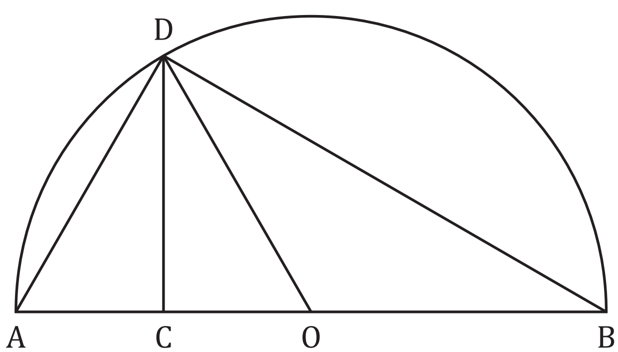

Fig. 1 Semicírculo con diámetro de longitud a = b.

Observación 1

Resulta importante mediar para que los estudiantes sientan la necesidad de averiguar qué sucede:

- Si $a = b$ (en la figura 1 se tendría $|\overline{AC}| = |\overline{CD}|$ y se alcanzaría la igualdad $G(a,b) = M_1(a,b)$.
- Si $a < b$ (bastaría considerar en la figura 1, $|\overline{AC}| = b$ y $|\overline{CB}| = a$).

Una vez que sientan esa necesidad, resulta muy útil ofrecer impulsos para que planteen y traten de probar o refutar, las conjeturas que consideren.

Problema 2

Dados dos números reales positivos *a* y *b*, *(a < b)*, pruebe, utilizando una construcción geométrica adecuada, que su media armónica $M_{-1}(a,b)$ es menor o igual que su media geométrica *G(a,b)*.

Solución

A partir de la figura 1, construyendo $\overline{CP}$ perpendicular a $\overline{OD}$, se obtiene la figura 2.

De la semejanza de los triángulos *COD* y *PCD* resulta que $|\overline{DP}| \cdot |\overline{DO}| = |\overline{CD}|^2$. Pero $\overline{OD}$ es un radio de la circunferencia y $|\overline{CD}| = \sqrt{ab}$, por tanto $|\overline{DP}| = \frac{2ab}{a+b} = M_{-1}(a,b)$. Puesto que $\overline{CD}$ y $\overline{DP}$ son las longitudes de la hipotenusa y un cateto del triángulo *PCD*, respectivamente; resulta la desigualdad $M_{-1}(a,b) = \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} = G(a,b)$. Q.e.d.

Observación 2

Siguiendo la idea de la observación 1, puede lograrse que los alumnos participen en la demostración de las proposiciones de la doble implicación: $M_{-1}(a,b) = G(a,b)$ si y solo si $a = b$.

Problema 3

Realice una construcción geométrica que le permita probar que para dos números reales positivos *a* y *b*, (*a* < *b*), la media aritmética M_1 es menor o igual que la media cuadrática M_2 y que la igualdad solo se alcanza cuando $a = b$.

Sugerencia

Construya un nuevo rectángulo en la figura 2.

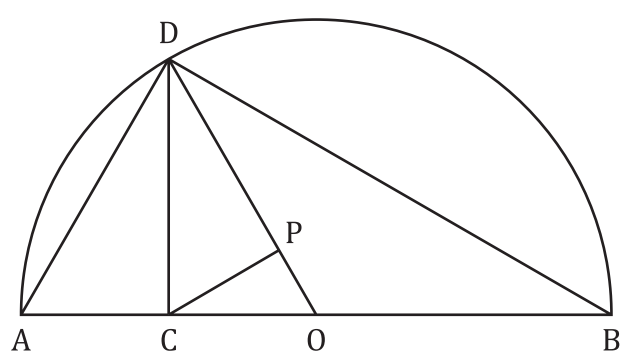

Fig. 2 Construcción auxiliar para el problema 2.

Solución

La figura 3 se ha formado construyendo $\overline{OE}$ en la figura 2, perpendicular a $\overline{OD}$ y tal que $|\overline{OE}| = |\overline{OC}|$.

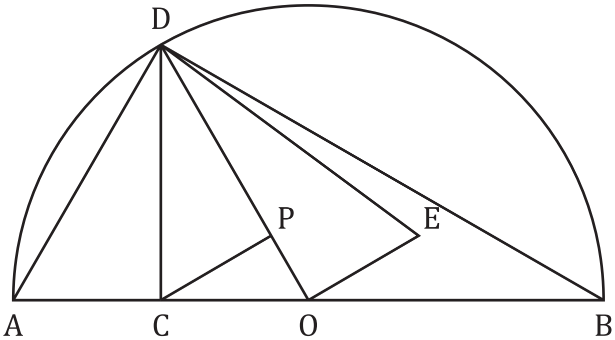

Fig. 3 Construcción auxiliar para el problema 3.

Puesto que

$$|\overline{OC}| = |\overline{BC}| - |\overline{OB}| = b - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2},$$

se tiene que $|\overline{OE}| = \frac{a-b}{2}$. Por el teorema de Pitágoras, resulta que se cumple la igualdad $|\overline{ED}|^2 = |\overline{OD}|^2 + |\overline{OE}|^2$. Sustituyendo $|\overline{OD}|$ y $|\overline{OE}|$ por sus valores respectivos y despejando $|\overline{ED}|$ se obtiene $|\overline{ED}| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = M_2(a,b)$. Por tanto, como se tiene que $|\overline{OD}| = \frac{a^2+b^2}{2} = M_1(a,b)$ y $|\overline{OD}|$ es la longitud de un cateto del triángulo *ODE*, del cual $|\overline{ED}|$ es la hipotenusa, queda probado que si $a < b$ entonces $M_1(a,b) < M_2(a,b)$. Q.e.d.

Observación 3

De manera análoga a la observación 2, debe hacerse notar a los estudiantes que $M_1(a,b) = M_2(a,b)$ si y solo si $a = b$.

Problema 4

Pruebe, utilizando una construcción geométrica, que la media armónica $M_{-1}(a,b)$ de dos números reales positivos a y b, $(a < b)$, es mayor o igual que la media armónica cuadrática $M_{-2}(a,b)$.

Solución

La figura 4 se ha formado construyendo en la figura 3 el segmento $\overline{PF}$ perpendicular a $\overline{ED}$ con F sobre $\overline{ED}$.

De la semejanza de los triángulos *DOE* y *DFP* se obtiene $|\overline{DF}| = \frac{|\overline{DP}|\cdot|\overline{OD}|}{|\overline{DE}|}$. Sustituyendo los elementos conocidos del miembro derecho por sus valores respectivos se prueba que $|\overline{DF}| = \frac{\sqrt{2}ab}{a^2+b^2}$ es la media armónica cuadrática de a y b. Como $|\overline{DP}| = M_{-1}(a,b)$ y $|\overline{DF}| = M_{-2}(a,b)$ son la hipotenusa y un

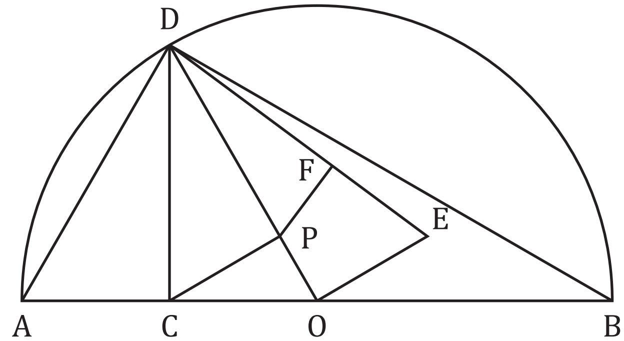

Fig. 4 Construcción auxiliar para el problema 4.

cateto del triángulo *DFP* respectivamente, queda probado que $M_{-2}(a,b) < M_{-1}(a,b)$ si $a < b$. Q.e.d.

Observación 4

Siguiendo ideas similares a las utilizadas en las tres observaciones anteriores se prueba que $M_{-2}(a,b) = M_{-1}(a,b)$ si y solo si $a = b$.

Conclusión 1

Se ha probado que se cumple la cadena de desigualdades siguiente:

$M_{-2}(a,b)$ Media Armónica Cuadrática	≤	$M_{-1}(a,b)$ Media Armónica	≤	$G(a,b)$ Media Geométrica	≤	$M_1(a,b)$ Media Aritmética	≤	$M_1(a,b)$ Media Cuadrática

Observaciones:

1. Este resultado puede utilizarse para instar a los estudiantes a la demostración de esta cadena, utilizando solo herramientas algebraicas.
2. La escritura de esta cadena en la forma $M_{-p_2} \leq M_{-p_1} \leq G \leq M_{p_1} \leq M_{p_2}$ para p_1 y p_2 tales que $p_1 < p_2$ y $p_i \in \{1,2\}, i = 1,2$ y la observación por parte del profesor sobre que el establecimiento de esta cadena con respecto a la colección de todas las medias p-ésimas ha sido un resultado muy limitado; puede contribuir a la participación activa de los alumnos en el planteamiento de diferentes conjeturas sobre su generalización a dominios mayores para p_i, por ejemplo, para $p_i \in \boldsymbol{N}$, $pi \in \boldsymbol{Q}^+$ o $p_i \in \boldsymbol{Q}$.
3. Siguiendo las mismas ideas geométricas, también pudo haberse probado la cadena $M_{-2} \leq M_{-2} \leq G \leq M_1 \leq M_2$ en el orden $R_1 \rightarrow R_3 \rightarrow R_2 \rightarrow R_4$, pues R_2 y R_3 pueden probarse,

indistintamente, en cualquier orden (ya que una no necesita de elementos obtenidos en la otra), a diferencia de cualquier otro intento de intercambiar R_i con $R_j (i,j = \overline{1:4}, i \neq j)$; en las que R_2 y R_3 necesitan elementos probados en R_1 y finalmente, R_4 necesita elementos de R_3.

4. Orden total para la colección de las medias *p*-ésimas con *p* entero y la media geométrica

Como parte del desarrollo del concepto de media numérica de dos números reales positivos, en esta sección se generaliza la relación de orden construida en la sección 3 a la colección $\{M_p(a, b)\}_{p\in \mathbf{Z}\setminus\{0\}} \cup \{G(a,b)\}$. Con este objetivo se presenta un conjunto de problemas y observaciones que facilitan la generalización utilizando solo herramientas del álgebra; es decir, se prueba que $M_{-p_2} \leq M_{-p_1} \leq G \leq M_{p_1} \leq M_{p_2}$ para p_1 y p_2 tales que $p_1 < p_2$ y p_i, $p_i \in N$, $i = 1,2$.

Problema 5

Pruebe con herramientas del álgebra la cadena de desigualdades $M_{-1}(a,b) \leq G(a,b) \leq M_1(a,b)$ y pruebe que las igualdades solo se cumple si $a = b$.

Al analizar las diferentes vías de solución que hayan utilizado los estudiantes, el profesor puede guiarlos para que determinen un método de demostración que sirva para probar ambas desigualdades y que además sea generalizable. Por ejemplo, puede conducir a los estudiantes para que prueben las desigualdades $G(a,b) \leq M_1(a,b)$ y $M_{-1}(a,b) \leq G(a,b)$ a partir de las desigualdades $(b^{1/2} - a^{1/2})^2 \geq 0$ y $(b^{-1/2} - a^{-1/2})^2 \geq 0$ respectivamente. De aquí se puede orientar la demostración de ambas desigualdades a partir de la desigualdad general $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ con $\alpha = a^{1/2}$ y $\beta = a^{1/2}$ para probar que $G(a,b) \leq M_1(a,b)$ y con $\alpha = a^{-1/2}$ y $\beta = a^{-1/2}$ para probar que $M_{-1}(a,b) \leq G(a,b)$. El análisis de cuando se tienen las igualdades, resulta trivial con esta forma de probar la cadena de desigualdades.

Existen muchas formas, que dejamos al estilo y creatividad de los profesores, de guiar a los estudiantes para que generalicen el procedimiento anterior a un p real cualquiera, y planteen y den solución al problema 6.

Problema 6

Pruebe que $M_{-p}(a,b) \leq G(a,b) \leq M_p(a,b)$ para todo p entero positivo; y que la igualdad se cumple solamente para los elementos (a,b) de $\mathbf{R}^2$ tales que $a = b$.

Si se procede como se ha indicado en la solución del problema 5; pero tomando $\alpha = a^{1/p}$ y $\beta = a^{1/p}$ se prueba que $G(a,b) \leq M_p(a,b)$ y si se toma $\alpha = a^{-1/p}$ y $\beta = a^{-1/p}$ se tiene que $M_{-p}(a,b) \leq G(a,b)$.

Para establecer un orden total para las medias p-ésimas cuando p es un número natural, resulta muy útil probar antes, las desigualdades que se presentan en los problemas 7 y 8.

Las demostraciones de estas desigualdades, utilizando solo herramientas del álgebra elemental resultan algo extensas e ingeniosas. Consecuentemente, por un problema de espacio no se desarrollarán en este artículo; no obstante, se ofrecen sugerencias en cada caso.

Problema 7

Pruebe que para p y q naturales con $p > q$ y α real diferente de 1 se cumple la desigualdad

$$\frac{\alpha^p - 1}{p} > \frac{\alpha^q - 1}{q} \qquad (2)$$

Demostración

La desigualdad (2) es equivalente a la desigualdad

$$q(\alpha^p - 1) - p(\alpha^q - 1) > 0 \qquad (3)$$

Se tiene que,

$$\Delta = q(\alpha^p - 1) - p(\alpha^q - 1)$$
$$= (\alpha - 1)\{q(\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \dots \alpha + 1) - p(\alpha^{q-1} + \alpha^{q-2} + \dots \alpha + 1)\}$$

es decir,

$$\Delta = (\alpha - 1)\{q(\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \dots \alpha + 1) - (p - q)(\alpha^{q-1} + \alpha^{q-2} + \dots \alpha + 1)\} \qquad (4)$$

La demostración continúa diferenciando los casos $\alpha > 1$ y $\alpha < 1$, en los problemas 7.1 y 7.2.

Problema 7.1

Pruebe que si $\alpha > 1$ se cumple que $\Delta > 0$

Sugerencias

Tenga presente que se cumple la desigualdad

$$\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \dots \alpha^q > (p - q)\,\alpha^q \qquad (5)$$

Utilice esta desigualdad y la cadena de igualdades (4) para probar que $\Delta > 0$.

$$\Delta = (\alpha - 1)\{q(p - q)\alpha^{q} - (p - q)q\alpha^{q - 1}\} = q\alpha^{q - 1}(p - q)(\alpha - 1)^{2} > 0$$

Problema 7.2

Pruebe que si $\alpha < 1$ se cumplen que $\Delta > 0$.

Sugerencias

Utilice las desigualdades

$$\alpha^{p - 1} + \alpha^{p - 2} + \ldots + \alpha^{q} < (p - q)\, \alpha^{q}, \quad (6)$$

$$\alpha^{q - 1} + \alpha^{q - 2} + \ldots + \alpha + 1 > q\alpha^{q - 1}, \quad (7)$$

para probar que

$$\Delta < q\,(p-q)\alpha^{q - 1}(\alpha - 1). \quad (8)$$

De (8) y (4) se obtiene la cadena de desigualdades

$\Delta > q(p — q)\, \alpha^{q-1}(\alpha - 1)^{2} > 0$.

El planteamiento del problema 7 y el proceso de solución han sido tomados del problema 49 del capítulo 8 (desigualdades) página 100 y soluciones del capítulo 8, página 433 del libro escrito por Krechmar (1974).

Problema 8

Pruebe que se cumple la desigualdad de Bernoulli $(1 + x)^{\lambda} \geq 1 + \lambda x$ para todo x real mayor que -1 y para todo número fraccionario $\lambda = p/q$ mayor que 1, y que la igualdad se cumple si y solo si $x = 0$.

Sugerencias

Sustituya α por $(1+x)^{\frac{1}{q}}$ para $x > -1$ en la desigualdad (4).

Problema 9

Pruebe que para todo par de números reales positivos α y β y todo número fraccionario $\lambda \geq 1$ se cumple que $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\lambda} \leq \frac{\alpha^{\lambda}+\beta^{\lambda}}{2}$ y la igualdad se tiene si y solo si $\alpha = \beta$.

Sugerencias

Demuestre la desigualdad $\left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\lambda}+\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\lambda} \geq 2$, transformando sus sumandos de manera que se pueda aplicar la desigualdad de Bernoulli a cada uno de ellos, y deduzca la desigualdad que se desea demostrar.

Proposición 3.1:

Si n_1 y n_2 son números naturales tales que $n_1 < n_2$ cumplen las desigualdades $M_{n_1}(a,b) \leq M_{n_2}(a,b)$ y $M_{n_1}(a,b) \leq M_{n_2}(a,b)$ para todo par de números reales positivos (a,b) y la igualdad se tiene si y solo si $a = b$.

Demostración

Haciendo $\alpha = a^{n_1}$, $\beta = b^{n_1}$ y $\lambda = n_2/n_1$ en la desigualdad del problema 9 resulta

$$\left(\frac{a^{n_1}+b^{n_1}}{2}\right)^{\frac{n_2}{n_1}} \leq \frac{a^{n_2}+b^{n_2}}{2}$$

Esta desigualdad es equivalente a

$$\left(\frac{a^{n_1}+b^{n_1}}{2}\right)^{\frac{1}{n_1}} \leq \left(\frac{a^{n_2}+b^{n_2}}{2}\right)^{\frac{1}{n_2}}$$

Queda así probado que $M_{n_1}(a,b) \leq M_{n_2}(a,b)$, para n_1, $n_2 \in Z+$ con $n_1 < n_2$. La otra parte de la demostración se realiza de manera análoga para $\alpha = a^{-n_1}$, $\beta = b^{-n_1}$ y considerando $\lambda = (-n_2)/(-n_1) = n_2/n_1$ teniendo en cuenta que se invierte la relación de orden al elevar ambos miembros positivos a un exponente negativo. Q.e.d.

Observaciones:

8. Como se cumple la relación $G = \sqrt{M_{-n}.M_{n}}$ para todo $n \in N$, se puede afirmar que G ocupa el punto central de la subsucesión geométrica $\{M_{-n}, G, M_{n}\}$ con razón $q = \sqrt{M_{n}/M_{-n}}$.
9. La proposición 3.1 pudo enunciarse de la forma siguiente: Para todo par de elementos diferentes a y b de $(0,+\infty)$ la función F_{ab} definida sobre $\boldsymbol{Z}\backslash\{0\}$ por la relación $F_{ab}(n) = M_{n}(a,b)$ es creciente. Cuando a = b, la función F_{aa} es constante.
10. Si se considera $G = M_0$ y $F_{ab}(0) = M_0$, entonces F_{ab} es creciente sobre Z.

Conclusión 2

A partir de los resultados obtenidos en el problema 6 y la proposición 3.1; así como de la propia definición del concepto de media numérica obtenida en la primera parte de este artículo, ha quedado probada la cadena de desigualdades $a \leq \cdots \leq M_{-(n_1+1)} \leq \cdots \leq M_{-2} \leq M_{-1} \leq M_{0} \leq M_{1} \leq M_{2} \leq \cdots \leq M_{n_1} \leq M_{n_1+1} \leq \cdots \leq b$, si $0 < a < b$, donde n_1 es cualquier número natural mayor que 2.

5. Orden total de la colección de las medias *p*-ésimas cuando *p* es un número real cualquiera

Utilizando herramientas del cálculo diferencial continuamos en esta sección el desarrollo del concepto de media numérica, generalizando los resultados de la sección 4 a dominios más amplios.

Problema 10

(*Generalización del problema 8*). Pruebe que se cumple la desigualdad de Bernoulli $(1 + x)^{\lambda} \geq 1 + \lambda x$ para todo x real mayor que -1 y para todo número real λ mayor que 1, y que la igualdad se cumple si y solo si $x = 0$.

Demostración

Como la función g definida por $g(x) = (1 + x)^{\lambda}$ es infinitamente derivable en $(-1,+\infty)$, por el teorema de Taylor existe un c entre 0 y x tal que para la función g se tiene $g(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(C)}{2!}x^2$ para todo x de $(-1,+\infty)$. Luego, $(1+x)^{\lambda} = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}(1+c)^{\lambda}x^2$, y de aquí se tiene, obviamente, que $(1 + x)^{\lambda} > 1 + \lambda x$, para todo $x > -1$ y $x \neq 0$. Para $x = 0$ se cumple, trivialmente, la igualdad. Q.e.d.

Observación 11

La utilización de herramientas del cálculo diferencial permitió obtener esta generalización con una demostración mucho más sencilla que la realizada con herramientas del Álgebra, para dar solución al problema 8.

Problema 11

(*Generalización del problema 9*). Pruebe que para todo par de números reales positivos α y β y todo número real $\lambda \geq 1$ se cumple que $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{\alpha^{\lambda}+\beta^{\lambda}}{2}$ y la igualdad se tiene si y solo si $\alpha = \beta$.

Sugerencia

Proceda similarmente a como se resolvió el problema 9, utilizando la desigualdad establecida en el problema 10.

Proposición 4.1

La función F_{ab} es creciente sobre $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Demostración

Considerando $F_{ab}(0) = M_0$ utilizando los problemas 10 y 11 y siguiendo la idea de la demostración de la proposición 3.1, se prueba que F_{ab} es creciente sobre $\boldsymbol{R}$. Q.e.d.

La potencialidad de las herramientas del cálculo diferencial permite probar un conjunto de propiedades de las medias numéricas, que resultaría muy difícil plantearse y responder con herramientas del álgebra y con un pensamiento algebraico. Tres de estas propiedades se enuncian y demuestran en las proposiciones 4.2- 4.5.

Proposición 4.2

La función F_{ab} es continua sobre $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Demostración

La continuidad de F_{ab} sobre $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ es una consecuencia directa de la continuidad de las funciones potenciales y de la función definida por $\lambda \to \frac{1}{\lambda}$ sobre $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; así como de los teoremas que garantizan la continuidad de la composición y la suma de funciones continuas. Q.e.d.

Proposición 4.3

La función F_{ab} es derivable sobre $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Demostración

Siga la idea esbozada en la demostración de la proposición 4.2, sustituyendo la palabra continuidad por derivabilidad. Q.e.d.

Proposición 4.4

El límite de F_{ab} cuando λ tiende a 0 es $G(a,b)$.

Demostración

Considerando $\ln F_{ab}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a^{\lambda}+b^{\lambda}}{2}$ y aplicando la regla de L´Hospital se tiene que

$$\lim_{\lambda\to 0}\ln F_{ab}(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{d}{d\lambda}\left(\ln\frac{a^{\lambda}+b^{\lambda}}{2}\right)}{\frac{d\lambda}{d\lambda}} = \lim\frac{2\left(\frac{a^{\lambda}\ln a+b^{\lambda}\ln b}{2}\right)}{a^{\lambda}+b^{\lambda}} =$$

$$= \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}$$

.

Pero el logaritmo es una función continua e inyectiva sobre $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$, por tanto resulta que $\lim_{\lambda\to 0} F_{ab}(\lambda) = G(a,b)$. Q.e.d.

Corolario 4.1

La función F_{ab} definida sobre R, considerando que $F_{ab}(0) = M_0(a,b) = G(a,b)$, es una función continua sobre $\boldsymbol{R}$.

Proposición 4.5

Si $0 < a < b$ se cumple que $\lim_{\lambda\to-\infty} F_{ab}(\lambda) = a$ y $\lim_{\lambda\to+\infty} F_{ab}(\lambda) = b$.

Demostración

Obviamente se cumple que

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \ln F_{ab}(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{a^\lambda \ln a + b^\lambda \ln b}{a^\lambda + b^\lambda} = \\ = \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{\ln a + (\frac{b}{a})^\lambda \ln b}{1 + (\frac{b}{a})^\lambda} = \ln a \quad .$$

Análogamente se tiene

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \ln F_{ab}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{a^\lambda \ln a + b^\lambda \ln b}{a^\lambda + b^\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{(\frac{a}{b})^\lambda \ln a + \ln b}{(\frac{a}{b})^\lambda + 1} = \ln b$$

De la continuidad de la función logaritmo resultan las igualdades $\ln\left(\lim_{\lambda\to-\infty} F_{ab}(\lambda)\right) = \ln a$ y $\ln\left(\lim_{\lambda\to-\infty} F_{ab}(\lambda)\right) = \ln b$.

De la inyectividad de la función logaritmo se deduce que $\lim_{\lambda\to-\infty} F_{ab}(\lambda) = \ln a$ y $\lim_{\lambda\to-\infty} F_{ab}(\lambda) = \ln b$.

Conclusión 3

La función F_{ab} transforma de manera creciente y continua el eje real en el intervalo (a,b). Específicamente, transforma el 0 en G(a,b) y contrae los intervalos (-∞,0) y (0,∞) en los intervalos (a,G(a,b)) y (G(a,b),b) respectivamente.

6. Conclusiones

La belleza, generalidad y facilidad con que se estableció el orden para la colección de medias $\{M_p(a,b)\}_{p\in\mathbf{R}\backslash\{0\}} \cup \{G(a,b)\}$ justifica la utilización de las herramientas del cálculo diferencial, teniendo presente que no se requieren ideas nuevas con respecto a los resultados que ya se tenían para *p* entero.

La aplicación de herramientas de la geometría y el álgebra no tan potentes como las del cálculo, no solo limita sus generalizaciones, sino también complica las demostraciones.

Las técnicas del cálculo relativas a su objeto de estudio, las funciones reales, permiten obtener resultados globales, como los relativos a la continuidad y el crecimiento globales de las funciones utilizadas y sus imágenes.

Los resultados obtenidos hasta ahora sugieren, entre otras las preguntas siguientes:

- ¿Existe una construcción geométrica sencilla que permita darle significado geométrico a cada una de las medias M_p para $p\in\boldsymbol{R}$?
- ¿Es posible probar geométricamente la relación $G = \sqrt{M_p.M_{-p}}$ para cada p de $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$?
- ¿Se pueden generalizar los resultados obtenidos en el trabajo sobre las medias numéricas de dos números reales positivos a medias numéricas de *n* números reales positivos?
- ¿Cuáles son las aplicaciones de estos resultados?

Realmente estas preguntas parecen muy audaces; sin embargo, con técnicas similares a las aquí usadas, se responden afirmativamente.

Bibliografía

DAVIDOV, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

DE GUZMÁN, M. (sin fecha). *Tendencias innovadoras en educación matemática.* Organización de estados iberoamericanos para educación, la ciencia y la cultura. Editorial Popular. ISBN: 84-7884-O92-3. Depósito Legal: M-9207-1993.

ILES, KIM Y WILSON, L. J. (1977). "A Further Neglected Mean". Mathematics Teacher 70, (January), 27-28.

KRECHMAR, V. A. (1974). "A Problem Book in Algebra". English translation. Moscú. Mir Publishers.

MEDEROS, O. B. y MARTÍNEZ, J. E. (2005). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. Canarias, Números, Vol.62, Pp.53-64.

MEDEROS, O.B., ROLDÁN, R.A. y otros (2014). "Algunas formas de generalización de conceptos en la matemática disciplinar y escolar" México. Plaza y Valdés Editores. ISBN: 978-607-506-179-5

NICOLAI, M.B. (1977). Commenting on Maor's "A Mathematician repertoire of means". In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. September 486.

VYGOTSKI L.S. (1998). Pensamiento y Lenguaje. La Habana. Editorial Pueblo y Educación. Segunda Edición.

WEI, JUI-HUNG. (1977). Commenting on Iles and Wilson's "A further neglected Mean". In Readers Reactions. Mathematics Teacher 70. (September).