

DISTRIBUCIONES GENERADAS POR LA FUNCION HIPERGEOMETRICA ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$

José Rodríguez Avi, Antonio Conde Sánchez* y Antonio José Sáez Castillo
Departamento de Estadística e Investigación Operacional, Universidad de Jaén, España

RESUMEN

En este artículo presentamos una familia de distribuciones discretas de Pearson generada por la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$, extensión univariante de la función de Gauss. Esto nos permite generalizar el estudio de este tipo de distribuciones, para cualquiera que sea el orden de la función hipergeométrica considerada de este tipo. Nosotros estudiamos las propiedades que presentan, como la relación de recurrencia que verifican los momentos, a partir de la cual se puede utilizar el método de los momentos para estimar los parámetros. Asimismo se ha encontrado un resultado de sumación mediante el cual se puede calcular la función masa de probabilidad y los momentos de una amplia clase de distribuciones.

Palabras clave: familia Pearson's, función hipergeométrica, distribuciones discretas.

MSC: 60E05, 62E15.

ABSTRACT

In this paper we present a family of Pearson's discrete distributions which are generated by the hypergeometric function ${}_{p+1}F_p$, an univariate extension of the Gaussian hypergeometric function. It allows us to generalize the study of this type of distributions, whatever the order of the hypergeometric function which is considered. We study the properties that they present, like a recurrence relation that the moments verify, from which we can use the moment's method to estimate the parameters. Also we have obtained a summation result through which we can calculate the probability mass function and the moments of a wide class of distributions.

Key words: Pearson's family, hypergeometric function, discrete distributions.

1. INTRODUCCION

En general la familia de distribuciones discretas de Pearson verifican la siguiente ecuación en diferencias:

$$G(r)f_{r+1} - L(r)f_r = 0 \quad (1)$$

donde L y G son funciones en principio cualesquiera. En el caso en que dichas funciones sean polinomios, las soluciones a la ecuación (1) pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas.

El caso más estudiado es aquel en el que ambos polinomios son de segundo grado y además una de las raíces de G es -1, en el que la solución viene dada en término de la función hipergeométrica de Gauss. Esto se debe, entre otras consideraciones, a que es la versión discreta de la solución de la ecuación diferencial que verifica, por ejemplo, la distribución Normal (Pearson, 1895). A esta familia pertenecen la mayoría de las distribuciones discretas más usuales como la Binomial, la Hipergeométrica, la Binomial Negativa, la Distribución Univariante Generalizada de Waring (Irwing, 1975; Xekalaki, 1983) y en general la familia de Ord. (Ord, 1972)

Se han considerado extensiones sucesivas de dicha familia de distribuciones, tomando bien polinomios de orden 3, de forma que se obtiene la familia de distribuciones generada por la ${}_3F_2$ (Gutiérrez y Rodríguez, 1997), bien polinomios de orden 4, con la familia generada por la ${}_4F_3$ (Rodríguez *et al.* 1999).

Nuestra intención es generalizar el estudio de estas familias partiendo de polinomios de orden cualesquiera $p + 1$ con $p > 1$, como coeficientes de la ecuación en diferencias (1). De esta forma las familias de distribuciones anteriores quedan incluidas en esta y aplicando la metodología general podemos estudiar estas distribuciones.

*E-mail:aconde@ujaen.es

2. RESULTADOS GENERALES

Consideremos L y G los polinomios siguientes:

$$\begin{aligned} G(r) &= (\gamma_1 + r) \dots (\gamma_p + r)(r + 1) \\ L(r) &= (\alpha_1 + r) \dots (\alpha_{p+1} + r)\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

con $\alpha_i, i = 1, \dots, p+1; \gamma_j, j = 1, \dots, p$ y λ reales, en principio, cualesquiera.

La solución de la ecuación en diferencias (1) viene dada por:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!} \quad (3)$$

Para que la función (3) sea una función masa de probabilidad, debe verificar las siguientes condiciones,

1. Condición de positividad. Esta condición va a imponer restricciones a los parámetros $\alpha_i, \gamma_j, \lambda$, de forma que:

$$L(r)G(r) \geq 0$$

2. Condición de convergencia. En este caso,

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_0 \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!}$$

que es la función $f_0 \{ {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) - 1 \}$, la cual converge para $|\lambda| < 1$, mientras que para $|\lambda| = 1$ los parámetros han de cumplir las siguientes restricciones:

- (a) si $\omega > 0$, entonces es absolutamente convergente.
- (b) si $-1 < \omega \leq 0$, es condicionalmente convergente.
- (c) si $\omega \leq -1$, es divergente.

$$\text{donde } \omega = \sum_{j=1}^p \gamma_j - \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i$$

3. Condición de normalización

$$f_0 = {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)^{-1}$$

Podemos observar que es necesario conocer el valor de la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p$ para obtener las probabilidades exactas de estas distribuciones.

2.1. Funciones generatrices

La función generatriz de probabilidad para las distribuciones con función de probabilidad (3) es:

$$g(t) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r t^r = f_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r (\lambda t)^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!}$$

esto es,

$$g(t) = \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda t)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \quad (4)$$

que existe si es convergente para $|t| \leq 1$, lo cual se verifica atendiendo a las condiciones anteriores. En concreto, o $|\lambda| < 1$, lo cual implica que $|\lambda t| < 1$ para $|t| \leq 1$; o $|\lambda| = 1$ y $\omega > 0$. De ahí el nombre de esta familia de distribuciones.

Dichas funciones generatrices de probabilidad se pueden caracterizar a través de la ecuación diferencial que verifican, que se obtiene siguiendo la metodología presentada en Gutiérrez y Rodríguez (1997). Para ello es necesario expresar G en función de $r + 1$, esto es,

$$G(r) = \sum_{i=0}^{p+1} b_i (r + 1)^i$$

por lo que los coeficientes b_i serán:

$$b_{p+1} = 1$$

$$b_p = \sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1)$$

$$b_{p-1} = \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^p (\gamma_{i_1} - 1) \dots (\gamma_{i_2} - 1)$$

⋮

$$b_2 = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{p-1}=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_{p-1}}}^p (\gamma_{i_1} - 1) \dots (\gamma_{i_{p-1}} - 1)$$

$$b_1 = (\gamma_1 - 1) \dots (\gamma_p - 1)$$

$$b_0 = 0$$

(5)

y el polinomio L de la siguiente forma:

$$L(r) = \sum_{i=0}^{p+1} a_i r^i$$

donde se tienen los siguientes valores para los coeficientes a_i ,

$$a_{p+1} = \lambda$$

$$a_p = \lambda \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1}$$

$$a_{p-1} = \lambda \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^{p+1} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2}$$

⋮

(6)

$$\mathbf{a}_1 = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p}$$

$$\mathbf{a}_0 = \lambda \alpha_1 \dots \alpha_{p+1}$$

Así, la función generatriz de probabilidad verifica la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda t \alpha_1 \dots \alpha_{p+1} g(t) &= (1 - \lambda t) \theta^{p+1} g(t) + \\ &+ \left[\sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1) - \lambda t \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \right] \theta^p g(t) + \dots + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1) \dots (\gamma_p - 1) - \lambda t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \right] \theta g(t) \end{aligned} \quad (7)$$

De igual forma, la función generatriz de momentos verifica la siguiente ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \lambda e^t \alpha_1 \dots \alpha_{p+1} M(t) &= (1 - \lambda e^t) D^{p+1} M(t) + \\ &+ \left[\sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1) - \lambda e^t \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \right] D^p M(t) + \dots + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1) \dots (\gamma_p - 1) - \lambda e^t \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \right] D M(t) \end{aligned} \quad (8)$$

y la función característica verificaría:

$$\begin{aligned} \lambda e^{it} \alpha_1 \dots \alpha_{p+1} \phi(t) &= (1 - \lambda e^{it}) \theta_i^{p+1} \phi(t) + \\ &+ \left[\sum_{i_1=1}^p (\gamma_{i_1} - 1) - \lambda e^{it} \sum_{i_1=1}^{p+1} \alpha_{i_1} \right] \theta_i^p \phi(t) + \dots + \\ &+ \left[(\gamma_1 - 1) \dots (\gamma_p - 1) - \lambda e^{it} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}}^{p+1} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} \right] \theta_i \phi(t) \end{aligned} \quad (9)$$

2.2. Relación de recurrencia entre los momentos

A partir de la ecuación diferencial (7) se obtiene la relación de recurrencia que verifican los momentos, que en este caso viene dada por la siguiente expresión:

$$b_{p+1} \mu'_{p+1+h} + b_p \mu'_{p+h} + \dots + b_1 \mu'_{1+h} = \sum_{m=0}^h \binom{h}{m} \{ a_{p+1} \mu'_{p+1+m} + a_p \mu'_{p+m} + \dots + a_0 \mu'_m \} \quad (10)$$

donde a_i y b_i son los coeficientes polinomiales de $L(r)$ y $G(r + 1)$ respectivamente, y que es únicamente de momentos al ser $b_0 = 0$.

Así, para distintos valores de h se obtienen relaciones como la siguiente en que $h = 0$ y $\lambda = 1$:

$$(b_p - a_p)\mu'_p + \dots + (b_1 - a_1)\mu - a_0 = 0$$

de forma que si se conocen los $p - 1$ primeros momentos, se puede obtener el momento de orden p a partir de la expresión anterior, y de ahí los siguientes momentos. En ese sentido, el momento de orden r se define como:

$$\mu'_r = \left[\theta^r g(t) \right]_{t=1}$$

de donde las expresiones de la media y del momento no centrado de orden 2 son:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\lambda \prod_{i=1}^{p+1} \alpha_i}{\prod_{i=1}^p \gamma_i} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1+1, \dots, \alpha_{p+1}+1; \gamma_1+1, \dots, \gamma_p+1; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \\ \mu'_2 &= \mu + \frac{\lambda^2 \prod_{i=1}^{p+1} (\alpha_i)_2}{\prod_{i=1}^p (\gamma_i)_2} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1+2, \dots, \alpha_{p+1}+2; \gamma_1+2, \dots, \gamma_p+2; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \end{aligned} \quad (11)$$

También, mediante las derivadas de la función generatriz de probabilidad, se obtienen los momentos factoriales, cuya expresión general es:

$$\mu'_{[r]} = \frac{\lambda^r \prod_{i=1}^{p+1} (\alpha_i)_r}{\prod_{i=1}^p (\gamma_i)_r} \frac{{}_{p+1}F_p(\alpha_1+r, \dots, \alpha_{p+1}+r; \gamma_1+r, \dots, \gamma_p+r; \lambda)}{{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)} \quad (12)$$

y mediante los que se pueden obtener los momentos no centrados a través de las relaciones que ligan los dos tipos de momentos (Kendall y Stuart, 1967).

El problema es que no existe un resultado general que nos permita obtener el valor de esa función hipergeométrica, por lo que no se pueden calcular los valores explícitos de (11) o de (12), ni de la constante f_0 . No obstante, se ha conseguido un resultado que se puede aplicar a una amplia clase de distribuciones dentro de esta familia, el cual veremos a continuación.

3. RESULTADO PARCIAL DE SUMACION

Vamos a enunciar ahora un teorema que nos permite obtener la suma de una amplia clase de funciones hipergeométricas

$${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + n; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$$

en donde n es un número natural y siempre que $\gamma_p + n$ no sea el mayor valor entero negativo de los parámetros del numerador.¹

Teorema 1. Sea la función hipergeométrica ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + n; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda)$ en la que la diferencia entre uno de los parámetros de numerador y uno del denominador es un número natural n . Para aquellos casos en que la serie es infinita, esto es, ningún parámetro del numerador es entero negativo, se verifica que:

¹En este caso, al ser la suma finita, se puede obtener el resultado de manera exacta por el ordenador.

$${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + n; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha_1)_i \dots (\alpha_p)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i \dots (\gamma_p)_i} \times {}_pF_{p-1}(\alpha_1 + i, \dots, \alpha_p + i; \gamma_1 + i, \dots, \gamma_{p-1} + i; \lambda) \quad (13)$$

Demostración: Vamos a demostrarlo por inducción. Empecemos con el caso $n = 1$, en el que la igualdad a comprobar es:

$${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + 1; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \frac{(\alpha_1)_i \dots (\alpha_p)_i \lambda^i}{(\gamma_1)_i \dots (\gamma_p)_i} {}_pF_{p-1}(\alpha_1 + i, \dots, \alpha_p + i; \gamma_1 + i, \dots, \gamma_{p-1} + i; \lambda)$$

lo cual es facil teniendo en cuenta que,

$$\frac{(\gamma_p + 1)_r}{(\gamma_p)_r} = \frac{\gamma_p + r}{\gamma_p} = 1 + \frac{r}{\gamma_p}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + 1; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_p)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_{p-1})_r r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{r+1} \dots (\alpha_p)_{r+1} \lambda^{r+1}}{(\gamma_1)_{r+1} \dots (\gamma_{p-1})_{r+1} \gamma_p r!} = \\ &= {}_pF_{p-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}; \lambda) + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_p \lambda}{\gamma_1 \dots \gamma_p} {}_pF_{p-1}(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_p + 1; \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_p + 1; \lambda) \end{aligned}$$

Ahora lo suponemos cierto para n y lo probamos para $n + 1$. Como

$$(\gamma_p + n + 1)_r = (\gamma_p + n)_r + \frac{(\gamma_p + n)_r r}{\gamma_p + n}$$

la serie hipergeométrica se expresa:

$$\begin{aligned} {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_p + n + 1; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_p)_r (\gamma_p + n)_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_p)_r (\gamma_p + n)_r \lambda^r r}{(\gamma_p + n) (\gamma_1)_r \dots (\gamma_1)_r r!} = \\ &= {}_{p+1}F_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_p + n; \gamma_1, \dots, \gamma_p; \lambda) + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_p \lambda}{\gamma_1 \dots \gamma_p} {}_{p+1}F_p(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_p + 1, \gamma_p + n + 1; \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_p + 1; \lambda) \end{aligned}$$

en donde en ambos términos se puede aplicar el principio de inducción, y sumando y agrupando términos se obtiene el resultado deseado. \square

El resultado anterior tiene utilidad práctica cuando se puede calcular el valor de la función hipergeométrica ${}_pF_{p-1}$, por lo que nos interesan funciones del tipo ${}_{p+1}F_p(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n_1, \dots, \gamma_p + n_{p-1}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p; \lambda)$ con $n_j, j = 1, \dots, p-1$ números naturales, de forma que se llega al siguiente corolario, aplicando el teorema 1 recurrentemente,

Corolario 1. En las condiciones del teorema anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} &{}_{p+1}F_p(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_2 + n_1, \dots, \gamma_p + n_{p-1}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p; \lambda) = \\ &= \sum_{i_1=0}^{n_{p-1}} \binom{n_{p-1}}{i_1} \frac{(\alpha_1)_{i_1} (\alpha_2)_{i_1} (\gamma_2 + n_1)_{i_1} \dots (\gamma_{p-1} + n_{p-2})_{i_1} \lambda^{i_1}}{(\gamma_1)_{i_1} (\gamma_2)_{i_1} \dots (\gamma_p)_{i_1}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{i_2=0}^{n_{p-2}} \binom{n_{p-2}}{i_2} \frac{(\alpha_1 + i_1)_{i_2} (\alpha_2 + i_1)_{i_2} (\gamma_2 + i_1 + n_1)_{i_2} \dots (\gamma_{p-2} + i_1 + n_{p-3})_{i_2} \lambda^{i_2}}{(\gamma_1 + i_1)_{i_2} (\gamma_2 + i_1)_{i_2} \dots (\gamma_{p-1} + i_1)_{i_2}} \dots \\
& \dots \sum_{i_{p-1}=0}^{n_1} \binom{n_1}{i_{p-1}} \frac{(\alpha_1 + i_1 + \dots + i_{p-2})_{i_{p-1}} (\alpha_2 + i_1 + \dots + i_{p-2})_{i_{p-1}} \lambda^{i_{p-1}}}{(\gamma_1 + i_1 + \dots + i_{p-2})_{i_{p-1}} (\gamma_2 + i_1 + \dots + i_{p-2})_{i_{p-1}}} \times \\
& \times {}_2F_1(\alpha_1 + i_1 + \dots + i_{p-1}, \alpha_2 + i_1 + \dots + i_{p-1}; \gamma_1 + i_1 + \dots + i_{p-1}; \lambda)
\end{aligned} \tag{14}$$

Realmente este resultado es aplicable para funciones hipergeométricas cuya serie sea finita, únicamente habrá que tener cuidado en que el parámetro mayor entero negativo sea α_1 ó α_2 .

Se obtienen así resultados parciales de sumación al considerar $\lambda = 1$ y $\lambda = 1/2$, haciendo uso en el corolario 1 del Teorema de Gauss y del 2º Teorema de Gauss. Dichos resultados han sido implementados en Matlab consiguiendo de esta forma una herramienta bastante potente en el estudio de distribuciones generadas por funciones del tipo ${}_pF_p$, puesto que nos permite calcular las probabilidades y los momentos de dichas distribuciones. Mostramos a continuación algunos gráficos con sus poligonales de frecuencias.

La Figura 1 muestra los polígonos de frecuencias de distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_3F_2$ con $\lambda = 1$, y todos los demás parámetros positivos. Se observa que los perfiles que presentan son de J traspuesta o forma acampanada, que son en general los perfiles que nos podemos encontrar.

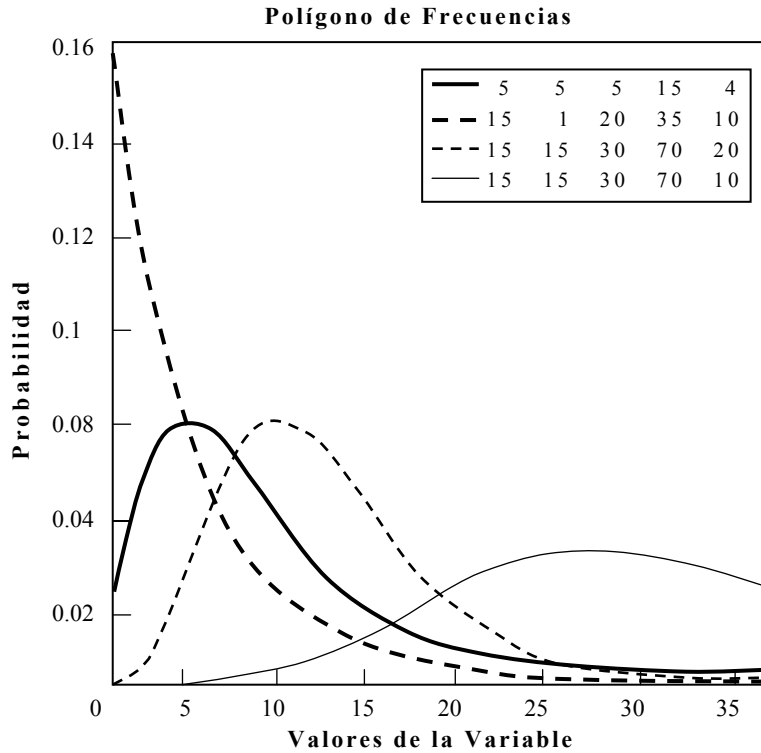


Figura 1. Distribuciones generadas por la ${}_3F_2$ ($\lambda = 1$).

No obstante, a medida que aparecen parámetros negativos, los perfiles se van haciendo más variados, como se puede comprobar en la Figura 2, que corresponde a distribuciones generadas por la ${}_4F_3$ con ($\lambda = 1$). En ella se observan las siguientes pautas:

- Cuando hay una pareja de parámetros negativos no enteros con la misma parte entera, uno en el numerador y otro en el denominador, dentro del rango de valores que toma la distribución, es posible encontrar un máximo o un mínimo relativo en el punto siguiente en valor absoluto a dichos parámetros negativos. El máximo relativo aparece cuando para esa pareja de parámetros negativos el del numerador es mayor en valor absoluto que el del denominador y en el caso contrario aparece un mínimo. Esto sucede en las dos últimas distribuciones representadas. Existen entonces distribuciones con hasta p modas locales si $\lambda = 1$, o $p + 1$ si $\lambda = 1/2$.

- *Si hay dos parejas de parámetros negativos no enteros, una en el numerador y otra en el denominador, con estos mayores en valor absoluto, dentro del rango de valores que toma la distribución, puede aparecer un intervalo donde las probabilidades son prácticamente nulas, determinado precisamente por los puntos cuyos valores son los siguientes en valor absoluto a los que presentan las parejas de parámetros negativos. Tenemos así distribuciones con dos trozos separados como las dos primeras de la Figura 2.
- En la situación anterior, si por el contrario la pareja de parámetros negativos mayor en valor absoluto es la del numerador, entonces en el intervalo que determinan dichas parejas de parámetros se concentra toda la masa de probabilidad.
- Al aumentar el valor de uno de los parámetros del numerador (en valor absoluto) la distribución se desplaza hacia la derecha.
- Lo mismo ocurre si se disminuye el valor de uno de los parámetros del denominador (en valor absoluto).

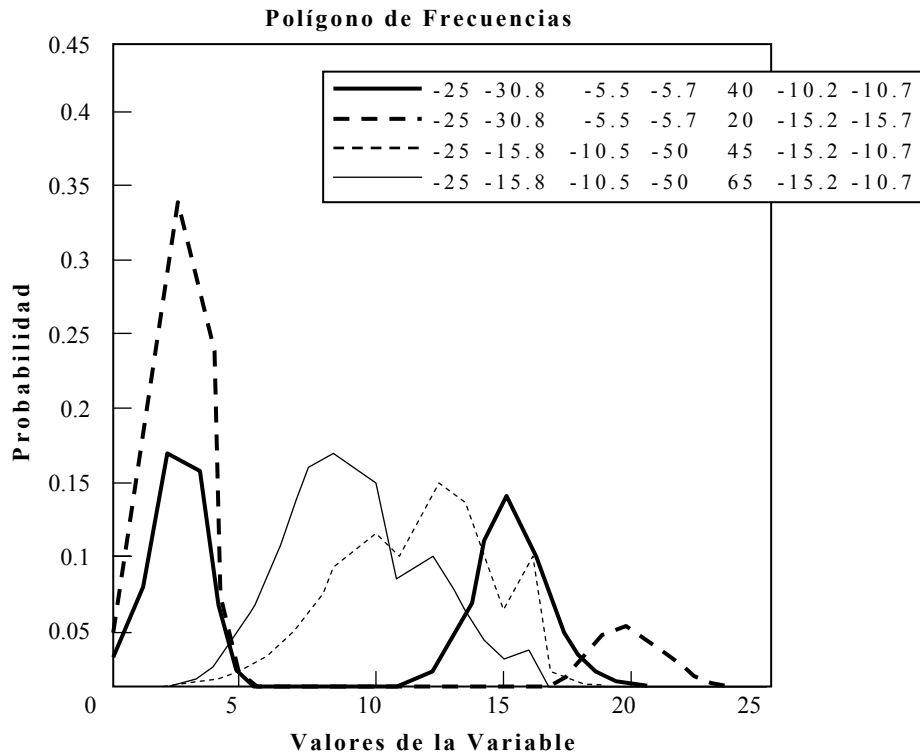


Figura 2. Distribuciones generadas por la ${}_4F_3$ ($\lambda = 1$).

Esto último se puede comprobar analíticamente. Para simplificar, supongamos que los parámetros son positivos y que se aumenta α_1 en una unidad. Entonces llamamos f_r y f'_r a las probabilidades:

$$f_r = f_0 \frac{(\alpha_1+1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!}$$

$$f'_r = f'_0 \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!}$$

donde

$$f_0 = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1+1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!} \right)^{-1}$$

$$f'_0 = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_{p+1})_r \lambda^r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_p)_r r!} \right)^{-1}$$

y hacemos el cociente:

$$\frac{f_r}{f'_r} = \frac{f_0}{f'_0} \frac{(\alpha_1+1)_r}{(\alpha_1)_r} = \frac{f_0}{f'_0} \left(1 + \frac{r}{\alpha_1} \right)$$

Como $f_0 < f'_0$, el cociente anterior para $r = 0$ es menor que 1, por lo que la probabilidad en dicho punto es menor para la distribución en la que hemos tomado $\alpha_1 = 1$. Al ir aumentando r llegará un momento que el cociente se haga mayor que 1 y las probabilidades de dicha distribución estén por encima. De ahí que la distribución se desplace a la derecha. Esto mismo se puede comprobar si α_1 es negativo y se aumenta en valor absoluto. De igual forma se puede observar que si incrementamos un parámetro del denominador se obtiene el efecto contrario.

En la Figura 3 se representan distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_7F_6$. En ella se observan algunas de las pautas expuestas anteriormente. La primera distribución con todos los parámetros positivos tiene una forma acampanada que no presenta irregularidades. Sin embargo, la segunda distribución que ya tiene varios parámetros negativos presenta máximos locales en los puntos 6, 11 y 16 mínimos locales en los puntos 13 y 23, atendiendo a las relaciones referidas previamente. Similar comportamiento se observa en las otras dos distribuciones.

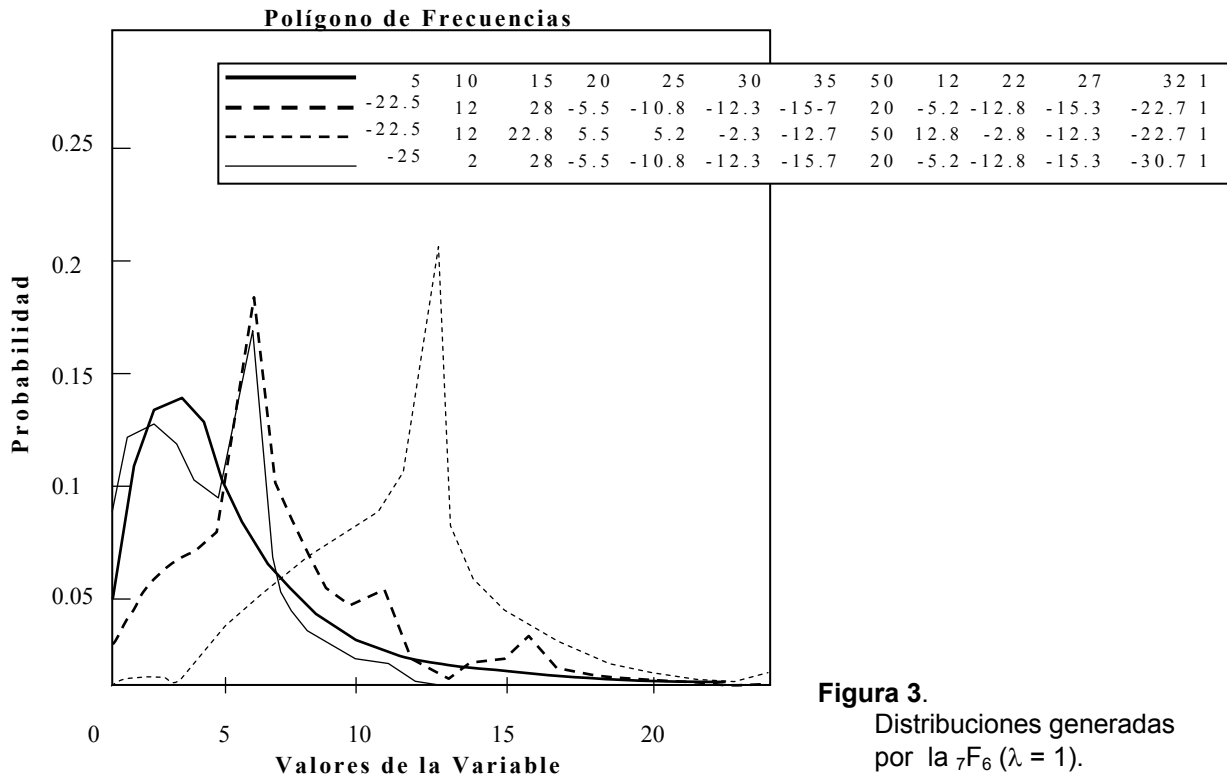


Figura 3.
Distribuciones generadas por la ${}_7F_6$ ($\lambda = 1$).

La Figura 4 muestra polígonos de frecuencias de dos distribuciones generadas por la función hipergeométrica ${}_6F_5$ con $\lambda = 1$, y en las que se vuelve a poner de manifiesto el comportamiento ya señalado anteriormente. Presentan como vemos tres trozos separados con intervalos donde las probabilidades son prácticamente nulas, en concreto los determinados por los puntos 6 y 11, y 18 y 23.

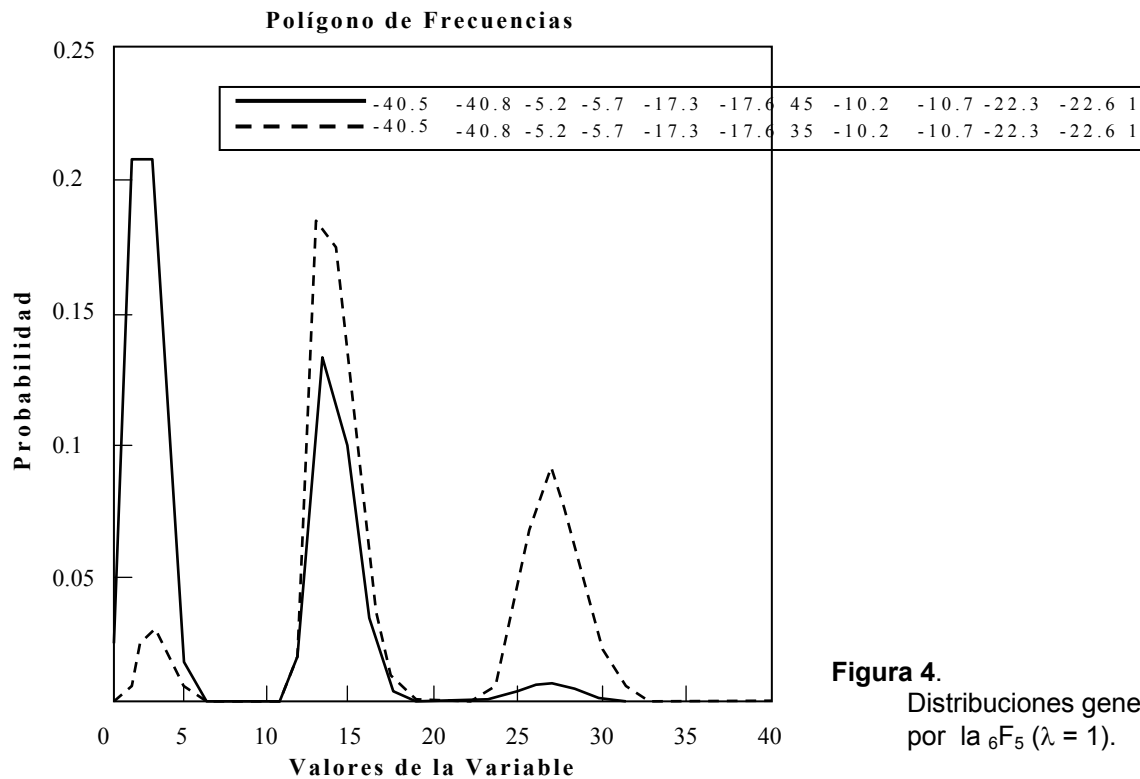


Figura 4.
Distribuciones generadas por la ${}_6F_5 (\lambda = 1)$.

No obstante, es preciso señalar que no siempre se consiguen distribuciones de esta forma ni de las anteriores, aún cuando los parámetros tengan las características ya señalados en cada caso.

Este teorema también permite obtener el correspondiente valor de la esperanza y del momento de orden 2 de las distribuciones así generadas, ya que en las expresiones (11) aparecen funciones hipergeométricas de las consideradas en el teorema 1.

4. ESTIMACION

A partir de la relación de recurrencia (10) es teóricamente fácil estimar los parámetros mediante el método de los momentos. En general, el proceso de estimación para la familia ${}_pF_p$ con $\lambda = 1$ se realiza en dos pasos:

- Planteamiento de un sistema lineal con $2p + 1$ ecuaciones (número de parámetros estimables), dadas por las $2p + 1$ primeras relaciones (10), en donde las incógnitas son los coeficientes de los polinomios $L(r)$ y $G(r + 1)$.
- Obtención de los parámetros a través de las relaciones (5) y (6) con los coeficientes hallados anteriormente. De esta forma los parámetros $\gamma_j - 1$ se obtienen como raíces del polinomio de grado $x^p - b_p x^{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} b_2 x + (-1)^p b_1$ y α_1 son las raíces del polinomio $x^{p+1} + a_p x^p + \dots + (-1)^p a_1 x + (-1)^{p-1} a_0$.

El problema es que cuanto mayor sea el número de parámetros a estimar, mayor es el orden de los momentos que aparecen, y que es necesario que existan, lo cual limita el uso de este método. Una posible alternativa consiste en considerar la ecuación en diferencia de partida, que puede ser expresada de esta forma:

$$\frac{f_{r+1}}{f_r} = \frac{(\alpha_1 + r)_r \dots (\alpha_{p+1} + r)_r \lambda}{(\gamma_1 + r) \dots (\gamma_p + r)(r + 1)} \quad (15)$$

en donde se relacionan los parámetros con las pendientes de la curva observada. Dichas relaciones también se pueden expresar como ecuaciones de un sistema lineal, que es más fácil de implementar, de la siguiente forma:

$$[(r + 1)^{p+1} + b_p r^p + \dots + b_1(r + 1)]f_{r+1} - (a_{p+1} r^{p+1} + a_p r^p + \dots + a_1 r + a_0)f_r = 0 \quad (16)$$

El inconveniente principal es que no se tiene en cuenta toda la información muestral, por lo que se han considerado sistemas compuestos por algunas ecuaciones que relacionan los momentos menor orden, y otras con las probabilidades, de forma que tenemos en cuenta todas las observaciones y se necesita la existencia de momentos de menor orden.

REFERENCIAS

GUTIERREZ JAIMEZ, R. and J. RODRIGUEZ-AVI (1997): "Family of Pearson Discrete Distributions Generated by the Univariate Hypergeometric function ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \gamma_1, \gamma_2; \lambda)$ ". **Appl. Stochastic Models and Data Anal.** 13, 115-125.

IRWING, J.O. (1975): "The generalized Waring distributions", **Journal of the Royal Statistical Society**, Series A, 138, 18-31 (part I), 204-227 (part II), 374-378 (part III).

ORD, J.K. (1972): **Families of frequency distributions**, Griffin, London.

PEARSON, K. (1895): "Memoir on skew variation in homogeneous material", **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, Series A, 186, 343-414.

RODRIGUEZ, J.; R. GUTIERREZ and A. CONDE (2000): "Study of a wide class of univariate discrete distributions generated by the hypergeometric function ${}_3F_2$ ", **Submitted to Annals of the Institute of Statistical Mathematics**.

(1999): "Discrete Distributions Generated by the Hypergeometric Function ${}_4F_3$ ", In: **Applied Stochastic Models and Data Analysis**, Proc. IX International Symp, Lisboa (ed. H. Barcelar-Nicolau, F. Costa-Nicolau and J. Jansen) 200-205. I.N.E. Portugal.

XEKALAKI, E. (1983): "The Univariate Generalized Waring distribution in relation to accident theory: proneness, spells or contagion?", **Biometrics**, 39, 887-895.