POLITICA OPTIMA DE REPOSICION DE UN INVENTARIO ESTOCASTICO DE UNIDADES DISCRETAS CON COLA EN LA DEMANDA

J.M. Egusquiza Arrizabalaga, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad del País Vasco, Bilbao, España

RESUMEN

En este trabajo se deriva la política óptima de inventario correspondiente a un modelo estocástico de unidades discretas en revisión continua y plazo de aprovisionamiento nulo, en el que la llegada de los clientes se produce de acuerdo a un proceso de Poisson. Se considera, asimismo, que la acumulación de los artículos en stock afecta sensiblemente la fluidez en el servicio de entrega de estos a los clientes, lo que conlleva a la formación de una cola en los pedidos de demanda. Como consecuencia de ello, a las habilidades componentes del costo que se incorporan a la función objetivo, se añade otra denominada costo de espera en la demanda.

Palabras clave: inventario/producción, modelos estocásticos, colas.

ABSTRACT

This paper describes the optimal policy corresponding to a continuous review stochastic inventory system wich units are withdrawn one at a time. Poisson demand and zero lead time are considered. The accumulation of items in stock affects the fluidity in the delivery service, in such way that a customer queue is formed. As a result of it a demand waiting cost component is added to the objective function.

Key words: inventory/production, stochastic models, queues.

MSC: 90B05

1. INTRODUCCION

La política óptima de inventario que se va a obtener corresponde a un modelo derivado del propuesto por Sivazlian (1974) para distribución arbitraria de los tiempos entre llegadas de clientes y demanda unitaria. A las hipótesis habituales se añade la consideración de que la acumulación de artículos en stock afecta la fluidez en el servicio de entrega de éstos a los clientes, formándose una cola en las órdenes de demanda. Este supuesto lleva asociada una componente adicional del costo denominada costo por espera en la demanda, que es la penalización en que se incurre por la espera de los clientes desde su llegada al sistema hasta que terminan de ser servidos. Las hipótesis (H1) bajo las que opera el modelo son:

- Modelo estocástico de unidades discretas con demanda unitaria.
- Política de reposición de inventario en revisión continua del tipo (s,Q): cuando la posición de inventario alcanza el nivel s se efectúa un pedido de tamaño constante Q.
- Plazo de aprovisionamiento nulo.
- Componentes del costo:

  a) *Costo de aprovisionamiento*, formado por una componente fija y otra variable, función de Q: K+cQ.

  b) *Costo de mantenimiento de inventario*, h, por unidad de tiempo y artículo.

  c) *Costo por espera en la demanda*, C, por unidad de tiempo y cliente.
- Llegada de clientes de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro λ.
- Canal único de entrega de artículos a la demanda, siendo los tiempos de entrega (servicio) de los artículos a los clientes variables aleatorias independientes con distribución exponencial común de parámetro μ. Se supone que existe una relación lineal creciente entre el tiempo medio de servicio y el tamaño del pedido de aprovisionamiento, relación que refleja la dificultad en la entrega debida a la acumulación de existencias en el stock:

- El costo total esperado por unidad de tiempo, expresado como función de s y Q es

$$1/\mu = \alpha + \beta Q, \alpha \geq 0, \beta > 0 \tag{1}$$

- La tasa media de servicio μ excede a la tasa media de llegadas λ, de modo que el modelo alcanza después de un período transitorio la condición de estado estable:

$$\rho = \lambda/\mu < 1 \tag{2}$$

Como consecuencia de las características descritas sobre el tipo de llegadas y de servicio, se forma una cola en la demanda del tipo M/M/1.

- Se selecciona la función objetivo como el costo total promedio por unidad de tiempo.

2. DISTRIBUCION EN ESTADO ESTACIONARIO DEL NUMERO DE UNIDADES EN STOCK

Según establece Burke (1956), la salida de una cola M/M/1 en estado estacionario se produce de acuerdo a un proceso de Poisson con el mismo parámetro de entrada λ. De este modo, los intervalos entre sucesivas salidas de dos clientes consecutivos forman una sucesión de variables aleatorias $\{X_i\}$ independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución común exponencial de parámetro λ.

Considerando que el nivel de inventario disminuye en una unidad cada vez que un cliente lo abandona, los instantes de salida son los instantes en los que los artículos abandonan el stock en el modelo de Sivazlian. Por tanto, al igual que en ese modelo, la probabilidad en estado estacionario P_n de que el nivel de inventario sea n es

$$P_n = 1/Q,\ n = s+1, s+2, \ldots, s+Q; \tag{3}$$

es decir, la distribución uniforme discreta en el conjunto $\{s+1, s+2, \ldots s+Q\}$.

3. FUNCION OBJETIVO

Como el número de clientes que abandonan el sistema por unidad de tiempo es λ y cada uno de ellos retira un artículo, el tiempo esperado E[Y] entre dos pedidos de aprovisionamiento consecutivos será

$$E[Y] = Q/\lambda \tag{4}$$

El nivel de stock esperado en cualquier instante de tiempo es

$$E[N] = \sum_{n=1}^{Q} (s+n) P_n \tag{5}$$

Llevando el valor de P_n a la anterior expresión se tiene

$$E[N] = \sum_{n=1}^{Q} (s+n) \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{(s+1)+(s+Q)}{2} Q = s + (Q+1)/2 \tag{6}$$

Por otro lado, véase Saaty (1983), el tiempo medio de espera para cada cliente en un sistema M/M/1, no estando acotados ni el tamaño de la población ni el número máximo de clientes permitidos en la cola, es

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \tag{7}$$

Entre dos pedidos de aprovisionamiento consecutivos se entregan Q artículos a otros tantos clientes; por tanto, el costo total esperado por espera en el servicio a la demanda es

$$C \cdot \frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \cdot Q = \frac{CQ}{\mu - \lambda} \tag{8}$$

El costo total esperado por unidad de tiempo, expresado como función de s y Q es

$$F(s,Q) = (K + cQ)/E[Y] + h \cdot E[N] + \frac{CQ}{\mu - \lambda} \cdot \frac{1}{E[Y]} \tag{9}$$

De (4) y (6) se tiene

$$F(s,Q) = K\lambda / Q + c\lambda + h\left[s + \frac{Q+1}{2}\right] + \frac{C\lambda}{\mu - \lambda} \tag{10}$$

Por último, usando la relación (1),

$$F(s,Q) = K\lambda / Q + c\lambda + h\left[s + \frac{Q+1}{2}\right] + \frac{C\lambda}{\frac{1}{\alpha + \beta Q} - \lambda} \tag{11}$$

donde s es un entero no negativo y Q un entero positivo.

4. REGLAS DE DECISION OPTIMAS

Lema 1: Sea f(x) una función estrictamente convexa en el intervalo (a,b) $\subset \Re$ y tal que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \infty; \tag{12}$$

entonces, existe un único $x^* \in (a,b)$ en el que la función alcanza un mínimo global.

Demostración: De (12) se sigue que existirán puntos a la derecha de a en los que f(x) es decreciente y puntos a la izquierda de b en los que es creciente. Al ser f(x) estrictamente convexa en un intervalo abierto, y por tanto continua, existirá un único x* en el que la función pasa de decreciente a creciente. Por último, toda función convexa definida sobre un conjunto convexo que posee un mínimo local es también mínimo global. ■

Lema 2: Sea f(x) una función estrictamente convexa en el intervalo abierto I $\subset \Re$ y sea $x^* \in$ I un punto en el que alcanza un único mínimo global. Entonces, la restricción de f(x) a I $\cap$ N, f(n), tiene un mínimo global en p, en q, o en ambos puntos a la vez, siendo

p = Parte entera $\{x^*\}$

q = Parte entera $\{x^*\}$ + 1

Demostración: Como f(x) es estrictamente convexa y tiene un único mínimo global en el punto x^* será decreciente a la izquierda de este punto, por lo que f(p) < $f(x_i)$, x_i entero, $x_i \in$ I, x_i < p. Además, será creciente a la derecha de x^* y f(q) < $f(x_i)$, x_i entero, $x_i \in$I, x_i > q. Entonces, si f(p) < f(q) será f(p) < $f(x_i)$ para todo x_i entero, $x_i \in$ I, lo que significa que f(n), n $\in$ I $\cap$ N, tiene un mínimo global en p. Razonando de modo análogo, si f(p) > f(q) la función f(n), n $\in$ I $\cap$ N, tiene un mínimo global en q. Si f(p) = f(q) el mínimo global de f(n) se alcanza en p y en q. ■

Proposición 1: La política óptima de inventario para un modelo que opera bajo las hipótesis (H1) es s^* = 0; Q^* que verifica:

$$\begin{aligned} &\frac{K}{Q^*(Q^*+1)} - \frac{C\beta}{[1-\lambda(\alpha+\beta Q^*)][1-\lambda(\alpha+\beta(Q^*+1))]} \le \frac{h}{2\lambda} \le \\ &\le \frac{K}{Q^*(Q^*-1)} - \frac{C\beta}{[1-\lambda(\alpha+\beta Q^*)][1-\lambda(\alpha+\beta(Q^*-1))]} \end{aligned} \tag{13}$$

con la condición: 1- $\alpha\lambda$ > 0. (14)

Demostración: La función (11) es separable en las variables s y Q: $F(s,Q) = F_1(s) + F_2(Q)$, siendo $F_1(s) = c\lambda + h(s+1/2)$, cuyo valor óptimo es $s^* = 0$, y siendo

$$F_2(Q) = \frac{K\lambda}{Q} + \frac{hQ}{2} + \frac{C\lambda}{\frac{1}{\alpha+\beta Q} - \lambda} \tag{15}$$

Considérese la función real de variable real

$$F_2(x) = \frac{K\lambda}{x} + \frac{hx}{2} + \frac{C\lambda}{\frac{1}{\alpha+\beta x} - \lambda} \tag{16}$$

definida en el intervalo $(0,b) \subset \Re$, siendo $b = (1-\alpha\lambda)/(\beta\lambda)$, que es un valor real positivo siempre que se cumpla (14). Esta función es estrictamente convexa en (0,b) y verifica

$$\lim_{x\to 0^+} F_2(x) = \lim_{x\to b^-} F_2(x) = \infty$$

por lo que, de acuerdo al lema 1, $F_2(x)$ posee un mínimo global en (0,b). Además, por el lema 2, la restricción de $F_2(x)$ a $(0,b) \cap N$, que es $F_2(Q)$, alcanza un mínimo global para uno o dos valores $Q^* \in (0,b)$ que verifican

$$F_2(Q^*) - F_2(Q^*-1) \le 0; \quad F_2(Q^*) - F_2(Q^*+1) \le 0 \tag{17}$$

De la primera condición (17) se tiene:

$$\frac{K\lambda}{Q^*} + \frac{hQ^*}{2} + \frac{C\lambda}{\frac{1}{\alpha+\beta Q^*} - \lambda} - \frac{K\lambda}{Q^*-1} - \frac{h(Q^*-1)}{2} - \frac{C\lambda}{\frac{1}{\alpha+\beta(Q^*-1)} - \lambda} \le 0 \tag{18}$$

o sea

$$\frac{K}{Q^*(Q^*-1)} - \frac{C\beta}{[1-\lambda(\alpha+\beta Q^*)][1-\lambda(\alpha+\beta(Q^*-1))]} \ge \frac{h}{2\lambda} \tag{19}$$

Análogamente, de la segunda condición (17),

$$\frac{K}{Q^*(Q^*+1)} - \frac{C\beta}{[1-\lambda(\alpha+\beta Q^*)][1-\lambda(\alpha+\beta(Q^*+1))]} \le \frac{h}{2\lambda} \tag{20}$$

Reuniendo las expresiones (19) y (20) se obtiene (13). ■

Por último, es importante señalar que como $Q^* \in (0,b)$, $Q^* < b$, o sea $Q^* < (1-\alpha\lambda)/(\beta\lambda)$. Ello implica que $\alpha + \beta Q^* < 1/\lambda$ alcanzándose, en consecuencia, el estado estacionario correspondiente a la hipótesis (2).

Ejemplo: Sean $K = 5000$; $\lambda = 0{,}1$; $h = 5$; $\alpha = 0$; $\beta = 0{,}2$; $C = 20$. Llevando estos valores a la expresión (13) se deduce la política óptima de reposición de inventario: $s^* = 0$; $Q^* = 12$. Para el modelo de Sivazlian (sin costo por espera en la demanda) se obtiene: $s^* = 0$; $Q^* = 20$.

REFERENCIAS

BURKE, P.J. (1956): "The Output of a Queueing System", **Operations Research**, 4, 699-704.

SAATY, T.L. (1983): "Elements of Queueing Theory With Applications", **Dover Publications**, New York.

SIVAZLIAN, B.D. (1974): "A Continuous-Review (s,S) Inventory System with Arbitrary Interarrival Distribution between Unit Demand", **Operations Research**, 22(1), 65-71.