Ciencias Matemáticas, Vol. 32, No. 1, Pag. 1-9, 2018
Recibido 10-2017

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO COMPLEJO PARA ECUACIONES DE TIPO PARABÓLICO: CASO ÍNDICE CERO
Solution of a parabolic problem with complex boundary, for the case of index zero

Dr. Lorgio F. Batard Martínez[1], Dra. Yanelis Estrada Hernández[2], Lic. Roxana Pérez García[1]

Resumen En presente trabajo se aborda un problema parabólico con condiciones de contorno de gran complejidad que es reducido, mediante el operador de Fourier, a un Problema de Contorno de Riemann con solución conocida. A partir de la solución del Problema de Riemann se obtiene la solución en cuadraturas del problema parabólico inicialmente planteado para casos particulares de suma importancia en las aplicaciones.

Abstract In this paper a parabolic problem with complex boundary conditions has been transformed into a Riemann boundary problem of known solution by means of the Fourier operator. This allows the obtention of quadrature solutions in a variety of widely generalized particular cases of the original problem.

Palabras Clave
Ecuación —Riemman — Parabólico

[1] *Departamento de Matemática,Universidad Central de Las Villas, 54830 Santa Clara, Cuba, lorgio@uclv.edu.cu,ropgarcia@uclv.cu*
[2] *Departamento de FÍsica, Universidad Central de Las Villas, 54830 Santa Clara, Cuba,yestrada@uclv.cu*

Introducción

En el epígrafe I se establecen definiciones y resultados auxiliares así como clases de funciones que son de suma relevancia para el estudio realizado. Además hacemos el planteamiento del problema en cuestión, consistente en encontrar la solución a una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico con condiciones de fronteras muy generales. La misma se buscará en una cierta clase de funciones de amplia aplicación práctica. También reducimos nuestro problema a un Problema de Contorno de Riemann cuya solución es conocida mediante la técnica de Chersky, para ello usamos el operador de Fourier y finalmente encontramos una ecuación funcional que constituye un Problema de Riemann.

En el epígrafe II estudiamos las condiciones de solubilidad del Problema de Riemann mediante condiciones necesarias y suficientes para que el coeficiente y el término independiente de dicho problema estén en las clases de funciones adecuadas. Es interesante el estudio realizado sobre el valor del índice y los diferentes valores de acuerdo a los coeficientes del problema y por último en el epígrafe III se determina la solución del problema en cuadraturas para el caso de índice cero. Todo esto se recoge en una serie de teoremas que resumen los resultados obtenidos.

1. Problema de contorno general de tipo parabólico. Reducción a un problema de Riemann

1.1 Definiciones y resultados auxiliares.

Dada la función $f : R \to C$, si existe la integral:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt [f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-ixt} dt]$$

para algún x real, se denomina Integral de Fourier de f, F (Integral de Fourier Inversa de F, f). Si se determina una clase de de funciones $f(F)$, entonces la función $V(V^{-1})$ definida por: $F(x) = V\{f(t)\}, f(t) = V^{-1}F(x)$ se denomina operador directo (inverso) de Fourier. Se define el índice (ver [4]) de una función compleja continua y que no se anula sobre el eje real, $m(t) = m_1(t) + im_2(t), t \in R$, de la forma siguiente:

$$Ind\ m(t) = \frac{1}{2\pi}[\ \arg m(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi i}[\ \ln m(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d[\ \ln m(t)]$$

Las integrales anteriores deben entenderse en el sentido de Stieltjes si no es diferenciable y es de variación acotada. Del teorema del resto logarítmico (Principio del argumento) se tiene que si es el valor de contorno de una función analítica en el semiplano superior (inferior), con excepción quizás de un número finito de polos en este semiplano, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$Ind\ m(t) = N - P(Ind\ m(t) = P - N)$

Donde $Ind\ m(t)$ denota el índice de $m(t)$ y por N, P se denota el número de ceros y polos en el semiplano superior e inferior respectivamente considerando cada cero y polo tantas veces como su orden de multiplicidad.

En este trabajo se denota por K a los conjuntos numéricos R ó C.

Sea f una función f : $R \to K$, se dice que f pertenece a la clase de Holder, si existen las constantes Ayλ, $A > 0$, y $\lambda \in (0,1]$ para las cuales se verifica:

1) $|f(x_2) - f(x_1)| \leq A|x_2 - x_1|^\lambda \forall x_1, x_2 \in R$
$\exists N > 0$: si $|x_1| > N, |x_2| > N$ se cumple que:

2) $|f(x_2) - f(x_1)| \leq A|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}|^\lambda \forall x_1, x_2 \in R,$

Las constantes A y λ y s e denominan respectivamente coeficiente e índice de Holder. La clase de las funciones que satisfacen la condición de Holder para un mismo índice λ se denotan por $H_\lambda(R)$.

Se cumple que $D_A(R) \subset H_1(R) \subset H_{\lambda_2}(R) \subset H_{\lambda_1}(R) \subset C(R)$, para $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, donde por $D_A(R)$ se entiende la clase de las funciones$f : R \to R$ con derivadas acotadas sobre R que cumplen:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

Se verifica fácilmente que $\lambda \in (0,1]$ la clase $H_\lambda(R)$ con la suma y el producto por un escalar usuales de funciones es un álgebra asociativa.

Decimos que $f : R \to K$ es un elemento de $L_2(R)$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dx < +\infty$. El espacio $L_2^+(R)$ es el espacio de funciones F^+ de $L_2(R)$ que son prolongables analíticamente al semiplano superior $y > 0$ y cumplen con:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^+(x+iy)|^2 dx < cte$ la misma $\forall y > 0$

También $L_2^-(R)$ es el espacio de funciones F^- de $L_2(R)$ que son prolongables analíticamente al semiplano inferior $y < 0$ y cumplen con:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x+iy)|^2 dx < cte$ la misma $\forall y < 0$

Se conoce el siguiente teorema.

Para que la función $f_+(x)$ sea elemento de$L_2^+(R)$ es necesario y suficiente que su transformada $F^+(t) = V\{f_+(x)\}$ sea elemento de $L_2^+(R)$.

Para que la función $f_-(x)$ sea elemento de $L_2^-(R)$ es necesario y suficiente que su transformada $F^-(t) = V\{f_-(x)\}$ sea elemento de $L_2^-(R)$.

La clase de las funciones $L_2^\lambda(R)$ se define por $L_2^\lambda(R) = L_2(R) \cap H_\lambda(R)$.

La clase de las funciones $L_2(R)$ que pertenece a una de las funciones de Holder se denotan por el símbolo $\{\{0\}\}$, o sea,$\{\{0\}\} = \cup_{\lambda \in (0,1]} L_2(R) \cap H_\lambda(R)$.

Los espacios $\{0\}_\lambda$ son aquellos de las funciones que tienen su transformada en $L_2^\lambda(R)$, o sea $V\{f(x)\}$ es elemento de $L_2^\lambda(R)$, si $f \in \{0\}_\lambda$.

La clase de las funciones $f \in \{0\}_\lambda$ tales que $f \equiv 0$ si $x < 0 (x > 0)$ se denotan por $L_{2-}^\lambda(R)(L_{2+}^\lambda(R))$. La clase de las funciones $f \in L_2(R)$ tales que $f = 0$ si $x < 0 (x > 0)$ se denotan por $L_{2-}(R)(L_{2+}(R))$.

La clase de las funciones $F \in L_2^\lambda(R)$ que son prolongables analíticamente al semiplano inferior (superior) y que satisfacen que:
$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^-(x+iy)|^2 dx < M$ si $y < 0 (\int_{-\infty}^{+\infty} |F^+(x+iy)|^2 dx < M$ si $y > 0)$ donde M es independiente de y , se denota por $L_2^{\lambda -}(R)(L_2^{\lambda +}(R))$.

La clase de las funciones f que no se anulan sobre R y tales que $f(\pm\infty) = 1$ y $(f - 1)$ es elemento de $L_2^{\lambda -}(R)(L_2^{\lambda +}(R)$ se denotan por $L_2^{\lambda -}(R+1)(L_2^{\lambda +}(R+1)$.

Del teorema y definiciones anteriores se tiene el teorema siguiente: Una condición necesaria y suficiente para que la función f pertenezca a $L_{2+}^\lambda(R)(L_{2-}^\lambda(R)$ es que su Transformada de Fourier pertenezca a $L_2^{\lambda +}(R)(L_2^{\lambda -}(R))$.

Definición de Operador $P^\pm$: $P^\pm : L_2^\lambda(R) \to L_2^{\lambda \pm}(R)$
$f \to P^\pm(f) = (VoT^\pm oV^{-1})f$
donde $T^\pm : \{0\}_\lambda \to L_{2\pm}^\lambda(\bar{R})$

h(x) $\to T^\pm(h(x)) = \frac{1}{2}(signt \pm 1)h(x) = h_\pm(x)$

Dado un Problema de Salto

$F^+(x) - F^-(x) = H(x) \in L_2^\lambda(R)(L_2(R))$

P$^\pm(H(x)) = (VoT^\pm oV^{-1})H(x) = (VoT^\pm)V^{-1}(H(x))$

V$^{-1}(H(x)) = h(x) \in \{o\}_\lambda$

P$^\pm(H(x)) = VoT^\pm(h(x) = V(h_\pm(x)) \in L_{2\pm}^\lambda(\bar{R})$

P$^\pm(H(x)) = F^\pm(x) \in L_2^{\lambda \pm}(\bar{R})$

1.2 Planteamiento del problema general.

En este epígrafe procederemos a realizar el planteamiento del problema de contorno general de tipo Parabólico con condiciones de contorno complejas:

Dada la Ecuación Diferencial Parcial de tipo Parabólico:

$$u_{xx}(x,y)+ku_y(x,y)=g(x,y), k\neq o \tag{1}$$

En la región:

$$D=\{(x,y)\in R^2: 0<y<+\infty\} \tag{2}$$

Y las condiciones de contorno:

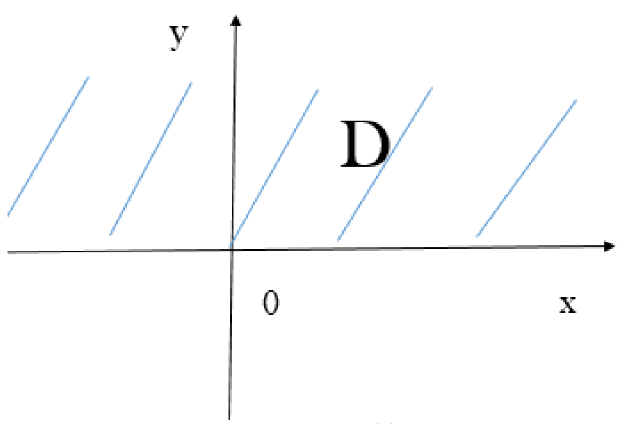

Figura 1. Región D

$$\beta_{00}u(x,0^+)+\beta_{10}u_x(x,0^+)+\beta_{01}u_y(x,0^+)=g_{11}(x),\ x<0 \tag{3}$$

$$\gamma_{00}u(x,0^+)+\gamma_{10}u_x(x,0^+)+\gamma_{01}u_y(x,0^+)=g_{12}(x),\ x>0 \tag{4}$$

Donde $\beta_{i,j}$ y $\gamma_{i,j}$; $i=\overline{0},1, j=\overline{0},1$, son números reales, $g\in L_2(\mathbb{R}), g_{1,1}\in L_2(-\infty,0)$ y $g_{1,2}\in L_2(0,+\infty)$

Se desea encontrar condiciones sobre los elementos conocidos de (1), (3) y (4) para que la ecuación (1) tenga solución única en la región (2), que satisfagan las condiciones (3)- (4) y que pertenezcan a la clase.

$$S=\{u\in F(D): u_{xx}\in L_2(R), u_y\in L_2(R), u\in L_2(R), 0<y<+\infty\} \tag{5}$$

Donde $F(D)$ es la clase de funciones que están definidas sobre el semiplano D.

El problema está bien planteado porque el número de condiciones de contorno (dos) es igual al orden de la ecuación diferencial correspondiente (uno), por el número de regiones (una), más uno (ver [3]).

1.3 Reducción a un problema de Riemann.

A continuación se aplica la técnica de Chersky para reducir el problema planteado en 1.2 a un problema de Riemann para el semiplano.

a) Aplicación de la Transformada de Fourier a la ecuación (1). Realizando esta operación se obtiene la ecuación diferencial ordinaria:

$$k\frac{dU(x,y)}{dy}-x^2U(x,y)=G(x,y) \tag{6}$$

b) Obtención de la solución de la ecuación diferencial (6). La raíz de la ecuación característica

$$kz-x^2=0 \tag{7}$$

$$z(x)=\frac{x^2}{k} \tag{8}$$

Luego la solución general de (6) es:

$$U(x,y)=C(x)e^{z(x)y}+V(x,y) \tag{9}$$

Donde $V(x,y)$ es una solución particular de (9) que viene dada por:

$$V(x,y)=\frac{e^{\frac{x^2}{k}y}}{k}\int G(x,y)e^{-\frac{x^2}{k}y}dy \tag{10}$$

y $C(x)$ es una función arbitraria que debemos determinar.

c) Adaptación de las condiciones de contorno (3) y (4) para la aplicación de la Transformada de Fourier. Con ese objetivo se introducen las funciones f_+ y f_-

$$f_+(x)=\begin{cases}\text{función desconocida de} L_{2+}(\mathbb{R}) & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases}0 & x>0\\ \text{función desconocida de} L_{2-}(R) & x<0\end{cases}$$

Estas funciones permiten escribir (3) y (4) en la forma

$$\beta_{00}u(x,0^+)+\beta_{10}u_x(x,0^+)+\beta_{01}\frac{du(x,0^+)}{dy}=g_{11-}(x)+f_+(x), \tag{11}$$

$|x|<+\infty$

$$\gamma_{00}u(x,0^+)+\gamma_{10}u_x(x,0^+)+\gamma_{01}\frac{du(x,0^+)}{dy}=g_{12+}(x)+f_-(x), \tag{12}$$

$|x|<+\infty$

Donde:

$$g_{11-}(x)=\begin{cases}g_{11} & x<0\\ 0 & x\geq 0\end{cases}$$

$$g_{12+}(x)=\begin{cases}g_{12} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

d) Aplicación de la Transformada de Fourier a las nuevas condiciones de contorno.
Realizando esta operación en (11) y (12) se obtiene:

$$\beta_{00}U(x,0^+)-ix\beta_{10}U(x,0^+)+\beta_{01}\frac{dU(x,0^+)}{dy}=G_{11}^-(x)+F^+(x) \quad (13)$$

$$\gamma_{00}U(x,0^+)-ix\gamma_{10}U(x,0^+)+\gamma_{01}\frac{dU(x,0^+)}{dy}=G_{12}^+(x)+F^-(x) \quad (14)$$

De acuerdo a la definición de f_- yf_+ las funciones $F^-(x)$ y $F^+(x)$ se pueden considerar (ver sección 4) como los valores límites de las funciones $F^-(z)$ y $F^+(z)$, analiíticas en el semiplano inferior y superior respectivamente, que satisfacen las condiciones:

$\int_{-\infty}^{+\infty}|F^-(x+iy)|^2dx<M, y<0$

$\int_{-\infty}^{+\infty}|F^+(x+iy)|^2dx<M, y>0$

Respectivamente, donde M es el mismo para todas las y

e) Obtención de una ecuación funcional en la cual las únicas funciones desconocidas son F^+ y F^- :

A partir de (9) se obtiene fácilmente

$$\frac{dU(x,y)}{dy}=z(x)C(x)e^{z(x)y}+\frac{dV(x,y)}{dy} \quad (15)$$

Sustituyendo (10) y (15) en (13) y (14), y efectuando las operaciones necesarias se obtiene el sistema:

$$P_1(x)C(x)-F^+(x)=H_1(x) \quad (16)$$

$$P_2(x)C(x)-F^-(x)=H_2(x) \quad (17)$$

Donde:

$P_1(x)=\beta_{00}-ix\beta_{10}+\frac{x^2}{k}\beta_{01}$ y

$P_2(x)=\gamma_{00}-ix\gamma_{10}+\frac{x^2}{k}\gamma_{01}$

$H_1(x)=G_{11}^-(x)-(\beta_{00}-ix\beta_{10})V(x,0^+)-\beta_{01}\frac{dV(x,0^+)}{dy}$

$H_2(x)=G_{12}^+(x)-(\gamma_{00}-ix\gamma_{10})V(x,0^+)-\gamma_{01}\frac{dV(x,0^+)}{dy}$

A partir de (10) se tiene:

$V(x,0^+)=\frac{1}{k}\lim_{y\to 0^+}\int G(x,y)e^{\frac{-x^2}{k}y}dy$

Si $V(x,0^+)$, $xV(x,0^+)$ y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(R)$ es evidente que $H_1(x)$ y $H_2(x)$ pertenecen a $L_2(R)$
De (16) obtenemos:

$$C(x)=\frac{F^+(x)}{P_1(x)}+\frac{H_1(x)}{P_1(x)} \quad (18)$$

sustituyendo (18) en (17) obtenemos el Problema de Riemann

$$F^+(x)=D(x)F^-(x)+H(x) \quad (19)$$

Donde $D(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ y $H(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}H_2(x)-H_1(x)$

2. Condiciones de solubilidad del problema de Riemann obtenido a partir de un problema parabólicocomplejo. Análisis del índice.

En este Epígrafe se determinan condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de (1), (3) y (4), para que el coeficiente y el término independiente de (19) satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann.

De acuerdo a [2], para obtener la solución de (19) en la clase$L_2^{\lambda\pm}(\bar{R})(L_2^{\pm}(R))$, se requiere que $D(x)$ pertenezca a la clase $L_2^{\lambda}(\bar{R}+1)$ y el término independiente pertenezca a $L_2^{\lambda}(\bar{R})(L_2(R))$; siendo $L_2^{\lambda}(\bar{R}+1)$ la clase de las funciones f que satisfacen las condiciones siguientes:

i) f no tiene ni ceros ni polos sobre R

ii) $lim_{|x|\to+\infty}f(x)=1$

iii) $(f-1)\in L_2^{\lambda}(\bar{R})$

2.1 Determinación de las condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición i:

Tenemos que: $D(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$

luego podemos escribir:

$$D(x)=\frac{x^2\beta_{01}-ixk\beta_{10}+k\beta_{00}}{x^2\gamma_{01}-ixk\gamma_{10}+k\gamma_{00}} \quad (20)$$

Si separamos parte real y parte imaginaria en el numerador de (2.1.1) e igualamos a cero, obtenemos el sistema:

$$x^2\beta_{01}+k\beta_{00}=0 \quad (21)$$

$$xk\beta_{10}=0 \quad (22)$$

Como $k\neq 0$, el sistema (21), (22) tiene evidentemente raíces reales solamente en las siguientes variantes:

1) $\beta_{00}=0$ hay raíz en $x=0$

2) $\beta_{01} \neq 0, \beta_{10} = 0, \frac{k\beta_{00}}{\beta_{01}} < 0$: hay dos raíces reales del tipo $x = \pm\sqrt{\frac{k\beta_{00}}{\beta_{01}}}$

Se cumple entonces el siguiente teorema:

Teorema 1: El numerador (denominador) de $D(x)$ no tiene ni ceros (ni polos) para $x \in R$, si y solo si se cumple una de las condiciones siguientes:

1) $\beta_{00}\beta_{10} \neq 0(\gamma_{00}\gamma_{01} \neq 0)$

2) $\beta_{10} = 0, k\beta_{00}\beta_{01} > 0(\gamma_{10} = 0, k\gamma_{00}\gamma_{01} > 0)$

2.2 Determinación de las condiciones para que D(x) satisfaga la condición ii.

Como:

$$lim_{|x|\to+\infty} D(x) = lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2\beta_{01} - ixk\beta_{10} + k\beta_{00}}{x^2\gamma_{01} - ixk\gamma_{10} + k\gamma_{00}} \quad (23)$$

se tiene trivialmente el siguiente Teorema:

Teorema 2: El límite del segundo miembro de (23) existe y es distinto de cero si y solo si; se cumple una de las condiciones:

a) $\beta_{01}\gamma_{01} \neq 0$, en este caso el límite indicado en (23) es $l = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}$

b) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\gamma_{10} \neq 0$ en este caso el límite indicado en (23) es $l = \frac{\beta_{10}}{\gamma_{10}}$

c) $\beta_{01} = \gamma_{01} = \beta_{10} = \gamma_{10} = 0, \beta_{00}\gamma_{00} \neq 0$en este caso el límite indicado en (23) es $l = \frac{\beta_{00}}{\gamma_{00}}$

La demostración de este Teorema es trivial.

Si $l \neq 1$, entonces multiplicando (19) por $\frac{1}{l}$ obtenemos:

$\frac{F^+(x)}{l} = \frac{D(x)}{l}F^-(x) + \frac{H(x)}{l}$

considerando entonces las funciones:

$$F_1^+(x)\frac{F^+(x)}{l}F_1^-(x) = D_1(x)F^-(x) = +\frac{D(x)}{l} \quad (24)$$

Se obtiene la ecuación funcional:

$$F_1^+(x) = D_1(x)F_1^-(x) + \frac{H(x)}{l} \quad (25)$$

para lo cual se cumple $lim_{|x|\to+\infty} D_1(x) = 1$

Luego de (24) y (25) se obtendría la solución del problema original.

2.3 Determinación de condiciones para que $D(x)$ satisfaga la condición iii.

Teorema 3: Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, entonces $(D(x) - 1) \in L_2^\lambda(\bar{R})$.

Demostración:

Probemos primeramente que $(D(x) - 1) \in H_\lambda(\bar{R})$ .Como $D_A(R) \subset H_\lambda(\bar{R})$, basta probar que $(D(x) - 1) \in D_A(\bar{R})$. Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, se puede asegurar que$lim_{|x|\to+\infty} D(x) = l$, y $l \neq 0$. Si $l \neq 1$ se considera (25) en lugar de (19), luego no se pierde generalidad cuando consideramos que $lim_{|x|\to+\infty} D(x) = 1$.

Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, es fácil probar que $(D(x) - 1)$ es una función acotada sobre R y además:

$(D(x) - 1)' = \frac{P_1(x)P_2'(x) - P_1'(x)P_2(x)}{(P_2(x))^2}$

luego $(D(x) - 1) \in D_A(\bar{R})$

Por ultimo, como $lim_{|x|\to+\infty} D(x) = l$. los coeficientes de mayor grado de $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son iguales y consecuentemente $|D(x) - 1| = O(\frac{1}{|x|})$ en una vecindad del infinito, y como $D(x)$ es derivable se tiene que:

$\int_{-\infty}^{+\infty} |D(x) - 1|^2 dx < +\infty$

Por tanto queda probado que $(D(x) - 1) \in L_2^\lambda(\bar{R})$.

2.4 Determinación de las condiciones para que el término independiente de (19) sea elemto de $L_2(R)$

Teorema 4: Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, y además, $V(x, y)$, $xV(x, 0^+)$ y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(R)$, entonces el término independiente de (19) pertenece a $L_2(R)$.

Demostración:

Tenemos que el término independiente de (19) tiene la forma:

$H(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(X)}H_2(x) - H_1(x)$

De acuerdo a las condiciones impuestas es evidente que $H_1(x)$ y $H_2(x)$ son elementos de $L_2(R)$; y $\frac{P_1(x)}{P_2(X)}$ es una función acotada sobre R . De aquí se tiene obviamente que

$H(x) \in L_2(R)$.

Si el problema original es homogéneo $(g(x,y)=0)$ el Teorema 4 quedaría en la siguiente forma:

Corolario (del Teorema 4): Si se cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2, entonces el término independiente de (19) pertenece a $L_2(R)$.

2.5 Cálculo del índice del coeficiente.

Nuestro análisis está dado a los casos en que se cumplen simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2.

Como las raíces de $P_1(x)$ y$P_2(x)$ vienen dadas respectivamente por las expresiones:

$$\frac{k\beta_{10}i \pm \sqrt{-k^2(\beta_{10})^2 - 4k\beta_{01}\beta_{00}}}{2\beta_{01}} \tag{26}$$

y

$$\frac{k\gamma_{10}i \pm \sqrt{-k^2(\gamma_{10})^2 - 4k\gamma_{01}\gamma_{00}}}{2\gamma_{01}} \tag{27}$$

Tenemos las siguientes posibilidades:

a) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0(\gamma_{10} \neq 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0)$ entonces $P_1(x)(P_2(x))$ tiene raíces imaginarias en semiplanos diferentes.

b) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0(\gamma_{10} \neq 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0)$ entonces $P_1(x)(P_2(x))$ tiene 2 raíces complejas en el mismo semiplano si $4k|\beta_{01}\beta_{00}| > k^2(\beta_{10})^2(4k|\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2(\gamma_{10})^2)$, e imaginarias en el mismo semiplano si $4k|\beta_{01}\beta_{00}| < k^2(\beta_{10})^2(4k|\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2(\gamma_{10})^2)$.

c) $\beta_{01} = 0, \beta_{10}\beta_{00} \neq 0(\gamma_{01} = 0, \gamma_{10}\gamma_{00} \neq 0)$ entonces $P_1(x)(P_2(x))$ tiene una sola raíz imaginaria $-\frac{\beta_{00}}{\beta_{10}}i(-\frac{\gamma_{00}}{\gamma_{10}}i)$.

d) $\beta_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0(\gamma_{10} = 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0)$ entonces $P_1(x)(P_2(x))$ tiene 2 raíces imaginarias conjugadas.

e) $\beta_{10} = \beta_{01} = 0, \beta_{00} \neq 0(\gamma_{10} = \gamma_{01} = 0, \gamma_{00} \neq 0)$ entonces $P_1(x)(P_2(x))$no tiene raíces.

Luego tenemos las siguientes variantes para el índice de $D(x)$.

2.1) Casos de índice cero:

2.1-a) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, \gamma_{10} \neq 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.1-b) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0, \gamma_{10} \neq 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0$ y $\beta_{10}\beta_{01}]\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$

2.1-c) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, k\beta_{10}\beta_{00} < 0, k\gamma_{10}\gamma_{00} < 0$

2.1-d) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, k\beta_{10}\beta_{00} > 0, k\gamma_{10}\gamma_{00} > 0$

2.1-e) $\beta_{10} = 0, \gamma_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.1-f) $\beta_{10} \neq 0, \gamma_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.1-g) $\beta_{10} = \gamma_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.1-h) $\beta_{10} = \beta_{01} = \gamma_{10} = \gamma_{01} = 0, \beta_{00}\gamma_{00} \neq 0$

2.2) Casos de índice uno:

2.2-a) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\beta_{00} < 0, \gamma_{10}\gamma_{00} > 0$

2.2-b) $\beta_{10} = 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0k\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$

2.2-c) $k\beta_{10}\beta_{00} < 0, k\beta_{10}\beta_{01} > 0, \gamma_{10} = 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0,$

2.2-d) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0, k\gamma_{01}\gamma_{10} < 0$

2.2-e) $\gamma 10 \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{01}\beta_{10} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.3) Casos de índice dos:

2.3-a) $k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{01}\beta_{10} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0,$ $k\gamma_{01}\gamma_{10} < 0$

2.4) Casos de índice menos uno:

2.4-a) $\beta_{01} = \gamma_{01} = 0, \beta_{10}\beta_{00} > 0, \gamma_{10}\gamma_{00} < 0$

2.4-b) $k\beta_{10}\beta_{01} < 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0, \gamma_{10} = 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.4-c) $\beta_{10} = 0, k\beta_{10}\beta_{00} > 0, k\gamma_{10}\gamma_{01} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0,$

2.4-d) $\beta_{10} \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} > 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0, k\gamma_{01}\gamma_{10} > 0$

2.4-e) $\gamma 10 \neq 0, k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{01}\beta_{10} < 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} > 0$

2.5) Casos de índice menos dos:

2.5-a) $k\beta_{01}\beta_{00} < 0, k\beta_{01}\beta_{10} < 0, k\gamma_{01}\gamma_{00} < 0,$ $k\gamma_{01}\gamma_{10} > 0$

3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE RIEMANN PARA LOS CASOS DE ÍNDICE CERO.

En el presente capítulo buscaremos la solución del Problema de Riemann (19) para los casos de índice cero establecidos en el capítulo anterior, cumple simultáneamente una de las condiciones del Teorema 1 y una de las condiciones del Teorema 2.

• Casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g)

En estos casos la expresión (19) toma la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x) - H_1(x) \tag{28}$$

donde $a > 0, b < 0, c > 0$ y $d < 0$

• En el caso 2.5.1-e) se tiene que $a = -b$, en el caso 2.5.1-f)

$c = -d$ y en el caso 2.5.1-g) $a = -b$ y $c = -d$ simultáneamente.
La expresión (28) se puede escribir en la forma:

$$\frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$$

haciendo:

$$F_1^+(x) = \frac{(x-di)}{(x-bi)}F^+(x) \tag{29}$$

$$F_1^-(x) = \frac{\beta 01(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x)$$

$$H_3(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x) - \frac{(x-di)}{(x-bi)}H_1(x)$$

Nos queda el Problema de Salto.

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_3(x) \tag{30}$$

Luego podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5: Si $k < 0$ y $V(x,y)$,$xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_2(R)$, entonces el problema (1) – (4) para los casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g) tiene solución única en la clase (5) dada por $U(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$. Donde $U(x,y)$ está dada por las fórmulas (9) y (19), y

$$F^+(x) = \frac{x-bi}{(x-di)\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} h_3(t)e^{ixt}dt \tag{31}$$

Siendo $h_3 = V^{-1}[H_3]$
Demostración:
La solución del Problema de Salto (30) según la Definición dada de Operador proyección en el Capítulo 1 es:

$$P^{\pm}(H_3(x)) = (VoT^{\pm}oV^{-1})H_3(x) = VoT^{\pm}(h_3) = V(h_{3\pm})$$

$$V(h_{3+}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} h_3(t)e^{ixt}dt = F_1^+(x) \tag{32}$$

$$\text{V}(\text{h}_{3-}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} h_3(t)e^{ixt}dt = F_1^-(x)$$

donde $h_3 = V^{-1}[H_3]$
Luego de la sustitución de (32) en (28) se obtiene la expresión (31). Por otra parte de (9) y (18) tenemos

$$U(x,y) = \frac{F^+(x)+H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)}e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y) \tag{33}$$

En (33) $F^+(x) \in L_2^+(R), H_1(x) \in L_2^-(R)$. Luego $U(x,y)$, $x^2U(x,y)$ y $\frac{dU(x,y)}{dy}$ pertenecen a $L_2(R)$ para todo y ,$0 < y < +\infty$, por lo tanto $u(x,y)$ pertenece a la clase (5).

Como $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$, nos queda:

$$u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F^+(t)+H_1(t)}{(t-ai)(t-bi)}e^{\frac{t^2}{k}y}e^{-ixt}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}V(t,y)e^{-ixty}dt$$

donde finalmente la solución a nuestro problema para los casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g) es:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F^+(t)+H_1(t)}{(t-ai)(t-bi)}e^{\frac{t^2}{k}y-ixt}dt + \int_{-\infty}^{+\infty}V(t,y)e^{-ixty}dt\right]$$

Para el caso Homogéneo, es decir para $V(x,y) = 0$ tenemos el siguiente teorema similar al Teorema 5*:

Teorema 5*: Si $k < 0$, entonces el problema $(1)-(4)$ para los casos 2.5.1-a), 2.5.1-e), 2.5.1-f) y 2.5.1-g) tiene solución única en la clase (5) dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

• Casos 2.5.1-b)

En este caso hay dos posibilidades:

2.5.1-b1 Todas las raíces de $P_1(x)$ y$P_2(x)$ están en el semiplano superior (esto ocurre cuando $k < 0$, si se cumple además, $\beta_{10}\beta_{01} < 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{01} < 0$)

2.5.1-b2 Todas las raíces de $P_1(x)$ y$P_2(x)$ están en el semiplano inferior (esto ocurre cuando $k < 0$, si se cumple además,$\beta_{10}\beta_{01} > 0$ y $\gamma_{10}\gamma_{01} > 0$)

Subcaso 2.5.1-b1): La expresión (19) toma la forma (28) pero ahora a, b, c y d son números complejos con parte imaginaria mayor que cero si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2(\beta_{10})^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| > k^2(\gamma_{10})^2$, o números imaginarios sobre el eje imaginario positivo si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2(\beta_{10})^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2(\gamma_{10})^2$. (También se puede obtener un caso mixto).

Haciendo:

$$F_1^+(x) = F^+(x) \tag{34}$$

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}F^-(x)$$

$$H_4(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)(x-bi)}{\gamma_{01}(x-ci)(x-di)}H_2(x) - \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_1(x)$$

Nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_4(x)$$

Luego por un análisis similar al realizado en la demostración del Teorema 5, resulta evidente un teorema con enunciado similar al anterior pero con H_4 en lugar de H_3 y

$$F^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} h_4(t)e^{ixt}dt \text{ donde } h_4 = V^{-1}[H_4]$$

Luego de (1.3.4) y (1.3.13) obtenemos:

$$U(x,y) = \frac{F^+(x)+H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)}e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y)$$

Subcaso 2.5.1-b2): La expresión (19) toma la forma (28) pero ahora a, b, c y d son números complejos con parte imaginaria menor que cero si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| > k^2(\beta_{10})^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| >$

$k^2(\gamma_{10})^2$, o números imaginarios sobre el eje imaginario negativo si $4|k\beta_{01}\beta_{00}| < k^2(\beta_{10})^2$ y $4|k\gamma_{01}\gamma_{00}| < k^2(\gamma_{10})^2$. (También se puede obtener un caso mixto), y nos queda:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}F^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x) + \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}H_1(x)$$

Denotando:

$$F_1^+ = \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}F^+(x)$$

$$F_1^- = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x)$$

$$H_5(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x) - \frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}H_1(x)$$

Nos queda el problema de salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_5(x)$$

Por un análisis similar al realizado en la demostración del Teorema 5, resulta evidente un teorema con enunciado similar al anterior pero con H_5 en lugar de H_3 y $F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)2\pi}\int_0^{+\infty} h_5(t)e^{ixt}dt$ donde $h_5 = V^{-1}[H_5]$

Luego de (9) y (18) obtenemos

$$U(x,y) = \frac{F^+(x)+H_1(x)}{(x-ai)(x-bi)}e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y)$$

Casos 2.5.1-c), 2.5.1-d)

En estos casos el Problema de Riemann (28) adopta la forma:

$$F^+(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x) + \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x) - H_1(x) \tag{35}$$

y

$$\frac{x-ci}{x-ai}F^+(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x) + \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x) - \frac{x-ci}{x-ai}H_1(x) \tag{36}$$

respectivamente

De (35) y (36) llegamos a los Problemas de Salto:

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_6(x) \tag{37}$$

$$F_1^+(x) - F_1^-(x) = H_7(x) \tag{38}$$

Donde.

$$F_1^+(x) = F^+(x)$$

$$4\mathrm{F}_1^-(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}F^-(x)$$

$H_6(x) = \frac{\beta_{01}(x-ai)}{\gamma_{01}(x-ci)}H_2(x) - H_1(x)$ en el caso (37)

y$F_1^+(x) = \frac{(x-ci)}{(x-ai)}F^+(x)$

$$F_1^-(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}F^-(x)$$

$H_7(x) = \frac{\beta_{01}}{\gamma_{01}}H_2(x) - \frac{x-ci}{x-ai}H_1(x)$ en el caso (38)

Luego de forma evidente se cumple un teorema con enunciado y demostración similar al Teorema 5 con H_6 en lugar de H_3 y $F^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} h_6(t)e^{ixt}dt$ donde $h_6 = V^{-1}[H_6]$ en el caso 2.5.1-c) y H_7 en lugar de H_3 y
$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)2\pi}\int_0^{+\infty} h_7(t)e^{ixt}dt$ donde
$h_7 = V^{-1}[H_7]$ en el caso 2.5.1-d).

Luego de (9) y (18) obtenemos

$$U(x,y) = \frac{F^+(x)+H_1(x)}{(x-ai)}e^{\frac{x^2}{k}y} + V(x,y)$$

El caso 2.5.1-h) no lo consideramos por carecer de importancia práctica.

4. CONCLUSIONES

A partir de las condiciones impuestas en cada caso estudiado, hemos encontrado la solución en cuadraturas de un Problema Parabólico con Condiciones de Contorno Complejas, tanto para una ecuación homogénea como para una no homogénea. Es interesante la técnica utilizada consistente en reducir el problema original con el auxilio de la Transformada de Fourier.

Los resultados obtenidos constituyen inobjetablemente un aporte teórico a la teoría de los Problemas de Contorno de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues no existen técnicas analíticas en la actualidad, que aborden problemas de esta naturaleza donde las condiciones de contorno difieren en diferentes partes del eje.

La solución obtenida mediante integrales de tipo Fourier permite que los profesionales que utilizan modelos parabólicos puedan encontrar la solución con relativa facilidad con la ayuda de un paquete matemático adecuado, sin que sea necesario que posean un dominio profundo de la teoría antes expuesta.

La solución para los casos de índice uno, dos, menos uno y menos dos serán analizados en próximos artículos.

Referencias

[1] Mederos, O. B. y Batard, L. F. El problema de Riemann con parámetro pequeño en el espacio. Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[2] Batard, L. F. Las ecuaciones diferenciales y el Problema de Riemann con parámetro pequeño. Tesis de Doctorado. 1990.

[3] Mederos, O. B. y Batard, L. F. Reducción de una clase de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales con parámetro pequeño al Problema de Riemann. Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[4] Gajov, F.D. y Chersky, Yu.I. Ecuaciones de tipo Convolución. Moscú. Ciencia.1978.

[5] Tijonov. Samarski. Ecuaciones de la Física Matemática

[6] Gajov, F.D. Problemas de Contorno

[7] Budak. Samarski. Problemas de la Física Matemática

[8] Martínez, Y. H. y Batard, L. F. Solución de un problema de contorno complejo para Ecuaciones de tipo hiperbólico. Aplicaciones. Tesis de maestría. 2000.

[9] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1976.

[10] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, 1965.

[11] J.P. Aubin, Approximation of Elliptic Boundary Value Problems, Wiley, 1972.

[12] H. Brezis, Operateurs Maximaux Monotones, North-Holland Math. Studies 5, 1973.

[13] F.E. Browder, Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces, Proc. Symp. Pure Math., 18, part 2, Amer. Math. Soc., 1976.

[14] P. Butzer and H. Berens, Semi-groups of Operators and Approximations, Springer, 1967.

[15] A. Carasso and A. Stone (editors), Improperly Posed Boundary Value Problems, Pitman, 1975.

[16] R.W. Carroll, Abstract Methods in Partial Diferential Equations, Harper-Row, 1969.

[17] R.W. Carroll and R.E. Showalter, Singular and Degenerate Cauchy Problems, Academic Press, 1976.

[18] J. Cea, Optimization. Theorie et Algorithmes, Dunod, 1971.

[19] P.G. Ciarlet, Numerical Analysis of the Finite Element Method for Elliptic Boundary Value Problems,North-Holland, 1977. 211

[20] D.L. Colton, Partial Diferential Equations in the Complex Domain, Pitman, 1976.

So long and thanks for all the fish [**?**].