DUALIDAD GAP EN PROGRAMACIÓN CONVEXA

Amalia Blanco Louro, Carmen S. Lema Fernández y Luis P. Pedreira Andrade[1]
Departamento de Economía Aplicada 2, Universidade da Coruña. A Coruña. España

RESUMEN
Siempre que se está planteando un problema de optimización cabe preguntarse si existe otro problema asociado al anterior que permita, entre otras cosas, resolver el primero en forma más sencilla, aprovechando las propiedades que el segundo tiene como pudiera ser la concavidad de la función objetivo, la menor dimensión, y/o la simplicidad de las restricciones, etc. Son los problemas primal y dual. Si además, como problema primal consideramos un programa convexo, el problema dual que lo caracteriza es tal que resuelto éste se puede resolver aquél, así como analizar su sensibilidad. Estructuramos este trabajo de la forma siguiente: En la sección 1 se desarrollan los conceptos básicos sobre dualidad, entre ellos el de dualidad gap, enunciándose el teorema de la dualidad débil. La sección 2 está dedicada a las condiciones bajo las que coinciden las soluciones del problema primal y dual, (dualidad gap cero). Estas condiciones se basan en las propiedades de convexidad del problema original y la cualificación de Slater, justificándose mediante el teorema de dualidad fuerte (condición suficiente pero no necesaria). En la sección 3 se da una condición más general que la cualificación de Slater, llamada propiedad *D,* que en cierto sentido es una caracterización de la ausencia de la dualidad gap.

ABSTRACT
Whenever an optimization problem is planned it is necessary to wonder if there exists another associated problem, to the previous one, that allows, among other things, to solve the former in a simpler way, taking advantage from the properties of the second as the concavity of the function objective, its smallest dimension, and/or the simplicity of the constraints, etc. They are the primal and dual problems. If in addition we consider that the primal problem is a convex program, the dual problem that characterizes it is such that by solving the other it is also solved as well as allows to analyse its sensibility. We structure this work in the following way: In section 1 the basic concepts on duality are developed, among them that of duality gap, the theorem of the weak duality is enunciated. Section 2 is dedicated to the conditions under which a coincidence between the solutions of the primal and dual problem coincide, (duality gap zero). These conditions are based on the properties of convexity of the original problem and the qualification of Slater, being justified by the strong duality theorem (necessary but not necessary condition). In section 3 a more general condition is given than the qualification of Slater, called property D, which is a characterization of the absence of the duality gap in certain sense.

Key words: Duality gap, quasi convex programming, convex programming, qualification of Slater, property D.

MSC: 90c25

1. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE DUALIDAD

Sea el problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & f(x) & \\ \text{s.a.} & f_i(x) \le 0, & i = 1,2,\dots,m \\ & x \in X \subseteq R^n & \end{array} \tag{1}$$

con f, f_i: $R^n \to R$. Suponemos que el problema (1) es factible, o sea, $S \neq \emptyset$, siendo $S = \{x \in X / f_i(x) \le 0, i = 1, 2,\dots,m\}$, y que tiene solución, sea p* el valor óptimo. Este problema (en contexto de dualidad) se llama **problema primal**.

Sea la función lagrangiana $L: X \otimes R^m_+ \to R$ / $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 f_1(x) +\dots+ \lambda_m f_m(x)$, donde $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ son los **multiplicadores de Lagrange o variables duales.**

E-mail: [1]lucky@udc.es

Definición. Llamamos **función dual de Lagrange** a una función d: $D \subseteq R_+^m \to R$ tal que

$d(\lambda) = \inf_{x\in X} L(x,\lambda) = \inf_{x\in X}\big(f(x)+\lambda_1 f_1(x)+...+\lambda_m f_m / x)\big)$. El dominio de definición D de esta función no coincide necesariamente con R_+^m. Se tiene que:

$$d(\lambda) = \begin{cases} \inf_{x\in X} L(x,\lambda) & \text{si} \quad \lambda \in D = \left\{ \lambda \in R_+^m / \inf_{x\in X} L(x,\lambda) > -\infty \right\} \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda \in D \end{cases}$$

Su dominio está formado por los puntos donde esta función toma valores finitos (e incluso puede ser ∅).

Como propiedades de la función dual destacamos las siguientes:

- Si las funciones f(x), $f_i(x)$, i = 1,2,...,m son continuas en X (la función lagrangiana es contínua en X ∅ R_+^m) y el conjunto X es cerrado y acotado, entonces se puede demostrar por el teorema de Weierstrass que existe una solución finita para $\inf_{x\in X} L(x,\lambda)$, esto permite asegurar que $D = R_+^m$.
- La convexidad del dominio de la función dual no está garantizada aunque X sea convexo y las funciones f_i i = 1,2,...,m convexas.
- La función dual en cualquier subconjunto convexo de su dominio, siempre que su dominio no sea el vacío es cóncava (incluso si las f_i son no convexas).
- Aunque el problema de optimización sea diferenciable, no se puede asegurar que la función dual sea diferenciable. Para las funciones duales no diferenciables se puede emplear el concepto de subgradiente y subdiferencial para tratar de obtener sus máximos.
- Tampoco se puede asegurar que la función dual sea continua en D aunque f y f_i, i = 1,2,...,m sean contínuas en X, salvo que X sea compacto, bajo tal supuesto d(λ) es continua y acotada en el interior de su dominio o en éste si es abierto.
- Si $\lambda \geq 0$ y x es primal factible, entonces se verifica que $d(\lambda) \leq f(x)$.

Definición. Llamamos **dualidad gap** de x (primal factible) y $\lambda \geq 0$, a la diferencia f(x) - d(λ).

Definición. $\lambda \in R^m$ es **dual factible** si $\lambda \geq 0$ y $d(\lambda) > -\infty$.

Nota. Minimizamos sobre el primal factible x para conseguir, para algún $\lambda \geq 0$, $d(\lambda) \leq p^*$, es decir los puntos duales factibles son cotas inferiores del valor óptimo.

Planteamos ahora el problema dual de (I)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & d(\lambda) \\ \text{s.a.} & x \in D \subseteq R_+^m \end{array}$$

con d: $R_+^m \to R$ llamado **problema dual de Lagrange** asociado al problema primal (I). Siempre es un problema convexo, incluso si el primal no lo es. Denotamos por d* el valor óptimo del problema dual.

Dados los problemas primal y dual, cabe plantearse si existe también una relación entre sus soluciones, ya que de existir esa relación podría resolverse uno de los problemas a partir de la solución del otro.

Teorema de la dualidad débil

$d^* \leq p^*$, es decir cada solución primal factible (resp. dual) es una cota superior (resp. inferior) de todas las soluciones duales (resp. primales) factibles.

Definición. Llamamos **dualidad gap óptima** a la diferencia $p^* - d^*$ (siempre no negativa).

Corolario 1. Si para $x^* \in S$ y para $\lambda^* \in D$ se cumple que $f(x^*) = d(\lambda^*)$, entonces x^* y λ^* son las respectivas soluciones del problema primal y dual.

Corolario 2. Si $\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$, el problema dual es infactible, es decir $D = \emptyset$.

Corolario 3. Si $\sup_{x \in R_+^m} d(\lambda) = +\infty$, el problema primal es infactible, es decir $S = \emptyset$.

El recíproco de los corolarios 2 y 3 no es cierto: si uno de los dos problemas es infactible, el otro problema puede ser también infactible, no acotado o admitir solución finita.

Es conveniente conocer cuando $p^* = d^*$, es decir cuando coincide el valor de la solución del problema primal con el de la solución del dual, ya que en este caso se puede resolver el problema original planteado mediante la resolución de su respectivo dual, pues este último tiene la ventaja de tratarse, en el caso de que exista, de un problema con solución finita, pues el conjunto de oportunidades viene dado por los puntos en los que la función dual toma valores finitos y además la función dual que se ha de maximizar es cóncava.

2. DUALIDAD EN PROBLEMAS CONVEXOS. CUALIFICACIÓN DE SLATER

Definición. Decimos que (I) está **cualificado según Slater**, si existe $x_0 \in X$ que no satura ninguna de las restricciones, es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $f_i(x_0) < 0$, $i = 1,2,...,m$.

Teorema de la dualidad fuerte

Si en el problema (I):

- X es un conjunto convexo y no vacío,
- f, f_i, $i = 1,2,...,m$ son funciones convexas,
- Se verifica la hipótesis de cualificación de las restricciones de Slater,
- Existe solución finita.

Entonces $d(\lambda^*) = d^* = p^* = f(x^*)$.

Este teorema proporciona una condición suficiente para que las soluciones de los problemas primal y dual coincidan, pero no necesaria.

Dualidad en programación lineal

El problema primal es:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = c^t x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \end{array}$$

con $x \in R^n$, $A \in M_{mxn}$, $b \in R^m$, (n variables, m restricciones de desigualdad).

El problema dual es:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & d(\lambda) = - b^t \lambda \\ \text{s.a.} & A^t \lambda + c = 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

(m variables, n restricciones de igualdad, m restricciones no negativas).

Se trata también de un problema de programación lineal.

Para estos problemas se tiene la dualidad fuerte, excepto en un caso (un poco extraño), en el que ambos el primal y el dual sean infactibles.

Dualidad en programación cuadrática

Los problemas de programación cuadrática no son necesariamente problemas convexos, pues la función objetivo puede no ser una función convexa. Sin embargo si la función objetivo es convexa, para los problemas que verifiquen el resto de los supuestos del teorema de la dualidad fuerte se puede plantear el dual para resolver el primal.

El problema primal es:

$$\text{Maximizar} \qquad f(x) = x^t P x$$

$$\text{s.a.} \qquad Ax \le b$$

con $x \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in M_{mxn}$, $P \in M_{nxn}$, tal que $P = P^t$.

Si P es una matriz definida o semidefinida positiva, $S = \{x \in R^n \ / \ Ax \le b\}$ es un conjunto acotado y su interior no es el vacío, se cumple el teorema de la dualidad fuerte, pues:

- $X = R^n$ es convexo y no vacío,
- $f(x)$ es una función convexa ya que su matriz hessiana es definida o semidefinida positiva en R^n,
- Ax representa a funciones lineales y por tanto convexas,
- Se verifica la hipótesis de la cualificación de las restricciones de Slater,
- El problema primal tiene solución finita al verificarse los supuestos del teorema de Weierstrass.

La lagrangiana es $L(x,\lambda) = x^t P x + \lambda^t (Ax - b)$.

$\nabla_x L(x,\lambda) = 0$ cuando $x = -(1/2)P^{-1}A^t\lambda$, entonces la función dual es:

$$d(\lambda) = -\ (1/4)\lambda^t A P^{-1} A^t \lambda - b^t \lambda$$

El problema dual es:

$$\text{Maximizar } d(\lambda) = -\ (1/4)\lambda^t A P^{-1} A^t \lambda - b^t \lambda$$

$$\text{s.a} \qquad \lambda \ge 0$$

Se trata también de un problema de programación cuadrática.

Vamos a dar a continuación una nueva condición que es más general que la cualificación de Slater que llamaremos propiedad D siguiendo a Champion (2004), la cual en cierto sentido se puede considerar como una caracterización de la ausencia de dualidad gap, ya que, con unas hipótesis bastante suaves sobre la función objetivo y el cumplimiento de la propiedad D se puede probar que la dualidad gap es cero, mientras que si no se verifica la propiedad D existen funciones objetivo smooth para las cuales hay dualidad gap positiva.

Primero definiremos la propiedad D para funciones cuasiconvexas sobre un espacio vectorial normado exponiendo el resultado principal de estabilidad. A continuación para funciones convexas. Para finalizar se da el resultado principal sobre la dualidad gap en programación convexa.

3. DUALIDAD GAP EN PROGRAMAS CONVEXOS. PROPIEDAD D.

La propiedad D en programas cuasiconvexos

En lo que sigue E denota un espacio vectorial normado real.

Definición. Sea $h:E \to R \cup \{+\infty\}$. Decimos que h es **cuasiconvexa** si $(h \le t)$ son convexos para cada $t \in R$.

Definición. Sea $h:E \to R \cup \{+\infty\}$. Una función cuasiconvexa, propia, semi-continua inferiormente (l.s.c.). Sea $t \in h(E)\setminus \{+\infty\}$, entonces **h satisface la propiedad D(t)** cuando

$$\bigcap_{s>t} \overline{\{h \le s\} + F} = \overline{\{h \le t\} + F}$$

para cada subespacio cerrado F de E. ($\overline{A}$ denota la clausura del subconjunto A de E).

De hecho es fácil comprobar que h satisface la propiedad *D(t)* cuando

$$\bigcap_{s>t} \overline{\{h \le s\} + F} \subset \overline{\{h \le t\} + F}$$

$\forall$ F subespacio cerrado de E.

Por ejemplo cualquier función cuasiconvexa, l.s.c., $h:R \to R \cup \{+\infty\}$ satisface la propiedad D(t) $\forall t \in h(R) \setminus \{+\infty\}$; también las funciones distancia, las funciones indicador de subconjuntos cerrados y convexos de E, así como las formas afines continuas sobre E satisfacen la propiedad *D(t)*.

Definición. Definimos **distancia gap** entre dos subconjuntos A y B de E como: $d(A,B) := \inf\{d(x, B) / x \in A\}$.

Propiedad.

Sea $h: E \to R \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa, l.s.c. y sea $t \in h(E) \setminus \{+\infty\}$. Son equivalentes:

- **i.** h satisface D(t);
- **ii.** para cada conjunto cerrado, convexo $C \subset E$ tal que $\{h \le s\} \cap C \neq \emptyset$, para cada $s > t$, la distancia $d(\{h \le t\}, C)$ es igual a cero.

Damos ahora un resultado que relaciona la propiedad *D* con la existencia de dualidad gap en programación matemática.

Teorema

Sea $h: E \to R \cup \{+\infty\}$ una función cuasiconvexa, l.s.c. y sea $t \in h(E) \setminus \{+\infty\}$. Si $f: E \to R \cup \{+\infty\}$ es una función convexa, y si consideramos

$$\forall s \ge t \qquad \nu(s) := \inf\{f(x) / h(x) \le s\}$$

Entonces, o bien se verifica

- **i.** h satisface la condición D(t), en cuyo caso $\lim_{s\to t, s>t} \nu(s) = \nu(t)$ para cada función convexa l.s.c. $f:E \to R \cup \{+\infty\}$ tal que f es finita y continua en al menos un punto de $\{h \le t\}$. O se verifica
- **ii.** h no satisface la condición D(t), en cuyo caso existe una forma lineal continua $f: E \to R$ para la cual $\lim_{s\to t, s>t} \nu(s) < \nu(t)$

La propiedad D en el caso convexo

Propiedad

Sea $h: E \to R \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia y cerrada. Entonces para cada $t \in (\inf(h), +\infty)$, h satisface la condición D(t).

La siguiente propiedad nos indica que la condición D(t) es estable bajo la operación *max* con hipótesis suaves.

Propiedad

Sea $t \in R$ y f_1, f_2: $E \to R \cup \{+\infty\}$ funciones convexas, propias, l.s.c. tales que $\{f_1 < t\} \cap \{f_2 \le t\} \neq \emptyset$ y f_1 es continua en algún punto y en $\{f_1 < t\} \cap \{f_2 \le t\}$. Entonces si f_2 satisface D(t), la función h: = $\max\{f_1, f_2\}$ también satisface la condición D(t).

La propiedad anterior no tiene porque verificarse cuando $\{f_1 < t\} \cap \{f_2 \le t\} = \emptyset$, incluso si las funciones f_1 y f_2 son continuas sobre E.

Dualidad gap en programación convexa.

Ahora volvemos a la dualidad gap en programación convexa: para cada t no negativo, consideramos el programa convexo

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & f(x) & \\ \text{s.a.} & f_i(x) \le t,\ i = 1,2,\ldots,m & (P_t) \\ & x \in X \subseteq R^n & \end{array}$$

donde las funciones f, f_i $R^n \to R \cup \{\infty\}$ son propias, convexas y l.s.c. En lo que sigue suponemos que $\mathrm{Inf}(P_0) > -\infty$. El problema dual convexo asociado a (P_0) viene dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & d(\lambda) = \inf\limits_{x \in X} L(x,\lambda) = \inf\limits_{x \in X} (f(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x)) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (D) \\ \text{s.a.} & \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0, \ldots,\ \lambda_M \ge 0, \end{array}$$

Teorema

Sean f_i $R^n \to R \cup \{+\infty\}$ funciones convexas, l.s.c., tales que el conjunto $\{h \le 0\}$ es no vacío, donde h: = $\max\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Entonces o bien se verifica

- **i.** h satisface la condición D(0), en cuyo caso no hay dualidad gap entre (P_0) y (D) cuando la función convexa, l.s.c. f: $R^n \to R \cup \{+\infty\}$ es finita y continua en al menos un punto de $\{h \le 0\}$. O se verifica h no satisface la condición D(0), en cuyo caso existe una función afín f: $R^n \to R$ para la cual la dualidad gap entre (P_0) y (D) es positiva.

Nota: Cuando las funciones f_i satisfacen la condición de Slater (es decir $\{h < 0\}$ es no vacío), entonces se verifica el Teorema anterior.

REFERENCIAS

BIGI, GIANCARLO (2001): What is duality gap in vector optimization? Dipartimento di informatica. Università di Pisa. Internet.

CHAMPION, T. (2004): Duality gap in convex programming, **Math. Program**. Ser. A, 99, 487-498.

GLINEUR, FRANCOIS (2001): Zero duality gap for a large class of separable convex problems. Topics in Convex Optimization.

HAMEL, ANDREAS H. **et.al**. (2003): Closing the duality gap in linear vector optimization. Enviado a **Journal of Convex Analysis**.

SOUSA LOBO, MIGUEL **et al.** (1998): Applications of Second-Order Cone Programming.Enviado a **Linear algebra and Applications**.

S. BOYD **et al.** (2004): Convex Optimization. Cambridge University Press. Cambridge