LA COMPRENSIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Aida María Torres Alfonso[1] y Dámasa Martínez Martínez[2].
Facultad de Matemática Física y Computación. Universidad Central de Las Villas

RESUMEN

La comprensión del conocimiento matemático constituye un objeto de investigación de interés actual y creciente en Educación Matemática. La reconocida complejidad que significa abordar la comprensión matemática y el considerable volumen de teorías, resultados investigativos, así como experiencias didácticas que se presentan en la actualidad, justifican la pertinencia de trabajos como el que aquí se presenta, que tiene como principal propósito valorar los antecedentes y los estados de arte de este tema; así como las relaciones existentes entre los cambios de representación, la visualización de los objetos matemáticos y el uso de las nuevas tecnologías en los contextos educacionales que en la actualidad pretendan favorecer el proceso comprensivo de la matemática en los estudiantes.

Palabras clave: comprensión matemática, modelos, situaciones didácticas.

ABSTRACT

The understanding of the mathematical knowledge constitutes an object of investigation, of growing interest in Mathematical Education For grateful complexity that means to approach the mathematical understanding and the considerable volume of theories, investigative results, as well as didactic experiences that are presented at the present time, are justified the relevancy of works like the one that here is presented that has as main purpose to value the antecedents and the states of art of this topic; as well as the existent relationships among the representation changes, the visualization of the mathematical objects and the use of the new technologies in the educational contexts that at the present time seek to favor the understanding process of the mathematical one in the students.

Key words: mathematical understanding, models, didactic situations.

INTRODUCCION

Durante muchos años se han identificado dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como la desmotivación hacia el aprendizaje, las altas tasas de mortalidad académica, la apatía, la deserción y en ocasiones la creencia de que a un buen profesor de matemática no le aprueban la materia un número significativo de estudiantes. Además, existe la tendencia, un tanto generalizada, de considerar la matemática como algo inalcanzable e incomprensible, limitándose por esto su estudio, muchas veces, a la mecanización y a la memoria, y no a la comprensión de sus conceptos, teorías y sus posibles aplicaciones prácticas. Estas dificultades, entre otras, han generado diferentes estudios e investigaciones sobre lo que "debería" ser o sobre cómo hacer matemática en la escuela, interrogantes de los que se encarga actualmente la educación matemática, la cual se considera como una disciplina en formación que pretende dar cuenta de los procesos que se dan en los centros educacionales, desde y alrededor de la matemática.

El tema de la comprensión en matemáticas debe interesarnos como profesores, formadores de profesores e investigadores, ya que nuestro objetivo fundamental es que los estudiantes comprendan más y mejor las matemáticas y para lograrlo tenemos que saber acerca del concepto de comprensión, para saber qué deben hacer los estudiantes para comprender, como debemos actuar los profesores para propiciar que ellos comprendan y en que aspectos se debe modificar el currículo práctico, para lograr este objetivo.

Email: [1] aida@uclv.edu.cu

[2] damasa@uclv.edu.cu

DESARROLLO

La comprensión humana suele considerarse uno de los problemas fundamentales en la investigación de áreas tan consolidadas como la filosofía, la epistemología o la psicología. Durante las últimas décadas la preocupación por su estudio también se ha generalizado en el ámbito de la Educación Matemática, al reconocerse de forma mayoritaria la conveniencia de garantizar entre los alumnos un aprendizaje comprensivo de las matemáticas, principalmente porque aporta ventajas de formación intelectual, reduce las dificultades derivadas del carácter jerárquico de la propia disciplina matemática, proporciona experiencias satisfactorias que fomentan actitudes favorables hacia las matemáticas, apoya la autonomía en el aprendizaje futuro y propicia el uso flexible del conocimiento ante nuevos tipos de problemas en contextos diversos (Rico, 1997; NCTM, 2000), entre otras razones.

A este reconocimiento hay que unir, de otro lado, la consideración de la especificidad del conocimiento matemático como factor determinante que condiciona su comprensión, lo cual acredita aún más que su estudio se contemple en la actualidad como una labor específica a realizar desde la Educación Matemática.

DIFERENTES MIRADAS AL TRATAMIENTO DEL TÉRMINO: COMPRENSIÓN MATEMÁTICA.

Debido a la diversidad de enfoques que encontramos en la revisión bibliográfica realizada, en cuanto a lo que significa comprensión y sin pretender realizar un análisis completo del tema, entendemos necesario comentar algunos de ellos y suscribirnos a los que tomaremos como base teórica de nuestra propuesta de modelo didáctico para desarrollar la comprensión matemática en estudiantes universitarios, que es el objetivo fundamental del proyecto investigativo que desarrolla en la actualidad, la autora principal de este trabajo.

El término comprensión es usado de manera diversa según los contextos institucionales, predominando el enfoque psicológico, el cual enfatiza la faceta mental de la comprensión, abiertamente contestada por Wittgenstein. Estando, evidentemente influenciado por la revolución cognitiva que reclaman autores como Vygotsky: prioridad analítica y genética de los factores socioculturales cuando se trata de comprender los procesos psicológicos en el individuo (Vygotsky, 1934) ó Bruner con su propuesta de una *psicología cultural (*Bruner, 1990) y con posterioridad Chevallard quien habla de una de *antropología cognitiva y didáctica* que necesita una reconceptualización del propio saber matemático y en qué consiste su comprensión (Chevallard, 1992)
La importancia de la idea de comprensión para la Didáctica de las Matemáticas se pone de manifiesto en los trabajos de Sierpinska, Pirie y Kieren, Koyama (1993), entre otros.

Una de las ideas más ampliamente aceptadas en la Educación Matemática es que los estudiantes deberían comprender las matemáticas (Hiebert y Carpenter 1992).

En términos similares comienza Sierpinska su libro sobre la comprensión en matemáticas, "¿cómo enseñar de modo que los estudiantes comprendan? (Sierpinska, 1994), el que supone un paso importante, al discernir entre acto y proceso de comprensión, y relacionar la "buena" comprensión de un objeto matemática dado: concepto, teoría o problema, a la secuencia de actos de superar obstáculos específicos de esta situación didáctica que presentó el objeto.

La actualidad del tema se evidencia al revisar las memorias de diferentes eventos internacionales de la comunidad de Educación Matemática donde de manera general se reconoce el interés mostrado por las reformas curriculares promovidas en muchos países por promover *la enseñanza de las matemáticas con comprensión,* siendo reflejado además en actas de congresos y en artículos de revistas en el campo de la psicología y la inteligencia artificial (Pirie y Kieren, 1994).
El término comprensión ha sido estudiado por numerosos investigadores y puede ser entendido y utilizado tanto en el sentido conceptual como secuencial y procedimental. A continuación les presentamos algunos de estos resultados que evidencian el debate actual del tema de análisis de este

trabajo

Sierpinska (1990) señala que la comprensión es un objeto digno de estudio y aparece en toda investigación sobre obstáculos epistemológicos para quien "comprender" es obviamente una palabra común en educación matemática, distingue varios usos de esta palabra y dice que: "*en la práctica de la enseñanza, "¿habéis comprendido?" es muy a menudo otra forma de decir "¿puedo continuar?", sin embargo en la investigación considera que "comprender" se asume algunas veces para una noción bien definida y aparece como un ideal a ser logrado por los estudiantes"*, indicando que el objetivo principal de la elaboración de diseños de enseñanza, proyectos y libros de texto es promover una mejor comprensión del saber objeto de estudio en los estudiantes, y más adelante, esta investigadora se plantea si existen diferencias entre comprender un concepto, comprender un texto, comprender una actividad humana y su producto, o son casos especiales del concepto general de comprensión.

Para esta investigadora "*la comprensión de un concepto se podría medir por el número y la calidad de los obstáculos epistemológicos relativos a él y que uno haya superado*". Afirma que la rapidez de comprensión no es una característica que permita discriminar ya que lo que cuenta es la calidad del nivel de comprensión, y considera la identificación, discriminación, generalización y sintetización como distintas *categorías* de comprensión.

Godino (1996) plantea que el problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes?

Rico (1997) señala que comprender significa: percibir mentalmente algo; captar el significado de algo; entender con claridad lo que quiere decir alguien; conocer en un objeto todo lo que en él es conocible; llegar a conocer la naturaleza o modo de ser de una cosa. Resultando así, para este autor la comprensión un modo destacado de conocimiento de los objetos matemáticos, brindándole una especial atención en el desarrollo de su investigación a las relaciones que existen entre comprensión y los diferentes cambios de representación de los objetos matemáticos
Como hemos enunciado varios autores definen el conocimiento matemático como información internamente representada, por ejemplo, según **Hiebert y Carpenter (1992)** la comprensión ocurre cuando las representaciones logran conectarse en redes progresivamente más estructuradas y cohesivas.

Similar concepción la encontramos en la teoría **APOS,** donde se considera que para lograr la comprensión de un concepto matemático el individuo ha de producir acciones, procesos, objeto y esquemas. (**Asiala, 1996** citado por Torres y Martínez 2004: 42).

En esta teoría, el desarrollo de la comprensión está ligado a la transformación de objetos matemáticos por parte del sujeto, y estas acciones se concretan por medio de signos matemáticos.
Pero equiparar la actividad matemática al procesamiento de información a criterio de las autoras de este trabajo resulta excesivamente reduccionista, por lo que, las teorías de la comprensión derivadas de esta concepción no modelizarían adecuadamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en especial los aspectos sociales y culturales implicados en dichos procesos.

Con algunos puntos de contacto con las teorías anteriormente descritas, pero mucho más dialéctica y sistémica, **Pirie y Kieren (1992)** consideran la comprensión como un proceso de crecimiento interminable, dinámico y estratificado pero no lineal. Rechazando la noción de la comprensión como una función monótona creciente y la consideran como un proceso dinámico de organización y reorganización.

Es la comprensión matemática una temática de actualidad investigativa, lo cual se constata al revisar el artículo de **Godino (2002)** donde el autor establece las relaciones que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje entre la comprensión y la competencia matemática, presentando los referentes teóricos que fundamentan su complemento desde la perspectiva de la Teoría de la Funciones Semióticas.

Por otra parte, más recientemente, **Font (2003)** asume que comprender un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus características, propiedades y representaciones; relacionarlo con otros objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problémicas que sean propuestas por el profesor y reconoce además que las bases psicopedagógicas que han inspirado el currículo de los actuales sistemas educativos, en sentido general, entienden la comprensión como un *proceso mental* que es un punto de vista que responde a una concepción epistemológica divergente, aunque no contrapuesta a la asumida por el autor en este trabajo y con la cual, las autores del presente se suscriben.

Del otro lado del problema didáctico a resolver, el alumno habrá comprendido un objeto matemático cuando lo usa en diversas situaciones didácticas, en las que requerirá utilizar diferentes notaciones y convertir una representación en otra de manera natural, y además tenga la capacidad de poder expresarlo públicamente, con argumentos que demuestren que su pensamiento ha evolucionado tras un esfuerzo intelectual productivo y no igualar estas prácticas evaluativas con la participación "activa" de los estudiantes en las cuales solo se analiza si participó o no en clases, pero no si la misma se sustenta en un desarrollo de su pensamiento y actividad matemática concreta.

EVOLUCIÓN DE LA COMPRENSIÓN DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

> "… ¡No pienses ni una sola vez en la comprensión como 'proceso mental!, Pues *ésa* es la manera de hablar que te confunde... En el sentido en el que hay procesos (incluso procesos mentales) característicos de la comprensión, la comprensión no es un proceso mental….¨ (Wittgenstein, 1953: 155)

Como hemos analizado en el anterior apartado de este trabajo, en sentido general el término ***comprensión*** es usado de manera diversa según los contextos institucionales. Presentamos a continuación a manera de resumen, sin pretender tener en cuenta todas las definiciones, posiciones y marcos teóricos asumidos en la comunidad de Educación Matemática, una síntesis de la evolución que han tenido estas perspectivas en esta temática de reconocida actualidad investigativa.

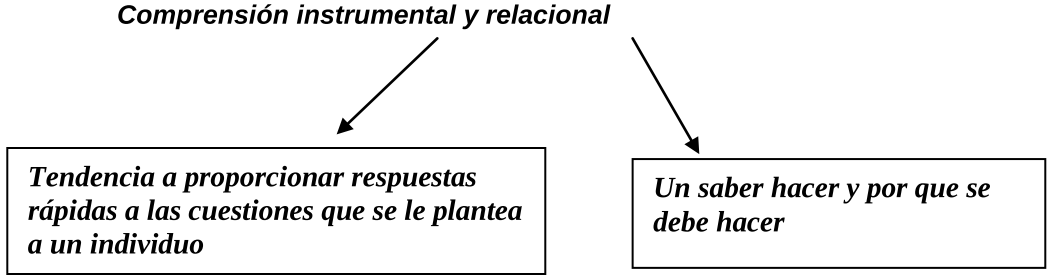
Antes de 1976

Comprensión estaba identificada con conocimiento, estando vinculada a la de manipulación algorítmica o resolución de problemas (Brownell y Sims, 1946). Polya (1962).

Skemp (1976)

Primer trabajo donde se diferencia el conocimiento de la comprensión.

Comprensión instrumental y relacional



Byers (1977) y Tall (1978)

Sugieren una serie de *categorías para la comprensión*, concibiéndose la comprensión como instrumental, relacional, *intuitiva* y *formal*.

Davis (1984) y Hiebert (1986)

Comprensión es el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos. *Por lo tanto, el desarrollo de la comprensión resulta un proceso de conectar el conocimiento a una red estructurada y relacionada, lo que* requiere conocer las correspondencias entre los conocimientos nuevos y los elementos de la red, así como la estructura que une a todo el conjunto.

Sierpinska (1990) y Cornu (1991)

Enfoques constructivistas que han aportado nuevos elementos a la noción de comprensión. Entre las múltiples aportaciones, destacar la distinción de *obstáculos cognitivos.* La que ayuda a identificar las dificultades en el aprendizaje y por tanto a diseñar mejores estrategias de enseñanza. Los obstáculos se clasificaban en *genéticos*, *didácticos y epistemológicos* dependiendo de que su aparición se deba al desarrollo personal, al sistema de enseñanza o a las propias matemáticas.

Vinner (1991)

La comprensión como generadora de imágenes del concepto. La construcción de las imágenes se origina cuando aparece nueva información y por tanto hay que ordenarla en la estructura cognitiva ya presente. El proceso de incorporación estaría vinculado a la idea de *abstracción reflexiva* de Piaget (1989).

Chevallard (1992)

Desarrolla la *antropología cognitiva y didáctica* que necesita una reconceptualización del propio saber matemático y en qué consiste su comprensión, donde entran en juego el saber a enseñar, los profesores y el alumno como sistemas del *contrato didáctico*. Con basamento teórica en la revolución cognitiva que reclaman autores como Vygotsky: prioridad analítica y genética de los factores socioculturales del sujeto que aprende.

Godino (1996)

La comprensión está íntimamente ligada a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Posteriormente en **Godino (2002)** se considera la competencia y la comprensión en Matemática como nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático.

(Font, 2003)

Entiende la comprensión como competencia reconociendo la necesidad de un *desarrollo mental*, pero centra su interés en las *descripciones y representaciones* a medida que se construyen mediante las interacciones que se desarrollan en una institución escolar dada, ya sea entre los alumnos, entre ellos y sus profesores, entre estos últimos y entre cualquiera de estos sujetos y el contexto social en el cual se desarrolla el proceso de aprendizaje. Esta perspectiva enmarca los procesos formativos dentro de una concepción del desarrollo progresivo y gradual, adjudicando un lugar secundario a la demostración observable de los resultados como la que representa por ejemplo, un examen o un test.

MODELOS QUE POTENCIAN LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

Todo modelo de comprensión matemática involucra un estudio de los objetos matemáticos a estudiar, lo cual nos lleva a la adopción de un modelo epistemológico sobre la propia Matemática. De una manera u otra existe consenso en la comunidad de investigadores en Educación Matemática de que la comprensión matemática no se alcanza por generación espontánea sino que hay que planificarla, orientarla, controlarla, y para ello debemos adoptar modelos ricos y coherentes con el modelo epistemológico de base.

En la literatura consultada hemos encontrado diversos modelos teóricos que postulan como objetivo fundamental favorecer la comprensión matemática, a continuación abordamos de manera sintética algunos de ellos, a criterio de las autoras, los más significativos y actuales.

MODELO APOS

Esta teoría, que es una adaptación de la teoría de Piaget sobre la abstracción reflexiva, persigue modelizar las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje matemático avanzado. Al considerar que *los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas*" (Asiala y cols, 1996). Por supuesto, todo esto no sucede a la misma vez y los objetos, una vez construidos, pueden ser utilizados en nuevos procesos, etc. Los investigadores que siguen esta teoría la utilizan para construir descomposiciones genéticas de los conceptos que se enseñan en niveles universitarios y diseñan secuencias de enseñanza que reflejan las estructuras genéticas que han construido y probado.

Igual que sucede con cualquier modelo, el modelo APOS ofrece solamente una visión parcial del desarrollo cognitivo en Matemáticas, pero es innegable que presta especial atención a la discontinuidad cualitativa que se presenta en las relaciones que los alumnos desarrollan con respecto a los conceptos matemáticos.

MODELO DE PIERE Y KIERE

Una característica de este modelo, que lo diferencia esencialmente de otros que se desarrollan en la actualidad es que relegan a un último plano, en el proceso de comprensión el contenido matemático.

El modelo está estructurado en ocho estratos: conocimiento primitivo, creación de la imagen, obtención de la imagen, observación de las propiedades, formalización, observación, estructuración e invención.

El modelo proporciona *el* ***redoblado*** como un mecanismo generativo que corresponde al regreso del estudiante a un estrato interno de la comprensión para discutir, reestructurar o expandir las comprensiones inadecuadas de los estratos mas internos. La evaluación de la comprensión en este modelo no se suscribe a los resultados en test, práctica muy recurrida en estos tiempos en investigaciones de la Educación Matemática, en su lugar, se potencia el valor de los resultados de las entrevistas con los estudiantes.

MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

La problemática que existe con respecto al aprendizaje y enseñanza de la Geometría es una situación que viene observándose desde hace varios años en el ámbito internacional, es así que por los años cincuenta en Holanda, dos profesores de geometría llamados Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldolf, preocupados porque sus alumnos no entendían lo que se explicaba, deciden realizar una investigación que les permita primero, determinar la forma como se produce la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes y segundo, buscar la manera de ayudar a los alumnos a mejorar la calidad de sus razonamiento. Los estudiantes pueden resolver problemas concretos con bastante habilidad, pero carecen de ideas cuando deben resolver esos mismos problemas planteados en un contexto algo diferente, abstracto o más formalizado. Otra situación típica de las clases de matemática, es la de los estudiantes que tienen que recurrir a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver los problemas, pues es la única manera de aprobar los exámenes. (Van Hiele, 1986).

Las ideas fundamentales que defiende este modelo parten de que se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes, por lo que si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior. Reconoce la responsabilidad del profesor en este proceso de comprensión matemática al fundamentar que a una persona sí se le puede ayudar mediante una enseñanza adecuada de la matemática.

TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Constituye una teoría del aprendizaje organizado y dirigido de las matemáticas, que describe un entorno de aprendizaje potente en el que no sólo se presta atención al saber matemático puesto en juego en las tareas, sino también a las actividades de comunicación en el aula, todo ello en una secuencia organizada de situaciones y momentos didácticos.

Aportando una ayuda potencial para el diseño y concreción de un modelo didáctico que favorezca la comprensión matemática. Recomendamos la consulta de Chevallard, Bosch y Gascón (1997) donde se describen las principales características de la teoría de las Situaciones Didácticas y un enfoque general de los procesos de estudio de las matemáticas acorde con el modelo didáctico que proponemos y que constituye fundamentalmente la posición teórica desde la Educación Matemática, asumida por las autoras del trabajo.

ALGUNOS RESULTADOS DE INVESTIGACIONES QUE RELACIONAN LOS CAMBIOS DE REPRESENTACIÓN, LA VISUALIZACIÓN Y EL USO DE LAS TECNOLOGÍAS CON LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA.

Los sistemas de representación han sido abordados por diferentes investigadores: sin embargo, los trabajos de Duval los consideramos de especial relevancia por las reflexiones pertinentes que realiza en relación con los sistemas de representación.

Las aportaciones de Duval, realizadas desde un marco cognitivo, son una relevante aportación al campo científico de la Didáctica de la Matemática (Duval, 1996, 2000). Es decir, asume un modelo sociocultural y comunicativo basado en las interacciones sociales. Eso sí, reconoce lo inevitable de que se originen importantes problemas de coordinación entre sistemas. Por lo que desde esta perspectiva, aparecen las causas profundas de los errores, ya que siempre que se cambia de sistema semiótico, el contenido de la representación se modifica, mientras que el objeto permanece igual. Esto significa que como los objetos matemáticos pueden ser identificados por cualquiera de sus representaciones, al principio los estudiantes son incapaces de discriminar el contenido de la representación y el objeto representado. Es decir, para ellos los objetos cambian cuando cambia la representación.

La pregunta entonces nos aborda inmediatamente: ¿cómo puede un estudiante comprender un objeto matemático a través de los cambios entre sus posibles representaciones diferentes?
En (Font, 2000) se plantea: "…Generalmente los objetos matemáticos se representan mediante notaciones diferentes que ayudan a producir diferentes sentidos. Cada una de las notaciones ayuda a producir sentido, pero no produce todos los sentidos. Por lo tanto, comprender un objeto matemático requiere utilizar diferentes notaciones y desarrollar la capacidad de convertir una representación en otra…".

Por otra parte, existen creencias de que la Matemática no es visual, esto influido quizás por la idea de que siendo la Matemática una disciplina deductiva, se piensa que sus argumentos deben estar representados únicamente en términos de sentencias lógicamente concatenadas. Compartimos una aseveración de Miguel de Guzmán, acerca de que la comunidad educativa pudiese aprender aún más a usar la visualización creativamente, como una herramienta para el entendimiento: la visualización matemática es el proceso de formar y transformar imágenes, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes efectivamente para descubrir matemáticas y comprenderlas. Conceptualicemos entonces la visualización como la capacidad del individuo de poder reconocer en un registro de acciones y representaciones, las reglas con las cuales fueron construidas, y así pues, que de tal forma esta información le permita realizar las conversiones adecuadas a otro registro.

Al respecto Fernando Hitt menciona; "El conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si este es capaz de lograr articular sin condición algunas diferentes representaciones del mismo objeto, así como el de recurrir a ellas, las representaciones, en forma espontánea durante la resolución de problemas" (Hitt, 1998). Los resultados de sus investigaciones han demostrado que las ideas, conceptos y métodos del Análisis Matemático, presentan una gran riqueza de contenidos visuales, intuitivos, geométricos, que están constantemente presentes en el mecanismo mental, tanto en las tareas de presentación y manejo de los teoremas y métodos como en la de resolución de problemas.

En cuanto al uso de las tecnologías en el aprendizaje de la matemática universitaria, el acento en las transformaciones docentes habría que ponerlo, en la comprensión de los procesos matemáticos más que en la ejecución de ciertas rutinas que en la educación matemática actual, ocupan todavía gran parte de la energía de nuestros alumnos, con el consiguiente sentimiento de esterilidad del tiempo que en ello emplean.

Luego, en las estrategias didácticas que pongamos en juego, resulta necesaria la inclusión de estos medios y actividades que permitan desarrollar la comprensión matemática con un uso efectivo de estas tecnologías y utilizar estos medios para evaluar la capacidad de comprensión matemática que han alcanzado los alumnos, aprovechando los resultados de investigaciones realizadas.

En los últimos años se han desarrollado tres grandes líneas de investigación que vinculan la informática y el Análisis Matemático; por una parte, la seguida por los miembros que participan en diversos proyectos RUMEC sobre distintas ramas de las matemáticas, los cuales utilizan la teoría APOS (Dubinsky, 1996)

La segunda línea de investigación está relacionada con los trabajos de investigadores franceses sobre la informática en la enseñanza de la Matemática, la cual viene reflejada en Guin y Trouche (2002), donde los autores destacan los aspectos de los cambios cualitativos que la informática debe representar para la enseñanza de la Matemática.

Una tercera línea de investigación esta relacionada con la visualización matemática de los conceptos del Análisis Matemático, su representación y las nuevas tecnologías (Gutiérrez, 1997; Hitt, 1998; Queralt, 2000; Camacho y González, 2001 y Afonso, 2003), la cual pone de manifiesto la importancia de la articulación entre las distintas representaciones semióticas de los objetos matemáticos.

Sin embargo, se reconoce la necesidad de realizar investigaciones didácticas sobre el uso de la tecnología, como por ejemplo, la que podemos analizar en Contreras y Ortega (2003) donde establecen que es necesario realizar un análisis crítico de las principales aportaciones existentes y hacer una selección de las experiencias innovadoras que se efectúan en investigaciones reconocidas, concretando en *módulos de prácticas* los contenidos Análisis Matemático.

EN TORNO A LA ACTUALIDAD Y CALIDAD EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

La comprensión del conocimiento matemático constituye un objeto de investigación de interés creciente en Educación Matemática. Sin embargo, su elevada complejidad hace que los avances más recientes aún resulten insuficientes y reclama la necesidad de ir adoptando enfoques más operativos y menos preocupados por el estudio directo de sus aspectos internos. Autores como Kieran (1994), reconocen que los cambios producidos durante los últimos años en la investigación en dicho campo muestran una forma distinta de pensar sobre la comprensión del conocimiento matemático.

Así, a diferencia de épocas pasadas, la reflexión actual se viene desarrollando a un elevado nivel de precisión, en parte como consecuencia de la evolución experimentada por las metodologías de investigación. Por tratarse de un ámbito de estudio diverso, se suelen adoptar perspectivas diferentes, abordando en ocasiones cuestiones parciales. Como ha quedado evidenciado en apartados anteriores de este trabajo.

Como referencia específica, los trabajos más recientes pueden situarse en alguno de los dos enfoques genéricos de estudio de la comprensión en matemáticas:

(a) Enfoque directo (“principios” de la comprensión). Bajo este enfoque se contempla la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda, centrándose el interés en el estudio de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración. Forman parte de él las diversas teorías y aproximaciones específicas existentes (Hiebert y Carpenter, 1992; Sierpinska, 1994; Pirie y Kieren, 1994; Duffin y Simpson, 1997; Godino, 2000) así como los modelos de comprensión, de categorías y cognitivos.

(b) Enfoque indirecto ("consecuencias" de la comprensión). Bajo este otro enfoque se sitúan los trabajos preocupados por el desarrollo de la comprensión matemática y por la gestión externa de los efectos que produce. En él se incluyen los estudios curriculares, asi como propuestas que defienden argumentos y aportan sugerencias acerca de cómo enseñar y aprender matemáticas con comprensión (Hiebert y cols, 1997; Fennema y Romberg, 1999; Goñi, 2000).

En términos generales, se afirma en Gallardo 2004, que el panorama actual en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática muestra un carácter atomista con un bajo nivel de cohesión entre los estudios del primer enfoque y una limitada articulación entre los estudios desarrollados por uno u otro enfoque.

Asumiendo la situación descrita en los apartados precedentes, resulta oportuno preguntarse en éste por los requisitos que debieran cumplir en la actualidad las investigaciones sobre comprensión del conocimiento matemático para poder ser consideradas de calidad.

De acuerdo con lo subrayado por algunos de los autores que han venido reflexionando sobre esta cuestión en los últimos años (Romberg, 1992; Sierpinska et al., 1993; Coriat, 2001), todo estudio sobre comprensión en matemáticas, al igual que sobre cualquier cuestión de interés para la Educación Matemática, debería manifestar suficientes garantías de validez, racionalidad, originalidad, rigurosidad, reproductibilidad o relevancia, entre otros criterios. Pero además de cumplir con ellos, que caracterizan a la calidad en un sentido clásico, la investigación también habría de garantizar su calidad en el sentido más amplio, sobre todo en lo concerniente a proporcionar conocimiento que permita el avance del área de forma significativa. Para tal fin se promueven investigaciones que incluyan desarrollos teóricos sólidos conectados con estudios empíricos descriptivos siempre considerados de forma provisional. Y tales desarrollos deberían proporcionar aproximaciones indirectas sobre la comprensión matemática con la suficiente potencialidad descriptiva y prescriptiva para garantizar su utilidad y efectividad en Educación Matemática (Koyama, 1993).

Asimismo, toda aproximación en torno a la comprensión del conocimiento matemático resultante de una investigación de calidad tendría que ser, en lo posible, integradora. Lo que implica que debe ser flexible y compatible, con capacidad para asimilar y adoptar información externa a la producida por ella misma y con disposición a ser modificada y mejorada, debiéndose considerar siempre abierta y provisional. Además deben ser operativas para garantizar un grado de aplicabilidad suficiente con consecuencias directas en el desarrollo de la comprensión. Dicha operatividad demandaría, entre otras cosas, precisión de cara a la aplicación de los procedimientos metodológicos generados.

Entendemos por ello que resulta preciso continuar con el empeño de elaborar nuevos enfoques integradores y sobre todo más operativos que los existentes.

CONCLUSIONES

Ante el propósito de realizar una investigación que aborde algunas de las aristas de la problemática científica referente al desarrollo de la comprensión matemática, que hemos constatado de relevante actualidad e importancia, los investigadores deberán tener en cuenta las teorías científicas que sustentan los pasos que darán durante la resolución del problema científico que se han planteado. En nuestro caso, los resultados de una investigación en desarrollo por parte de las autoras propone un modelo didáctico que potencia el desarrollo de la comprensión de objetos matemáticos, proporcionando además un soporte teórico y metodológico al diseño de situaciones didácticas, con enfoque sistémico e interdisciplinar, en correspondencia con los principios didácticos y los objetivos formativos de la universidad cubana actual.

REFERENCIAS

Afonso, R.M. (2003): Problemas de convergencia en un contexto de software educativo, *Revista Números*, 56, 3-40.

Asiala y cols. (1996): A Framework for research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education.* II Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, Volume 6, pp.1-32.

Brownell, W. A. y Sims, V. M. (1946): The nature of understanding: En J.F. Weaver y J. Kilpatrick (Eds.) (1972), The place of meaning in mathematics instruction: Selected theoretical papers of William A. Brownell, Studies in Mathematics, Vol. 21, pp. 161 – 179.

Bruner, J. (1990): *Acts of meaning*. Cambridge, MA: Hardward University Press.

Byers, V. y Herscovics, N. (1977): Understanding school mathematics. Mathematics Teaching, 81, pp. 24-27.

Camacho, M. y González, S. (2001): Una aproximación geométrica al cálculo de primitivas utilizando la TI-92, *Revista Números*, 45, pp. 61-68.

Chevallard, Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportés par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 12 (1), pp. 73-112.

Chevallard, Y. Bosh, M. y Gascón, J. (1997): Estudiar matemáticas: *El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, España: Editorial Horsori.

Contreras y Ortega (2003)

Coriat, M. (2001): *Los problemas de un director de Tesis. Anexos*. Ponencia presentada en el Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga.

Cornu, B. (1991): Limits. En Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, pp. 153- 166. Dordrecht: Kluwer.

Davis, R. B. (1984): *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. London: Croom Helm.

Duffin, J. y Simpson, A. (1997): "Towards a new theory of understanding". En: E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp.166-173. Lahti, Finland.

Dubinsky, E. (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (Ed.): *Advanced mathematical thinking*, pp. 95-123. Dordrecht. Kluwer A. P, .

Duval, R. (1996): Quel cognitif retenir en Didactique des Mathematiques?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16, nº 3, pp. 349-382.

_ _ _ _ _ _ **(2000):** Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education* (tome I), pp. 55-69. (Eds.) Taddao Nakahara an Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan),.

Fennema y T. A. Romberg, (Eds.) (1999): *Mathematics classrooms that promote understanding.* Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Font V. (2000): *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didácticas de las Matemáticas*, Recuperado el 15 de junio del 2004 en www.ugr.es/seiem/Documentos/Font-Representaciones.PDF

Font, V. (2003): Processos mentals versus competencia. Spain, 3-6 December 2003, pp. 66-68.

Gallardo, J. (2004): *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.* Tesis Doctoral. Málaga: Universidad de Málaga.

Godino, J. D.(1996): Significado y comprensión de los objetos matemáticos. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference,* Vol. 2, pp. 417-424. Valencia, España.

Godino, J. D. (2000): Significado y comprensión en matemáticas. *UNO,* n. 25, pp. 77-87.

Godino, J. D. (2002): Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen? *UNO*, n. 29, pp. 9-19.

Goñi, J. Mª (2000): La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. En J. Mª Goñi (Coord.) *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI,* pp. 23-57. Barcelona: Grao.

Guin, D. y Trouche, L. (2002) : *Calculatrices symboliques: Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

Gutiérrez, A. (1997): Fronteras en el uso de las calculadoras gráficas, *Revista Números*, 32, pp. 54-66.
Hiebert, J. (Ed.) (1986): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992): Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 65-97. New York: MacMillan Publishing Company.
Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997): *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, N. H.: Heinemann.
Hitt, F. (1998): Visualización matemática, nuevas representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 10. 1998, pp. 23-45.
Kieran, C. (1994): Doing and seeing things differently: a 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education* 25, 6, pp. 583-607.
Koyama, M. (1993): Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, pp. 63-73.
NCTM. (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Recuperado en marzo del 2002 en: http://standards.nctm.org/ Publicación en español, Servicio de Publicaciones de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
Piaget, J; (1989): Hacia una lógica de las significaciones. Barcelona. Gedisa.
Pirie, S. y Kieren, T. (1992): Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp.505 - 528.
Pirie, S. y Kieren, T. (1994): Growth in mathematical understanding: how can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 165-190.
Polya, G. (1962): Mathematical discovery, Vol. 2. New York, NY: Wiley
Queralt, T. (2000): Las matemáticas con tecnología entran, *Revista Números*, 14, pp. 23-36.
Rico, L. (1997): *Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática*. *Suma* 24, pp. 5-19.
Romberg, T. A. (1992): Perspectives on Scholarship and Research Methods. En: D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 49-64. MacMillan Publishing Company, New York.
Skemp, R. (1976): Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*,
Sierpinska, A. (1990): Some remarks on understanding in mathematics, For the *Learning of Mathematics*, 10(3), pp. 24 – 41.
Sierpinska, A.; Kilpatrick, J.; Balacheff, N.; Howson, A. G.; Sfard, A.; Steinbring, H. (1993): What Is and What Are its Results?. *Journal for Research in Mathematics Education*
Sierpinska, A. (1994): *Understanding in Mathematics*. London: The Flamer Press.
Tall, D. (1978): The dynamics of understanding mathematics. Mathematics Teaching, 84, pp. 50- 52.
Torres A, y Martínez D. (2004): *Enfoques y Metodologías de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Santa Cara, Villa Clara, Cuba: Editorial Feijó, Cuba.
Torres A, y Martínez D. (2006): Dimensiones de un modelo didáctico para desarrollar comprensión en la matemática universitaria. *Memorias del IV Encuentro sobre la enseñanza de la matemática y la informática*. *ISBN 959-18-0138-6, La* Habana, Cuba.
Vinner, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht:Kluwer Academic Publisher.
Vygotski, L. S. (1934): *Pensamiento y lenguaje.* La Pléyade, Buenos Aires.
Wittgenstein, L. (1953): *Philosophical investigations*. Oxford: Basil Blackwell.