Demostración de la unicidad del ciclo de Collatz

MSc. Denis Martínez Tápanes (denismt@ucm.vcl.sld.cu)
Universidad de Ciencias Médicas, Santa Clara

Dr. José Enrique Martínez Serra (josee@uclv.edu.cu)
Universidad Central Marta Abreu, Las Villas

Resumen

En este artículo se ofrece una demostración de una subconjetura de la conjetura de Collatz enunciada en 1937, en particular se demuestra la unicidad del ciclo de Collatz, y queda expresada la necesidad de la demostración de dicha conjetura.

Abstract

In this article it´s offers a demonstration of a sub-conjecture of the Collatz´s conjecture enunciated in 1937, in particular the uniqueness of the Collatz´s cycle is demonstrated, and the necessity of the demonstration of this conjecture is expressed.

1. Introducción

En 1937, el matemático alemán Lothar Collatz enunció una tesis que se ha mantenido incólume hasta nuestros días. Su aseveración ha llegado a nombrarse con el tiempo como: «Conjetura de Collatz», aunque también ha recibido otras denominaciones, entre las que se encuentran: problema de Siracusa, problema de Kakutani, problema de Ulam o problema $3x + 1$, esta última muy adecuada para ser vista como un caso particular del problema más general $nx + 1$, n impar, etcétera.

¿En qué consiste la conjetura? Collatz conjeturó que si se toma un número natural cualquiera y se somete a determinadas operaciones sucesivas, dadas por un algoritmo bien determinado, se obtiene una sucesión de números que conduce a un ciclo único. Estas operaciones son:

1. Si el número es par, se divide por 2 sucesivamente hasta obtener un número impar.
2. El número impar obtenido en el paso 1(o el dado inicialmente) se multiplica por 3 y se le suma 1, obteniendo así un nuevo número par.
3. Si se ha obtenido un número ya obtenido anteriormente entonces finalizar, sino volver al paso 1.

Algunos ejemplos son:

- Para el número 5, las operaciones serían:
  5·3+1=16, 16/2=8, 8/2=4,
  4/2=2, 2/2=1, 1·3+1=4, 4/2=2, 2/2=1.
- Para el número 12:
  12/2=6, 6/2=3, 3·3+1=10, 10/2=5,
  y el proceso continua según el del número 5 visto primero, que también conduce al número 1.

El lector puede observar y experimentar tres aspectos importantes:

1. En ambos números seleccionados y en colecciones grandes de números, el algoritmo conduce al único ciclo [4,1], significa que existe solo un ciclo para varios números seleccionados.

2. Si en el algoritmo, en lugar de multiplique por 3, se multiplica por 5 (problema $5x+1$), entonces existen colecciones grandes de números que conducen a uno de los tres ciclos diferentes: [3,1] [13, 33, 83] o [17, 43, 27], dependiendo del número natural inicial escogido.
3. Un ejemplo de este último caso que conduce a un proceso largo y que culmina en el ciclo [3,1] es:
7, 9, 23, 29, 73, 183, 229, 573, 1433, 3583, 4479, 5599, 6999, 8749, 21873, 54683, 34177, 85443, 26701, 66753, 166883, 52151, 65189, 162973, 407433, 1018583, 1273229, 3183073, 7957683, 310847, 388559, 485699, 151781, 379453, 948633, 2371583, 2964479, 3705599, 4631999, 5789999, 7237499, 4523437, 11308593, 28271483, 17669677, 44174193, 110435483, 69022177, 172555443, 6740447, 8425559, 10531949, 26329873, 65824683, 41140427, 25712767, 32140959, 40176199, 50220249, 125550623, 156938279, 196172849, 490432123, 306520077, 766300193, 1915750483, 299336013, 748340033, 1870850083, 584640651, 365400407, 456750509, 1141876273, 951563561, 2378908903, 2973636129, 7434090323, 1161576613, 2903941533, 7259853833, 18149634583, 11343521615, 28358804037, 17724252523, 11077657827, 3461768071, 2163605045, 1352253153, 3380632883, 33013993, 82534983, 103168729, 257921823, 322402279, 403002849, 1007507123, 39355747, 12298671, 15373339, 9608337, 24020843, 15013027, 4691571, 366529, 916323, 286351, 357939, 6991, 8739, 2731, 1707, 1067, 667, 417, 1043, 163, 51, 1, 3, 1.

Desde la segunda mitad del siglo XX hasta la actualidad se han realizado muchas investigaciones que intentan obtener una demostración general de la existencia del ciclo en el problema $3x+1$ y se han realizado otras para verificar la conjetura para grandes colecciones de números. Muchos de estos trabajos se resumen en los artículos (Lagarias, 2003) y (Lagarias, 2006).

Entre los artículos que han verificado la conjetura para casos particulares se encuentran: (Roosendaal, 2004) que verificó la conjetura $3x+1$ para más de 6.89 × 1017 números (Oliveira y Silva, 2004) propuso un algoritmo computacional de alta eficiencia que verificó la conjetura para más de 4.899 × 1018 números, este constituye el récord actual para la verificación de la conjetura de Collatz.

Otros intentos de demostraciones del problema $3x+1$, como (Cadogan, 2006) y (Bruckman, 2008), están incompletos.

Este artículo proporciona una demostración de una parte importante de la conjetura de Collatz que establece: si el ciclo de Collatz existe, entonces este ciclo es único, precisamente el que ese Collatz predijo.

Otra manera de afirmar esta conjetura es: si dos números conducen respectivamente a dos ciclos de Collatz por medio del proceso considerado, entonces dichos ciclos deben ser iguales. Solo faltaría demostrar en trabajos futuros que todo número conduce a algún ciclo por medio del algoritmo establecido, en otros términos: que el algoritmo no puede generar una cantidad infinita de números diferentes.

2. Desarrollo

A continuación, se enuncian una serie de definiciones que contribuirán a obtener una adecuada representación de la conjetura y el problema tratado y que facilitarán la demostración de la parte de la conjetura que se analiza.

Definición 1

Se denomina Proceso de Collatz a una sucesión de operaciones que se genera a partir de un número impar determinado $p \in 2\mathbb{N}-1$, que sigue el siguiente esquema:

$$f_0(p), f_1(p), \ldots, f_i(p).$$

Donde,

$$f_0(p) = p \in 2\mathbb{N}-1$$
$$f_i(p) = \frac{3f_{i-1}(p)+1}{2^{K_i}},\ K_i \in \mathbb{N}, \text{ tal que } f_i(p) \in 2\mathbb{N}-1$$

Resulta obvio percatarse que todo proceso de Collatz está compuesto por ecuaciones sucesivas de la siguiente forma:

$$3p+1 = 2^{K_1} f_1(p)$$
$$3f_i(p)+1 = 2^{K_2} f_2(p)$$
$$\cdots$$
$$3f_{n-1}(p)+1 = 2^{K_n} f_n(p)$$

Para más comodidad, puede redefinirse este sistema de ecuaciones realizando el cambio $f_i(p) = X_i$, obteniendo así las ecuaciones del Proceso de Collatz:

$$\begin{aligned} 3X_0+1&=2^{K_1}X_1\\ 3X_1+1&=2^{K_2}X_2\\ &\dots\\ 3X_{n-1}+1&=2^{K_n}X_n \end{aligned} \tag{1}$$

Definición 2

Se entiende por Ciclo de Collatz a todo conjunto finito de números generados mediante las operaciones del proceso de Collatz, tal que al iniciar un proceso de Collatz en cualquiera de sus elementos, digamos X_i, todos los demás son generados sucesivamente en dicho proceso en un orden único bien definido, hasta obtener nuevamente X_i.

Es evidente entonces que un ciclo de Collatz no es más que un proceso de Collatz similar al (1) pero donde $X_0 = X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y que puede representarse por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3X_0+1&=2^{K_1}X_1\\ 3X_1+1&=2^{K_2}X_2\\ &\dots\\ 3X_{n-1}+1&=2^{K_n}X_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Para mejorar la notación, un ciclo de n elementos $a_0, a_1,..., a_{n-1}$ generados en ese orden será representado por $[a_0, a_1,..., a_{n-1}]$, de forma similar a como se hace en el grupo simétrico S_n.

Por otra parte, como un ciclo de Collatz puede ser iniciado en cualquiera de sus elementos X_i, su ciclo de n ecuaciones será representado como $[X_1, X_{i+1},..., X_{i+n-1}]$, donde:

$$X_{i+r}=\frac{3X_{i+r-1}+1}{2^{K_{i+r}}},\ X_{i+n}=X_i,\ K_i\in\mathbb{N}, r\in\{0,1,...,n-1\}$$

Definición 3

Se llama Extensión del Proceso de Collatz al número total de ecuaciones diferentes con las cuales puede ser representado dicho proceso.

Ejemplo: el proceso que se inicia en el número 3 es de extensión 3, pues solamente puede ser representado por las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3\cdot3+1&=2\cdot5\\ 3\cdot5+1&=2^4\cdot1\\ 3\cdot1+1&=2^2\cdot1 \end{aligned}$$

De continuar buscando otras ecuaciones del proceso, estas serán iguales a la última; o sea, en lo adelante se repetirá la última ecuación, la cual representará un ciclo de Collatz que será seguidamente definido.

Definición 4

Se denomina Número de Collatz a todo número natural cuyo proceso de Collatz conduce a un ciclo de Collatz que tiene la representación:

$$[1]=\left\{X_{i+1}=\frac{3X_i+1}{4},\ X_0=1\right\}$$

Utilizando las definiciones anteriores, se reformulará la conjetura de Collatz de la siguiente forma.

Conjetura de Collatz (enunciado)

Todo número natural es de Collatz, o sea, el proceso de Collatz de todo número natural conduce al ciclo especificado en la definición 4.

De esta conjetura pueden sustraerse dos subconjeturas que giran alrededor del concepto de ciclo, a saber:

Subconjetura 1 (existencia del ciclo de Collatz)

El proceso de Collatz iniciado en cualquier número natural conduce a un ciclo.

Subconjetura 2 (unicidad del ciclo de Collatz)

Si un proceso de Collatz conduce a un ciclo, este no puede ser otro que:

$$[1]=\left\{X_{i+1}=\frac{3X_i+1}{4},\ X_0=1\right\}$$

En lo adelante comprobaremos que la segunda subconjetura constituye en sí un teorema. Nuestro objetivo en lo adelante es la demostración de dicho teorema, utilizando para ello cuatro lemas necesarios, de los cuales el 1 y el 3 son resultados clásicos de la teoría de los números, pero que no obstante también se demuestran.

Lema 1

El conjunto de los números naturales impares es abarcado en su totalidad por sus subconjuntos:

$S_1 = \{6n - 5, n \in \mathbb{N}\}, S_2 = \{6n - 3, n \in \mathbb{N}\}$ y $S_a = \{6n - {}_1, n \in \mathbb{N}\}$

Esto significa que,

$$\cup_{i=1}^{3} S_i = 2\mathbb{N}-1,$$
$$S_i \cap S_j = \varnothing,\ \ i,j\in\{1,2,3\},\ \ i\neq j$$

La demostración de este lema se considera muy elemental en la Teoría de los Números, por lo que no se incluye en este apartado. ▲

Lema 2

El subconjunto S_2 no puede tener representantes en un ciclo de Collatz.

Demostración

Como se aprecia, los elementos del conjunto son los impares múltiplos de 3. Supongamos que en el ciclo de Collatz (2) el elemento es múltiplo de 3. Esto contradice la última ecuación del ciclo:

$$3X_{n-1} = 2^{K_n}X_0,$$

pues se tendría un miembro izquierdo que no sería múltiplo de 3 y el miembro derecho sí.

Como el ciclo puede iniciarse en cualquiera de sus elementos, razonando análogamente para cualquiera de ellos, se obtiene la misma contradicción...▲

Lema 3

El número es múltiplo de 3 si, y solo si, K es un número par.

Demostración

Por el binomio de Newton se tiene que:

$$2^k - 1 = (3-1)^K - 1 = \left[\sum_{i=0}^{k}\binom{K}{i}(-1)K^{-i}3^i\right] - 1 =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{k}\binom{K}{i}(-1)K^{-i}3^i\right] + [(-1)^K - 1]$$

donde el número resultante de la sumatoria es obviamente múltiplo de 3. Por tanto $2^K - 1$ será múltiplo de 3 si y solo si $(-1)^K - 1$ lo es, y esto solo es posible si y solo si K es par, para el cual se anula este sumando...▲

Lema 4

Si $K > 1$, entonces en cualquier igualdad de la forma $3X_i + 1 = 2^K X_{i+1}$, se tendrá que

$$X_i \geq X_{i+1}.$$

Demostración

De la igualdad considerada se tiene que:

$$X_i = \frac{2^K X_{i+1} - 1}{3}$$

Supongamos, por el contrario, que siendo $K > 1$ se tiene que $X_i < X_{i+1}$

Sustituyendo el X_i en esta desigualdad se tiene:

$$\frac{2^K X_{i+1} - 1}{3} < X_{i+1}$$
$$2^K X_{i+1} - 1 < 3X_{i+1}$$
$$X_{i+1}(2^K - 3) < 1$$

Este último resultado es contradictorio siendo $K > 1$ y $X_i + 1 \in \mathbb{N}$.

Así se ha demostrado por reducción al absurdo, que siendo $K > 1$ debe cumplirse que

$$X_i > X_{i+1} ...▲$$

Lema5

En un ciclo de Collatz (2) con más de una ecuación $(n > 1)$, todos los no pueden ser mayores que la unidad.

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que en el ciclo (2), con $n > 1$, todos los K_i son mayores que la unidad, entonces se tiene en virtud del lema 4, la siguiente cadena de desigualdades

$$X_0 \geq X_1 \geq X_2 \geq ... \geq X_{n-1} \geq X_0.$$

De aquí se tiene que

$$(X_0 \geq X_i \geq X_0) \Rightarrow (X_i = X_{0,} \forall_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n),$$

lo cual es inadmisible, debido a que esto conduce al hecho de que todas las ecuaciones del ciclo serían iguales, o lo que es lo mismo, que se trata del ciclo en que $n = 1$ que no es la suposición inicial...▲

Demostración de la subconjetura 2

Según los lemas 1 y 2, los conjuntos de números impares, cuyos elementos pueden pertenecer a un ciclo de Collatz son S_1 y S_3.

Por otra parte, como todo impar es de la forma $2m - 1$, $m \in \mathbb{N}$ en cualquier ecuación de un proceso de Collatz y por consiguiente en un ciclo, se obtiene, a partir de cualquier $2m - 1$ un número par de la forma $6m - 2$ (véase la definición 1 del proceso de Collatz; es decir

$$(2m - 1)3 + 1 = 6m - 2$$

Supongamos que el ciclo comienza en el número $6p - 1 \in S_3 \subset 2\mathbb{N} - 1$ entonces se tiene:

$$3(6p - 1) + 1 = 2^{K_1}X_1$$
$$3X_1 + 1 = 2^{K_2}X_2$$
$$...$$
$$3X_{n-1} + 1 = 2^{K_n}(6p - 1)$$

Pero como en toda ecuación se obtiene, tal y como vimos más arriba, un número de la forma $6m - 2$ se puede establecer la igualdad

$$2^{K_n}(6p-1)=(6m-2),$$

y transformando se tiene:

$$6(K^{n_p}-m)=2(2K^n-1) \qquad (3)$$

Conclusión parcial 1 (CP_1):

Pero, según el lema 3, para que el miembro derecho de (3) sea múltiplo de 3 se requiere que K_n-1 sea par y por tanto mayor que 1, y $K_n-1>1$ implica que

$$K_n>2$$

Supongamos, ahora, que el número que inicia el ciclo es $6p-5\in S_1\subset\ 2\mathbb{N}-1$; razonando de manera análoga al caso anterior podemos plantear, esta vez, la igualdad

$$2^{K_n}(6p-5)=(6m-2).$$

Mediante transformaciones sencillas se obtiene:

$$6\left(2^{K_n}p-m\right)=5\cdot 2^{K_n}-2=3\cdot 2^{K_n}+2\left(2^{K_n}-1\right) \qquad (4)$$

Conclusión parcial 2 (CP_2):

Para que el miembro derecho de (4) sea múltiplo de 3 se requiere, según el lema 3, que K_n sea par, es decir,

$$K_n>1.$$

Teniendo en cuenta que en un ciclo de Collatz cualquiera de sus elementos puede ser el inicial, (por lo cual podemos considerar arbitraria nuestra elección, de la primera y la última ecuaciones) se puede inferir, de (CP_1) y (CP_2), que en todo ciclo de Collatz, la totalidad de los son mayores que la unidad.

Luego, si existiese un ciclo de Collatz con más de una ecuación en su representación de la forma (2), entonces esto entraría en franca contradicción con la afirmación demostrada en el lema 4.

Por tanto, (CP_1) y (CP_2) se cumplen solamente cuando , o sea cuando el ciclo de Collatz tiene la única ecuación

$$3X_0+1=2^KX_0,$$

la cual es equivalente a:

$$1=X_0(2^K-3).$$

Se nota claramente que esto último es solo posible si $X_0=1$ y $K=2$, teniendo en cuenta que $X_0\in\mathbb{N}$, por lo cual no puede ser negativo. Entonces el ciclo

$$[1]=\left\{X_i+1=\frac{3X_i+1}{4},\, X_0=1\right\},$$

es el único posible...▲

3. Conclusión final

Con este trabajo ha quedado reflejada la importancia de dividir la conjetura de Collatz en dos subconjeturas, una referida a la existencia del ciclo de Collatz y otra referida a la unicidad del mismo, la segunda de las cuales ha quedado totalmente demostrada.

4. Recomendaciones

Se recomienda continuar trabajando en la demostración de la existencia del ciclo de Collatz y en la demostración de la existencia de los ciclos que generalizan dicha conjetura.

Puede notarse que la demostración de la existencia del ciclo de Collatz puede ser aplicada de forma análoga a un tipo más general de proceso de Collatz, es decir, al proceso:

$$\wp_c^n=\begin{cases}\left(X_i+1=\dfrac{n\cdot X_i+1}{2^{K_{i+1}}},\,\{n,X_0\}\in 2\mathbb{N}+1\right),\, K_{i+1}\in\\ tal\ que\ Xi+1\in 2\mathbb{N}+1\end{cases}$$

La unicidad no puede ser demostrada análogamente puesto que existen contraejemplos convincentes de la no unicidad en el caso general, como es el hecho del proceso

$$\wp_c^5=\left\{\begin{matrix}\left(X_i+1=\dfrac{5\cdot X_i+1}{2^{K_{i+1}}},\, X_0\in 2\mathbb{N}+1\right),\, K_{i+1}\in\mathbb{N}\\ tal\ que\ Xi+1\in 2\mathbb{N}+1\end{matrix}\right\}$$

Para el cual existen, al menos, tres ciclos: el [3,1], el [13,33,83] y el [17,43,27].

Bibliografía

APPLEGATE, D. and LAGARIAS, J. C. (2006). The *3x+1* semigroup, J. Number Theory 177 (2006), 146-159 (MR 2006k:11037).

BRENT, B. (2002). 3X + 1 dynamics on rationals with fixed denominator, eprint: arXiv math.DS/0204170.

BRUCKMAN, P. S. (2008). A proof of the Collatz conjecture, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39, No. 3 (2008), 403-407 [Erratum: 39, No. 4 (2008), 567.

CADOGAN, CH. C. (2000). The $3x + 1$ problem: towards a solution, Caribbean J. Math. Comput. Sci. 10 (2000), paper 2, 11pp. (MR 2005g:11032)

CADOGAN, CH. C. (2003). Trajectories in the $3x + 1$ problem, J. of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 44 (2003), 177--187. (MR 2004a:11017)

CADOGAN, CH. C. (2006). A Solution to the $3x + 1$ Problem, Caribbean J. Math. Comp.Sci. 13 (2006), 1-11.

KONTOROVICH, A. V. AND MILLER, S., J. (2005). Benford's law, values of L-functions, and the $3x + 1$ problem, Acta Arithmetica 120 (2005), 269--297. (MR 2007c:11085).

KONTOROVICH, A. V. AND SINAI, Y. G. (2002). Structure Theorem for (d, g, h)-maps, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 33 (2002), 213-224. (MR 2003k:11034).

LAGARIAS, J. C. (2003). The $3x + 1$ Problem: An Annotated Bibliography (1963-1999), eprint: arxiv:math.NT/0309224 Sept. 13, 2003, v11.

LAGARIAS, J. C. y SOUNDARARAJAN, K. (2006), Benford's Law for the 3x+1 Function, J. London Math. Soc. 74 (2006), 289-303. (MR 2007h:37007)

LEVY, D. (2004). Injectivity and Surjectivity of Collatz Functions, Discrete Math. 285 (2004), 190--199. (MR 2005f: 11036).

OLIVEIRA, T y SILVA (2004). Computational verification of $3x + 1$ conjecture, web document at http://www.ieeta.pt/~tos/; email: tos@ieeta.pt.

ROOSENDAAL, E. (2004). On the $3x + 1$ problem, web document, available at: http://www.ericr.nl/wondrous/index.html

SLAKMON, A. y MACOT, L. (2006). On the almost convergence of Syracuse sequences, Statistics and Probability Letters 76, No. 15 (2006), 1625-1630.