Ciencias Matemáticas, Vol. 33, No. 2, Pag. 129-135, 2019
Recibido 02-2018, Aceptado 09-2019

Las oportunidades de aprender Matemáticas desde una perspectiva abarcadora
The opportunities to learn Mathematics from a comprehensive perspective

Dagoberto Acosta Iglesias[1]*, Amaury Pérez Martínez[1, 2], Manuel Guardado Hernández[3]

Resumen Nos centramos básicamente en la necesidad de hacer un proceso de enseñanza-aprendizaje, que permita o que se enfoque en ofrecer oportunidades de un acercamiento real a las Matemáticas, en un ambiente en el que se combinen la formación conceptual, la exploración exhaustiva de las relaciones en un problema, las herramientas alternativas de solución y los recursos de las nuevas tecnologías. A partir de una situación sencilla en la que se modela un proceso productivo, mostramos diferentes análisis sobre el problema y la utilización de herramientas de cómputo que pueden contribuir a un mejor ambiente de aprendizaje en la clase y de acercamiento del conocimiento a cada estudiante, tanto a los de más destrezas y mejores aptitudes, como a los menos diestros, facilitando la manipulación y obtención de los cálculos más prolongados. La propuesta se hace desde la óptica de la experiencia acumulada y algunos principios acerca del proceso de enseñar Matemáticas. Para los cálculos utilizamos el Wolfram Mathematica en la versión 10, y para las soluciones exploratorias se pueden utilizar las bondades del Excel, como recomendamos para el autoaprendizaje de los estudiantes, aunque no descartamos que los más preocupados, puedan hacer sus propios programas para solucionar los problemas.

Abstract This paper is based on the need to make a teaching-learning process which allows or focuses on opportunities of a real approach to mathematics in an environment which combines conceptual training thorough exploration of relationships in a problem, alternative tool solution and new technological resources. From a simple situation in which a production process is modeled, it is shown different analysis over the problem and use tools of computation that can contribute to a better environment approach of knowledge and learning in the class for each student, either to the most advanced students or to the ones of less skilled, facilitating handling and obtaining longer calculations. The proposal is made from the perspective of accumulated experience and some principles about the process of teaching math. For calculations it is used the Wolfram Mathematica in version 10, and for exploratory solutions the benefits of Excel, it is advisable for self-learning of students, although it is not ruled out that the more concerned can make their own programs to solve the problems.

Palabras Clave
Aprendizaje, Razonamiento, Pensamiento Lógico

[1] *Departamento Ciencias de la Tierra, Universidad Estatal Amazónica, Puyo, Ecuador, dacosta@uea.edu.ec, amperez@uea.edu.ec*
[2] *Departamento de Ingeniería Química, Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba*
[3] *Departamento de Matemática, Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba, manuel.guardado@reduc.edu.cu*
***Autor para Correspondencia**

Introducción

La comprensión adecuada de los conceptos matemáticos y la apropiación consciente de las herramientas y algoritmos que esta facilita para resolver problemas de las diversas ciencias no matemáticas, no es una meta que se alcance con facilidad y de forma generalizada, en los cursos de pregrado en las universidades. En este sentido [2] afirman, "Algunas de las respuestas que presentamos permiten observar que el proceso de construcción del concepto por el que pasan los estudiantes es muy complejo y que la mayoría no construye una concepción de tipo acción del mismo". En las distintas carreras, los docentes matemáticos enfrentan el reto de hacer asequible y útil, el proceso de aprender Matemáticas.

Esta irregularidad más que considerarse fácil de resolver, es preocupante y debemos en el ejercicio de la docencia, encontrar alternativas locales, ajustadas al contexto de la clase, que concebidas de forma permanente e integrando varios estándares, garanticen la participación activa de los estudiantes, para que éstos sean parte apreciable en la formación de su propio conocimiento. No seguiremos explícitamente el modelo de aprendizaje centrado en el estudiante, no obstante nos proponemos ofrecer algunas experiencias, que favorezcan la participación del que aprende y lo haga confiar en sus posibilidades y en alguna medida tendremos en cuenta lo siguiente, "El modelo del aprendizaje centrado en el alumno refleja la necesidad de un enfoque tanto en los alumnos como en el aprendizaje". [4]

Tendremos presente la amplia proliferación de las Tecnologías de la Informática y las Telecomunicaciones (TICs) y la aceptación cada vez mayor, de la contribución de determinados paquetes informáticos denominados Asistentes Matemáticos, que aunque no han sido diseñados en principio para su uso docente, pueden utilizarse para este propósito, sin dejar de atender los riesgos que implican su uso, no se trata de emplear las TICs a ultranza, sino en la medida que se necesiten y de forma que tales riesgos se consideren en la implementación de las estrategias que sigamos en las clase.

Las estrategias de enseñanza-aprendizaje pueden dividirse en tres fases, Construcción de Conocimiento; Permanencia del Conocimiento y Transferencia de Conocimiento.[1]. En la etapa de Formación del Conocimiento, a la que dedicaremos básicamente este escrito, consideramos decisivo que los estudiantes sean capaces de alcanzar el siguiente objetivo: establecer una adecuada comunicación en la clase, en la que aprendan a denominar adecuadamente los entes matemáticos, permitiéndole alcanzar un estado de relación con estos objetos, y un acercamiento a la percepción de que pueden confiar en las matemáticas que aprenden, y por tanto facilitar una adecuada construcción de su propio conocimiento.

Consideramos que una adecuada Formación Conceptual y un ambiente en la clase que facilite Confiar en las Matemáticas, contribuyen acertadamente, en la etapa de Construcción del Conocimiento.

1. Métodos

1.1 Caracterización del escenario de aprendizaje

Prestemos atención a los resultados siguientes, que muestran las calificaciones obtenidas en una escala entera de 1 a 10, por las respuestas ofrecidas por un grupo de 95 estudiantes de una población de 111 individuos, que representan el 85.6 % de todos los estudiantes. Las preguntas realizadas como diagnóstico inicial, después de que habían transitado por el curso de cálculo diferencial. Las preguntas fueron: Pregunta 1. Explique con sus palabras, que entiende por derivada de una función. Pregunta 2. Escriba una función que recuerde y calcule la primera derivada.

1.2 Consideraciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje

Según la siguiente definición de proceso de aprendizaje y enseñanza, "Así, las estrategias de aprendizaje son una serie de operaciones cognoscitivas y afectivas que el estudiante lleva a cabo para aprender, con las cuales puede planificar y organizar sus actividades de aprendizaje, mientras que las estrategias de enseñanza se refieren a las utilizadas por el profesor para mediar, facilitar, promover y organizar los aprendizajes"[1], es necesario seguir en el proceso de aprendizaje, una serie de operaciones cognitivas, para aprender, que si no se han formado adecuadamente las definiciones de los objetos, se conforma posiblemente un aprendizaje debilitado, sin un referente claro de qué estamos aprendiendo.

Consideramos importante desde la afirmación anterior que es necesario, hacer énfasis en las definiciones previas a la descripción o ejemplificación de un determinado método de solución de ejercicios y problemas; que debe incluir la correcta denominación de los términos que se manipulan, es decir, el individuo que aprende, no solo debe saber manipular los términos matemáticos, sino que, debe saber describirlos correctamente, de manera que pueda contribuir a una adecuada comunicación con los demás y con el profesor. El National Council of Teachers of Mathematics, en los principios enunciados para la Educación Matemática, reseñado por [3, 6]. El número, agente integrador del conocimiento, refiriéndose a la Enseñanza de la Matemática propone: La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender que los estudiantes saben y necesitan aprender y, entonces, retándolos y desafiándolos aprenderán bien. Apegados a este principio, podemos discernir varios requerimientos contenidos en este postulado, que entre otros, pueden ser los siguientes:

- La "enseñanza efectiva" no solo debe referirse a considerar que ha sido bien concebida y efectuada la clase, sino que debemos incluir herramientas que nos permitan medir que ha sido efectivo el aprendizaje.
- Al referirse a "comprender que los estudiantes saben y necesitan aprender", se puede considerar que esta percepción es parte integrante de las aprehensiones del docente; y no es incorrecto, pero debe también concebirse como una aptitud que debemos formar en el estudiante, pues los sitúa en condiciones de confiar en que pueden asumir los retos que tienen por delante, y en la medida que preparemos el entorno de la clase, en favor de presentar las Matemáticas como un sistema de conocimientos al que se puede acceder, facilitaremos este requerimiento.
- Cuando se propone "retándolos y desafiándolos", es necesario tener presente que debemos al propiciar estos retos, que hayamos preparado las condiciones, es decir, que se haya conseguido que el estudiante esté apropiado de las herramientas precedentes que le permitan escalar nuevos peldaños en el conocimiento. Esta circunstancia puede favorecerse en un ambiente de solución de problemas, en los que el éxito que pueda obtener, no esté totalmente condicionado porque está muy alejado el conocimiento que posee, del que necesita para resolver el problema en cada caso, que no requiera de retos extraordinarios de creatividad, sino que pueda ser creativo, pero en ámbitos cercanos a lo que conoce, para que la posibilidad de éxito sea alcanzable.
- ¿Qué significa "aprenderán bien"?. En este requerimiento podemos detenernos un poco más, pues en principio

podemos distinguir dos etapas en las que podamos constatar o medir que han aprendido bien; uno en el contexto de la propia clase, si son capaces de realizar con éxito las metas propuestas en la actividad sistemática de la clase y en la auto preparación; y una segunda etapa, que puede entenderse en el sentido de la durabilidad del conocimiento como objeto activo, que incluye estar en condiciones de, a partir de la formación recibida, adquirir por si solos nuevos conocimientos; si a corto plazo posterior a los cursos realizados, el conocimiento matemático no perdura, ¿podemos considerar que han aprendido bien?. Esta segunda etapa puede depender mucho de la necesidad de utilizar las herramientas que ofrece la matemática, en su posterior realización profesional, por tanto centrémonos en la primera etapa y pensemos más en cómo alcanzar el objetivo de formar en el estudiante destrezas de razonamiento lógico, de argumentación de criterios con bases científicas, de solidez en sus criterios, que deben garantizar un entrenamiento adecuado para aprender de forma independiente.

1.3 La formación conceptual y los Asistentes Matemáticos. Estudios de casos.

Un problema sencillo de optimización perimetral, en el que se condicionen las mediadas de largo y ancho para un perímetro rectangular, puede conducir a una función objetivo de la clase de las funciones cuadráticas; tal función puede resolverse en términos de encontrar el óptimo, con recursos básicamente algebraicos y geométricos, que solo necesitan interpretarse en términos del máximo o el mínimo. Por esta razón, discurriremos por una problemática que resolveremos sin las herramientas del Cálculo Diferencial, porque no lo requiere, y en otros casos es posible conciliar ambas vías. Se consideraron los siguientes tres casos:

Caso 1. Una pequeña empresa envasa en botellas de la misma capacidad, dos tipos de jugos diferentes; el costo de embotellado del jugo de tipo A es de 27 centavos y el costo del jugo de tipo B, es de 33 centavos, si se dispone de un presupuesto de 1000 dólares, ¿explore cuál es la cantidad máxima y mínima de botellas que se pueden envasar de cualquiera de ambos jugos, con el presupuesto disponible?. [8]

Es muy usual al plantear este tipo de problemas, solo preocuparse por la solución en términos de ofrecer una meta de producción, es decir, prefijar en los datos del problema, cuánto se va a producir; en esta situación, se hace el planteamiento directo del sistema de ecuaciones a resolver y se sigue un método de solución adecuado del sistema de ecuaciones, para decidir cuántas botellas de cada tipo de jugo se deben elaborar. Consideramos es más oportuno, que el individuo comience por valorar hasta que rango se puede ampliar la meta de producción, ajustado al presupuesto.

Caso 2. Una pequeña empresa envasa en botellas de la misma capacidad, dos tipos de jugos diferentes; el costo de embotellado del jugo de tipo A es de 27 centavos y el costo del jugo de tipo B, es de 33 centavos, si se dispone de un presupuesto de 1000 dólares, ¿Explore cuál es la cantidad máxima y mínima de botellas que se pueden envasar de cualquiera de ambos jugos, con el presupuesto disponible?. En el rango en el que el problema está bien plateado, ¿Cuál será la cantidad de cada tipo de jugo, que debe producirse, si los de tipo A generan una ganancia de 6 centavos y los de tipo B de 7 centavos?. Explore otras variantes de valores de ganancias por cada tipo de jugo.

En este caso se añadió en un momento posterior al análisis realizado, alguna información al problema, relacionada con los precios de venta y se propone el reto de decidir cuál es la proporción más adecuada en la meta de producción para jugos de un tipo o de otro.

Caso 3. Una pequeña empresa envasa en botellas de la misma capacidad, dos tipos de jugos diferentes; el costo de embotellado del jugo de tipo A es de 27 centavos y el costo del jugo de tipo B, es de 33 centavos, si se propone una meta de producción de 4000 unidades, explore cuál es el rango en el que el problema está bien plateado, en términos del presupuesto del que se debe disponer. ¿Cuál será la cantidad de cada tipo de jugo, que debe producirse, para que las ganancias sean máximas?.

El problema se planteó en términos de que, se decida los costos mínimos a partir de proponer un nivel de producción total de ambos jugos, encontrando un rango de valores para los costos y en ese rango identificar cómo se debe producir para minimizar los costos.

2. Resultados y Discusión

2.1 Desempeño en el escenario de aprendizaje

Los resultados del diagnostico muestra el comportamiento de las calificaciones de todos los estudiantes diagnosticados. En la figura 1, se puede apreciar una tendencia clara a la acumulación de una mayor cantidad de estudiantes con calificaciones inferiores o similares al cincuenta por ciento, esto se evidencia al calcular la media (3,89) y la desviación estándar (2,39). Esto refleja una notable separación del valor esperado, cercano a una nota de aprobado y de una desviación menos dispersa, que mantendría la mayoría de las calificaciones cercanas a la nota de siete puntos. Así mismo se aprecia una cantidad menos significativa de estudiantes con calificaciones de aprobado, y un grupo aceptable de estudiantes con calificaciones que reflejan un sesenta por ciento de aprovechamiento. Este comportamiento se obtiene en una tendencia similar, representada por cada uno de los grupos individuales, ver figura 2.

En las respuestas obtenidas, se aprecia una baja formación conceptual, en lo referido a la derivada, tema precedente al período de realización del diagnóstico; que en nuestra consideración es importante que esté creada, al finalizar cada tema estudiado, pues de otra forma, no se cuenta con los indicadores necesarios que faciliten la manipulación consciente de los objetos matemáticos, en los procedimientos y algoritmos de cálculo. Una estrategia de aprendizaje en la que no se facilite,

Figura 1. Cantidad de estudiantes por cada categoría de calificaciones.

la identificación en los procesos de cálculo de sus diferentes componentes, a partir de las definiciones de estos, no facilita una buena comunicación entre estudiantes y de estos con los docentes. Las dificultades descritas, se enmarcan en la temática de Cálculo Diferencial, centradas en la inadecuada formación del concepto de derivada y su pobre manipulación, que quedaron evidenciadas en las respuestas deficientes. También subsisten deficiencias en la manipulación algebraica, no todos los estudiantes son hábiles, ni tienen suficientes destrezas en el trabajo con desigualdades, ecuaciones e inecuaciones, y en la utilización de estas, para razonamientos contextuales, que le permitan resolver problemas y obtener conclusiones.

2.2 Análisis de los estudios de casos.

Al analizar las diferentes posibilidades, puede considerarse que el máximo de producción está vinculado a la cantidad máxima de botellas de menor costo de producción, que se pueden llenar con el presupuesto disponible, por tanto en el planteamiento del problema, no se puede exceder esa cantidad, que con los datos ofrecidos, es de tres mil setecientas tres unidades, resultado de dividir el monto del presupuesto por el menor de los costos, incluso se puede inferir que proponerse envasar mayor cantidad, conduce a que una de las soluciones del sistema de ecuaciones asociado, es negativa, en contradicción con las condiciones del problema. Puede obtenerse que la cantidad mínima a producir de cualquiera de las dos marcas, se dirige a la de mayor costo de producción, y se obtiene ese valor inferior de producción, cuando se divide el presupuesto entre el mayor de los costos de envasado, resultando tres mil treinta y una unidades. La combinación de estas dos decisiones, genera la conclusión de que el problema resulta bien plateado, si la meta de producción se propone en este rango de valores. Este tipo de razonamientos, sitúan al estudiante en mejores condiciones de familiarizarse con la toma de decisiones, al enfrentarse a situaciones de problemas, no totalmente elaborados. Para hacer una exploración exhaustiva de las diferentes soluciones, se puede utilizar en el ambiente de la clase la función Solver de Microsoft Excel y Asistentes Matemáticos.

Se muestra cómo quedan las soluciones en los siguientes tres casos y su interpretación correspondiente en cada uno. Esto permite realizar un análisis más amplio del problema. Con la utilización de estas herramientas. Se evita desgastar al estudiante en cálculos, que si no son muy complicados, consumirían demasiado tiempo, sobre todo a los menos hábiles en las manipulaciones matemáticas.

El análisis para cinco soluciones relacionadas con el Caso 1, se muestran a continuación:

Solución 1. Se considera un valor de la meta de producción en el exterior del rango de valores analizados antes, exactamente el valor inmediato anterior a la cantidad mínima a producir, es decir, tres mil treinta unidades.

NSolve[0.27x+0.33y==1000, x+y==3030, x,y]

$x \to -1{,}666666666666515, y \to 3031{,}6666666666665$

Se obtiene una solución incompatible con el contexto del problema, específicamente para la primera variable, que representa la cantidad de botellas del jugo de tipo A.

Solución 2. Se considera un valor de la meta de producción en el rango de valores analizados antes, exactamente el valor igual a la cantidad mínima a producir, es decir, tres mil treinta y una unidades.

NSolve[0.27x+0.33y==1000, x+y==3031, x,y]

$x \to 3{,}83333333333303, y \to 3027{,}166666666667$

Estas soluciones son válidas en el contexto del problema y será similar para los casos en que elegimos un valor intermedio del intervalo determinado por la cantidad mínima y máxima para la meta de producción, y para el extremo derecho de tal intervalo.

Solución 3. Se considera un valor de la meta de producción en el rango intermedio de valores analizados antes, específicamente tres mil sesenta y siete unidades.

NSolve[0.27x+0.33y==1000,x+y==3067, x,y]

$x \to 201{,}83333333333348, y \to 2865{,}1666666666665$

Solución 4. Se considera un valor de la meta de producción en el rango de valores analizados antes, exactamente el valor igual a la cantidad máxima a producir, es decir, tres mil setecientas tres unidades.

NSolve[0.27x+0.33y==1000,x+y==3703, x,y]

$x \to 3699{,}8333333333344, y \to 3{,}1666666666656815$

Solución 5. Consideremos un valor de la meta de producción en el exterior del rango de valores analizados antes, exactamente el valor inmediato posterior a la cantidad máxima a producir, es decir, tres mil setecientas cuatro unidades.

[NSolve[0.27x+0.33y==1000,x+y==3704, x,y]

$x \to 3705{,}333333333334, y \to -1{,}3333333333340156$

Se obtiene una solución incompatible con el contexto del problema, específicamente para la segunda variable, que representa la cantidad de botellas del jugo de tipo B. Para las soluciones dos, tres y cuatro, es necesario valorar de conjunto con los estudiantes, como interpretar estas soluciones no enteras, y ajustarlas al presupuesto, del que se dispone. Se sugiere utilizar las reglas de redondeo o si fuera necesario, adaptar la decisión al contexto. En esta parte de la solución, es donde se analiza la adecuación o no de las soluciones a la realidad del contexto del problema, es decir, cuando interpre-

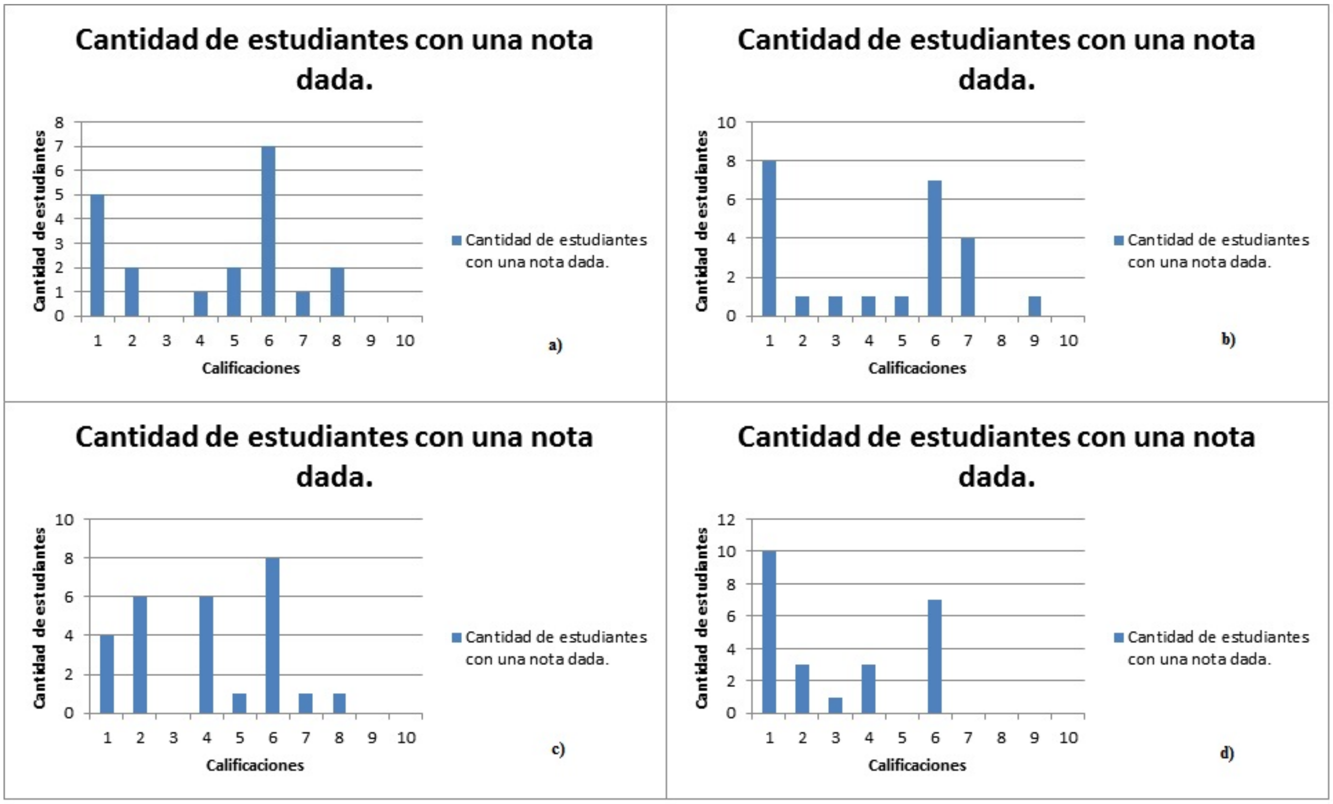

Figura 2. Calificaciones por grupos de estudiantes

tamos las soluciones del modelo matemático construido para resolverlo, que enmarcándolo en las Etapas de Solución de Problemas de Polya,[7, 5] se puede considerar que se ubica en la etapa Mirar Hacia Atrás, debemos hacer énfasis a partir de la definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales; que esta precisión conceptual necesita en estas circunstancias, adicionar que sea compatible la solución Matemática, con una solución acertada al problema. Es solo quizás enfatizar en que una solución al problema real requiere alguna descripción adicional, a la definición general de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

En la valoración del Caso 2 se puede orientar el razonamiento hacia un análisis general para obtener el rango de valores adecuados para la variable meta de llenado de las botellas, dependiendo del presupuesto disponible para que el problema esté bien planteado. Denominamos esta variable por M, y la relacionada con el presupuesto disponible por P. En los términos del problema planteado, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, en el que se considera que está determinada la variable P, designando con x la variable que representa el jugo de tipo A y con y, la variable que representa el jugo de tipo B.

$$\begin{aligned} x+y &= M; \\ 0{,}27x+0{,}33y &= P \end{aligned} \tag{1}$$

Las soluciones del sistema serán,

$$x = ((0{,}33M-P)/0{,}06); y = ((P-0{,}27M)/0{,}06) \tag{2}$$

como las variables pueden tener solo soluciones positivas, llegamos a las siguientes condiciones para la meta de producción,

$$P/(0{,}33) \leq M \leq P/(0{,}27) \tag{3}$$

Es sencillo arribar a que para el presupuesto inicial de 1000 dólares, estas cotas de la meta de producción, sean $3031 \leq P \leq 3703$. La combinación del razonamiento anterior con las conjeturas hechas al inicio sobre los rangos admisibles de la meta de producción, permiten llevar al estudiante de situaciones en las que puede moverse de situaciones particulares a generales, utilizando argumentos adecuados y recíprocamente, cuando verifica que la situación particular del problema resuelto, se obtiene del razonamiento general.

Esta parte de la solución requiere de algún Asistente Matemático en el que podamos organizar los cálculos. Este proceso de cálculo, aunque está propuesto en términos de optimización, no necesariamente debemos disponer de tales técnicas desarrolladas en el ambiente de la clase, es suficiente preparar una solución exploratoria, con un Asistente Matemático, de los más amigables, como puede ser el Excel o el Derive, que contribuyen a situar a los estudiantes en condiciones similares de habilidad en los cálculos, porque al acceder a la automatización de estos, requiere de menos esfuerzo en estas circunstancias y de la utilización de tiempos similares. Es indispensable un análisis respecto a cómo se deben organizar los cálculos, con el auxilio del Asistente Matemático. Este se recomienda realizarse de conjunto en la clase, ofreciendo las ideas esenciales para que los que aprenden, puedan organizar adecuadamente los cálculos. Ubicados en el problema inicial, según las desigualdades (3) obtenidas de las soluciones del sistema (1), el rango de valores de la meta, resulta en el intervalo $3031 \leq P \leq 3703$, destacando que solo se consideran números enteros, por tanto, es necesario resolver el sistema para cada valor entero de la meta, con el presupuesto asignado y calcular las ganancias para cada solución, atendiendo a las que produce cada botella de cada tipo de jugo, como resultado de multiplicar la cantidad de botellas de cada uno, por la ganancia por unidad, posteriormente se compara en el vector de resultados y se selecciona el mayor valor de ganancia, asociado al nivel de producción dado. Implementación de los cálculos siguientes en Excel por parte de los estudiantes:

$$\begin{aligned} &0,06x+0,07y;\\ &0,07x+0,06y;\\ &0,06x+0,06y;\\ &0,13x+0,07y;\\ &0,07x+0,07y \end{aligned} \tag{4}$$

donde las variables $x-y$ representan la cantidad producida de cada jugo y extendiendo el cálculo al rango de todos los posibles valores de las variables, en el contexto del problema, es sencillo percatarse que en todos los casos, el comportamiento lineal de las ganancias, genera un proceso ascendente de ganancias, que resulta máximo para el mayor nivel de producción posible. En otro acercamiento a las ganancias, identificado con las cantidades producidas, propongamos las siguientes funciones de ganancia unitaria, para cada tipo producido, sean

$$G_A(x;y) = (x^2y-x)/M^2;\ G_B(x;y) = (xy^2-y)/M^2 \tag{5}$$

La función de ganancias total queda,

$$G(x;y) = (x^2y+xy^2-x-y)/M^2 = (xy-1)(x+y)/M^2 \tag{6}$$

Como las variables están ligadas a la condición $x+y=M$, la función de ganancias resulta,

$$G(x;y) = (xy-1)/M \tag{7}$$

Mostremos en este momento, como es posible comenzar a inducir métodos para encontrar el óptimo en circunstancias como la que seguimos, en las que no es necesario utilizar técnicas de cálculo diferencial u otras avanzadas, sino que con un razonamiento algebraico, encontramos el óptimo, incluso las herramientas que vamos a seguir, se basan en propiedades de las funciones elementales, concretamente de las funciones cuadráticas, veamos. Sustituyendo en (6) la condición que cumplen las variables, queda,

$$\overline{G(x)} = (x(M-x)-1)/M = (-x^2+M*x-1)/M \tag{8}$$

No es difícil verificar que esta función cuadrática, tiene un máximo en $x=(M/2)$ y este vale $G(M/2) = (M/4)-(1/M)$. Este valor indica que con ganancias unitarias como las propuestas, el proceso puede diseñarse de forma que éstas alcancen casi el 25 por ciento del presupuesto invertido, resultado que parece razonable y quizás bajo ciertas normas, justo, si no situamos como única exigencia, las ganancias producidas, sino otras requerimientos de índole más social. Estas consideraciones sociales, nos permite instruir en las matemáticas y hacer un enfoque humanista del procesos de aprender ciencias básicas en general. En el Caso 3 es necesario realizar una exploración de la producción de ambos jugos para maximizar las ganancias. Se muestra a continuación un código desarrollado en Octave que permite graficar simultáneamente las condiciones del problema y la función de ganancias en el rango de los valores para la meta de producción, donde se muestra geométricamente, que hay un punto de máximo para la función de ganancias.

Código en Octave.

```
close all
x = 1:100:3031;
y = 1:100:3031;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z = X + Y - 3031;
mesh(X, Y, Z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
hidden off
hold on
W = 0.27*X + 0.33*Y - 1000;
mesh(X, Y, W)
hidden off
hold on
plot3(x,3031 - x,(x.*(3031 - x)-1)/3031)
```

Obtenidas estas soluciones, pueden encontrarse otras aristas del problema que puede ser objeto de análisis, como por ejemplo, las soluciones obtenidas, en general, no son números enteros, para las variables de la meta de producción, por tanto cuando estos valores son redondeados por defecto, en todos los casos (no es posible seguir las reglas de redondeo, por las circunstancias reales), puede suceder que se disponga de un excedente de capital y podemos orientar entonces el razonamiento en la dirección de si puede ser usado en la toma de decisiones, después de conocida la solución matemática. Notémoslo por ejemplo en las soluciones del caso en que la meta de producción es de tres mil cuatrocientos cincuenta unidades.

Las soluciones se corresponden con dos mil trescientos ocho unidades de jugo de tipo A y mil ciento cuarenta y uno de jugo de tipo B; estos niveles de producción no agotan el presupuesto, según los costos previstos y queda un remanente, que puede ser aún utilizado; pero lo más importante, es interesar a los alumnos por esta circunstancia, que forma parte de la toma de decisiones y no aparece explícitamente en las soluciones matemáticas iniciales, obtenidas con el Asistente Matemático, estimulando así, un análisis exploratorio complementario, ex-

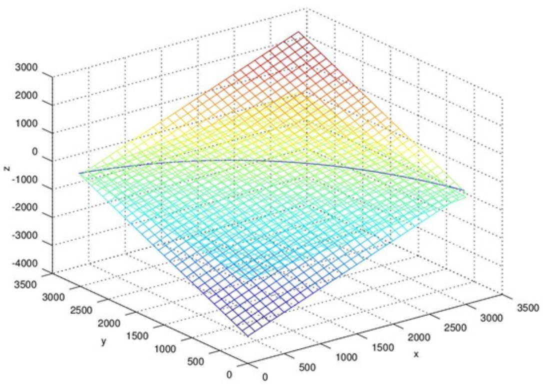

Figura 3. Función de ganancias para el rango de valores del parámetro meta de producción.

haustivo de la solución del problema. Concretamente en esta solución, se invierte 999,69 dólares, restando 31 centavos por invertir, que no alcanzan para producir una unidad de jugo de tipo B, pero alcanza para producir una unidad de jugo tipo A, que eleva el nivel de producción de este a dos mil trescientos nueve unidades a un costo de 999,96 dólares, restando ahora solo 4 centavos por invertir, que no pueden en principio ser insertados en la producción. De forma similar se verifica que si el resultado de la variable y se redondea por exceso, según las reglas de redondeo, el presupuesto a utilizar supera los mil dólares y no es factible.

Un análisis similar se puede realizar en estas condiciones, pues utilizando las soluciones (2) se puede arribar ahora al siguiente rango de valores admisibles, para la variable presupuesto, en términos de la variable meta de producción, $0{,}27M \leq P \leq 0{,}33M$, que genera a partir de la meta de producción el intervalo $1080 \leq P \leq 1320$, realizando análisis similares a los hechos en la forma inicialmente planteada del problema.

3. Conclusiones

La propuesta realizada, no tiene otra finalidad que no sea, acercar la labor del docente de Matemáticas a las realidades en las que podemos enseñar, situados en la inmensa oportunidad que ofrecen las tecnologías de la informática, sobre todo en la aportación de innumerables recursos de cálculo. Estos recursos utilizados con sentido creativo y de razonamiento, más que de manejo de funciones y comandos, sin un sentido claro de por qué se hace. En un escenario de aprendizaje como el descrito al inicio, en contextos precedentes que hayan transcurrido con ciertas deficiencias, como pocas destrezas en los cálculos o una formación conceptual inadecuada, es posible obtener éxito sin dejar de lado a los estudiantes menos adiestrados; incluso continuando el desarrollo de los estudiantes con mejores habilidades formadas o más aptitudes para aprender Matemáticas. Con la ayuda de las computadoras o especialmente de un Asistente de Cálculo, que facilite realizar las tareas que más esfuerzo y tiempo requieren, se puede estimular el aprendizaje de nuevos temas, pues nos va acercando de algún modo, más al éxito en el proceso de aprender y nos permite disponer de más tiempo para nuevas tareas y para utilizarlo mejor en función de las necesidades de cada estudiante. Nos parece oportuno señalar finalmente, que en dependencia del nivel de dificultad de cada etapa en la solución del problema, el docente debe atender en la clase y en la orientación del autoaprendizaje, a las diferencias individuales, implicando a los estudiantes atendiendo a sus posibilidades en ese momento de su formación, para llevarlos a estado deseado de aprendizaje, sin violentar sus posibilidades, ofrecerle confianza en ellos y estimulándolos a tener éxito.

Acknowledgments

Los autores le agradecen a la Universidad Estatal Amazónica por facilitar la realización del presente trabajo.

Referencias

[1] Y. Campos. *Estrategias didácticas apoyadas en tecnología.* DGENAMDF, 2000.

[2] L. A. Hernández-Rebollar and M. Trigueros Gaisman. Acerca de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática*, 24:67–87, 2012.

[3] Castro Martínez E. Ruiz López F. González López M. J. Gairín Sallán J. M. Marín del Moral, A. and S. Guerrero Hidalgo. *El número : agente integrador del conocimiento.* Ministerio de Educación Cultura y Deporte, Subdirección General de Información y Publicaciones, 2004.

[4] B. L McCombs and J. S. Whisler. *The learner-centered classroom and school.* Jossey-Bass, 1997.

[5] RubÃ G. Moreno, M. and S. Pou. Panorama y actualidad de la enseñanza basada en la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Quaderns Digitals*, 63, 2010.

[6] National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

[7] G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, 1976.

[8] J. Stewart. *Cálculo de una Variable: Trascendentes tempranas.* Cengage Learning, 2012.