Descripción de la categoría derivada de un álgebra hereditaria de tipo de representación finita de la forma A_3 equiorientada

Lic. Laura Decalo Salgado (l.decalo@matcom.uh.cu), Dr. José Fidel Hernández Advíncula (fidel@matcom.uh.cu)
Facultad de Matemática y Computación Universidad de La Habana

Resumen

En este artículo se muestra como obtener el carcaj de Auslander-Reiten asociado a la categoría derivada de los complejos acotados sobre una *K*-álgebra *A* hereditaria, básica y de dimensión finita. Como resultado se obtuvo un método que permite representar álgebras mediante grafos, de dicha representación y la teoría expuesta, se obtiene el carcaj deseado.

Abstract

This paper describes how to obtain the Auslander-Reiten quiver associated to the derived category of bounded complex over *A*, where *A* is an hereditary, basic and finite dimensional *K*-algebra. As a result, a method to represent algebras using graphs was obtained. From this representation and the explained theory, the desired quiver could be obtained.

1. Nociones Generales

Definición:
Un álgebra se denomina hereditaria si $gld\ A \leq 1$ (dimensión global de A).

Donde $gld\ A = \max\{proy.\dim M, M\ módulo\}$

En lo que sigue *A* será una *K*-álgebra básica, hereditaria y de dimensión finita.

Definición:
Sea *A* una categoría abeliana (todo morfismo posee núcleo y conúcleo) y *K(A)* la categoría de complejos sobre A cociente la relación de homotopía. Una categoría *D(A)* se denomina categoría derivada de A si existe un funtor (generalización del concepto de aplicación para categorías) $Q: K(A) \longrightarrow D(A)$ tal que:

(D1) Si f es un casi-isomorfismo entonces *Q(f)* es un isomorfismo.

(D2) Cualquier funtor $F: K(A) \longrightarrow D$ que transforme casi-isomorfismos en isomorfismos puede ser factorizado de forma única sobre *D(A)* es decir, existe un único funtor $G: D(A) \longrightarrow D$ tal que $F = GQ$.

Sea A una categoría aditiva (el conjunto $Mor_c(X,Y)$ posee estructura de grupo abeliano y la composición de morfismos es $\mathbb{Z}$ bilineal) con idempotentes que escinden. La condición anterior es equivalente a que para cada objeto *X* indescomponible en *A* el anillo de los endomorfismos *End(X)* sea local (en un anillo local los únicos idempotentes centrales son 0 y 1).

Nota: Un idempotente $e = e^2 \in HomA(X,X)$ se dice que escinde si existen morfismos $\mu: Y \longrightarrow X$, $\rho: X \longrightarrow Y$ tal que $\mu o \rho = e$.

Si se cumplen las condiciones anteriores, A se denomina categoría de Krull-Schmidt y se cumple un resultado análogo al teorema de Krull-Schmidt para módulos, es decir, todo objeto posee una única descomposición en suma directa de objetos indescomponibles, salvo isomorfismo.

A continuación se introducen los llamados triángulos de Auslander-Reiten y el funtor de Nakayama, para así demostrar la equivalencia entre los A-módulos izquierdos y A-módulos derechos, de donde se deduce que la categoría derivada de los complejos acotados $D^b(A)$ posee triángulos de Auslander-Reiten, resultado de gran importancia.

Definición:
Un triángulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ es llamado triángulo de Auslander-Reiten si se cumplen:

(AR1) X, Z son indescomponibles.
(AR2) $w \neq 0$.
(AR3) Si $f: W \longrightarrow Z$ no es retracción, entonces existe $f': W \longrightarrow Z$ tal que $vf' = f$

Se dice que una categoría triangulada y de Krull-Schmidt C posee triángulos de Auslander-Reiten si para todo objeto indescomponible Z ∈ C existe un triángulo de A.R. de la forma:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

Sea A un álgebra de dimensión finita con 1 sobre el cuerpo K. Se puede comprobar que ${}_AP$ y ${}_AI$ son equivalentes mediante el funtor de Nakayama $\nu = DHom_A(—, {}_AA)$, donde D denota la dualidad en **mod**A respecto al cuerpo base K.

Una cuasi-inversa de ν está dada por $\nu^{-} = Hom_A(D(A_A),—)$. Existe una transformación natural inversible

$$\alpha_P: DHom(P,—) \rightarrow Hom(—,\nu P)$$

Equivalentemente, para cada $X \in$ **mod**A, existe una dualidad de espacios vectoriales

$$Hom(P,X)xHom(X,\nu P) \longrightarrow K$$

donde a (ξ, η) se le asigna $(\xi \mid \eta)$ tal que $(\xi\mu|\eta) = (\xi|\mu\eta)$ y $(\pi\xi|\eta) = (\xi|\eta\nu(\pi))$ para todos los morfismos μ en **mod**A y todo π en ${}_A$P.

Teorema:
Sea A una K-álgebra de dimensión global finita. Entonces la categoría derivada de los complejos acotados $D^b(A)$ posee triángulos de Auslander-Reiten.

Nota: La demostración de este teorema puede ser consultada en [1].

2. Carcaj de Auslander-Reiten de un Álgebra

Sea C la subcategoría plena de **mod**A, el objetivo esencial es representar C en forma de carcaj. Resulta natural pensar que los puntos representan los objetos y las flechas los morfismos. Cada objeto en C se descompone como la suma directa de indescomponibles y los morfismos que admiten representaciones no triviales son los irreducibles, esto sin duda va a condicionar la definición del carcaj deseado. A continuación se muestra de forma no exhaustiva cómo encontrarlo, pero para una mejor comprensión puede profundizar en [2].

Definición: Sea A una K-álgebra básica y de dimensión finita, C la subcategoría plena de modA. El carcaj $\Gamma(C)$ se define como:

- Los vértices en $\Gamma(C)$ son las clases de isomorfismo $[X]$ de los objetos indescomponibles X en C.
- Sean $[M]$ y $[N]$ vértices de $\Gamma(C)$. Las flechas $[M] \longrightarrow [N]$ de $\Gamma(C)$ están en correspondencia biyectiva con los vectores de la base del K-espacio vectorial $Irr(M, N)$.

En particular, si C = **mod**A, el carcaj Γ(**mod**A) se denomina carcaj de Auslander-Reiten asociado a A.

Teorema:

Si Z ∈ **mod**A es un módulo indescomponible no proyectivo, entonces existe una sucesión de Auslander-Reiten de la forma,

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

Análogamente, si X ∈ **mod**A es un módulo indescomponible no inyectivo, entonces existe una sucesión de Auslander-Reiten de la forma,

$$0 \longrightarrow \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Z} \longrightarrow 0$$

Y estas sucesiones son únicas salvo isomorfismo.

3. Carcaj de Auslander-Reiten de la Categoría Derivada

A continuación se define el carcaj $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}(\mathcal{A})$ de una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{A}$:

Sean *X, Y* objetos en $\mathcal{A}$. Entonces $rad^2(X,Y)$ está dado por el conjunto de los morfismos de la forma gf con $f \in rad(X,M)$, $g \in rad(M,Y)$ para algún objeto M en $\mathcal{A}$ $rad(N,M)$ denota el subespacio de $Hom\mathcal{A}(N,M)$ de los morfismos no inversibles de N a M). Se denota por $Irr(X,Y) = rad(X,Y)/rad^2(X,Y)$ el $End(X)$ — $End(Y)$-subbimódulo de $Hom(X,Y)$ y sea $d_{XY} = dim_K Irr(X,Y)$.

Si X y Y son indescomponibles, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es irreducible si y sólo si $f \in rad(X,Y)/rad^2(X,Y)$.

Por tanto existe una transformación irreducible de X en Y si y sólo si $Irr(X,Y) \neq 0$, así el bimódulo $Irr(X,Y)$ es una medida para multiplicidad de las transformaciones irreducibles, por ello adquiere el nombre de bimódulo de las transformaciones irreducibles.

Los vértices del carcaj $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}(\mathcal{A})$ serán las clases de isomorfismos $[X]$ de los objetos indescomponibles X de $\mathcal{A}$. El carcaj tendrá d_{XY} flechas de $[X]$ a $[Y]$.

4. Representación de la Categoría Derivada en el caso hereditario

El objetivo de esta sección es conocer la estructura del carcaj de A.R. de la categoría derivada de los complejos acotados $\Gamma(D^b(A))$ para una K-álgebra A hereditaria, básica y de dimensión finita. Los resultados que se muestran a continuación pueden encontrarse en [1].

Proposición:

Sea X^* objeto indescomponible de $D^b(A)$, entonces X^* es isomorfo al complejo concentrado, cuyo objeto concentrado es indescomponible.

Demostración:

Como $D^b(A)$ es equivalente a $K^b(A)$, basta probar que todo indescomponible en $K^b(A)$ es isomorfo a algún

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

siendo d^j epimorfismo.

Sea I^* un indescomponible de $K^b({}_AI)$. Trasladando, en caso que sea necesario, se puede asumir que I^* tiene la forma:

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{1} 1^2 \longrightarrow \ldots$$

donde $I^0 \neq 0$. Sea $I^0 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} I^1$ una factorización de d^0 con g epimorfismo y h monomorfismo. Como A es hereditaria se tiene que X es inyectivo y h es una sección. Por tanto, existe un isomorfismo en **mod**A,

$$X \oplus C \xrightarrow{(h,u)} I^1$$

Como $d^1h = 0$ se tiene un isomorfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & I^3 \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[u, equal] \arrow[r] & I^0 \oplus 0 \arrow[u, equal] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}"'] & X \oplus C \arrow[u, "{(h,u)}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} d^1u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & 0 \oplus I^2 \arrow[u, equal] \arrow[r, "\begin{pmatrix} d^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & 0 \oplus I^3 \arrow[u, equal] \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Como I^* es indescomponible, uno de los siguientes complejos $\ldots \to 0 \to I^0 \xrightarrow{g} X \to 0 \to \ldots$ o $\ldots \to 0 \to C \to I^2 \to I^3 \to \ldots$ es cero en $K^b({}_AI)$. En el primer caso I^* se reduce a un complejo con longitud menor y se reitera el razonamiento. En el segundo caso, I^* es isomorfo a $\ldots \to 0 \to I^0 \xrightarrow{g} X \to 0 \to \ldots$.

Corolario:

Sea A una K-álgebra hereditaria y

$$X_0^* \xrightarrow{f_0^*} X_1^* \to \cdots \to X_{r-1}^* \xrightarrow{f_{r-1}^*} X_0^*$$

un ciclo en $D^b(A)$. Entonces existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que cada X_i^* es isomorfo a $T^n X_i$ para algún $X_i \in$ **mod**A.

A continuación se muestra cómo hallar los triángulos de Auslander-Reiten para una K-álgebra hereditaria de tipo de representación finita A dada por un carcaj $Q = (Q_0, Q_1)$.

Este método diferencia dos casos, uno cuando el A-módulo indescomponible es proyectivo y otro cuando no lo es.

Sea $Z^* = T^iZ$ para algún $i \in \mathbb{Z}$ y $Z \in$ **mod**A no proyectivo. Como Z es no proyectivo existe una sucesión de Auslander-Reiten $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ que termina en Z. Sea

$w \in Ext_A^1(Z,X) = Hom_{D^b(A)}(Z,TX)$ el elemento que corresponde. De esta forma se obtiene el triángulo

$$T^iX \xrightarrow{T^iu} T^iY \xrightarrow{T^iv} T^iZ \xrightarrow{T^iw} T^{i+1}X$$

Dicho triángulo es de Auslander-Reiten.

Si ahora $Z^* = T^iP_a$ donde P_a es el proyectivo indescomponible asociado al vértice $a \in Q_0$, se asume, sin pérdida de generalidad $i = 0$. Sea E el A-módulo dado por la representación (contravariante) siguiente:

- Si $x \in Q_0$, entonces $E(x)$ es el espacio generado por los caminos de la forma $p: x \longrightarrow \cdots \longrightarrow a$ o $p: x \longrightarrow \cdots \longrightarrow a$.
  ($E(x) = 0$ si x no es comparable con a)
- Si $a: X \longrightarrow Y$ está en Q_1 y $a > y$, entonces $E(a): E(y) \longrightarrow E(x)$ hace corresponder a p el camino pa dado por el producto de los caminos.
- Si $a: X \longrightarrow Y$ está en Q_1 y $a \leq y$, entonces $E(a)$ hace corresponder a q el camino q' o el camino 0, en dependencia si q tiene la forma aq' o no.

Por w se denota la composición $P_a \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} I_a$ donde I_a denota el inyectivo indescomponible asociado al vértice a. Sean

$$\eta \in Ext_A^1\left(\frac{I_a}{socI_a}, P_a\right) = Hom_{D^b(A)}\left(\frac{I_a}{socI_a}, TP_a\right)$$

las extensiones asociadas a las sucesiones exactas

$$0 \to P_a \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \frac{I_a}{socI_a} \to 0$$

y

$$0 \to radP_a \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} I_a \to 0$$

donde i denota la inclusión y p la proyección.

$$LT^{-1}I_a \xrightarrow{\begin{pmatrix} T^{-1}p \\ -T^{-1}\eta' \end{pmatrix}} T^{-1}\frac{I_a}{socI_a} \bigoplus radP_a \xrightarrow{(T^{-1}n,i)} P_a \to I_a$$

es un triángulo de Auslander-Reiten.

A continuación se muestra cómo conocer la estructura de $\Gamma(D^b(A))$ para una K-álgebra hereditaria de tipo de representación finita A dada por el carcaj $Q = (Q_0, Q_1)$.

Sea $\vec{\Gamma}$ el carcaj de Auslander-Reiten de A. Se denota por Γ_i una copia del carcaj $\Gamma(\mathbf{mod}A)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$ y por $\vec{\vec{\Gamma}}$ el carcaj obtenido de la unión disjunta $\coprod_{i\in\mathbb{Z}} \Gamma_i$ de manera tal que por cada flecha $\alpha: a \longrightarrow b$ en Q_1 se añade una flecha desde el módulo inyectivo I_a en Γ_i al proyectivo P_b en $\Gamma_i + 1$.

En el caso que A no sea de tipo de representación finita, aparecen además componentes dadas por las componentes regulares (tubos) de dicha álgebra.

Proposición:
El carcaj $\Gamma(D^b(A))$ coincide con $\widetilde{\Gamma}$.

5. Carcaj de *Db(A)*

Sea el álgebra dada por el siguiente carcaj $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ (dicha álgebra se conoce como A_3 equiorientada), a continuación se muestra cómo construir $\Gamma(D^b(A_3))$.

Nótese que el carcaj de Auslander-Reiten asociado a A_3 tiene la siguiente forma,

$$\begin{tikzcd}
 & & P_1 \arrow[dr] & & \\
 & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_2 \arrow[dr] & \\
P_3 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ur] & & I_1
\end{tikzcd}$$

Como A_3 es hereditaria, todo objeto indescomponible es isomorfo a un complejo concentrado. Para los proyectivos indescomponibles se tienen los complejos siguientes

$$\cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow \cdots \qquad i = 1,2,3$$

Pero si el módulo es no proyectivo, para encontrar el complejo asociado se debe hallar su resolución proyectiva y aplicar el teorema de Álgebra Homológica que plantea:

Dado un módulo M y su resolución proyectiva

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

entonces el complejo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

es homotópico a la sucesión

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

El procedimiento para construir la resolución proyectiva de un A-módulo M, donde A es hereditaria es bastante sencillo, primero se debe hallar la cubierta proyectiva de M, supongamos que es P_φ,

$$P_\varphi \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

Luego se busca el núcleo, si no es proyectivo, se halla la cubierta proyectiva del núcleo, y así hasta que sea proyectivo. En general, para álgebras hereditarias se obtiene una sucesión exacta corta, además, son útiles los siguientes resultados:

- Para un álgebra hereditaria, el núcleo de la cubierta proyectiva es proyectivo.
- Para un módulo simple S_i, se cumple que su cubierta proyectiva es P_i.
- La cubierta proyectiva de un indescomponible es indescomponible.

Para S_2:

La cubierta proyectiva de S_2 es P_2 y completando a una sucesión exacta se tiene,

$$0 \longrightarrow P_3(001) \longrightarrow P_2(011) \xrightarrow{\varphi} S_2 \to 0$$

Por tanto, el complejo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es isomorfo a

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Para los restantes módulos no proyectivos se tienen las siguientes resoluciones proyectivas,

$$0 \longrightarrow P_2(011) \longrightarrow P_1\,(111) \longrightarrow I_1 = S_1\ \ (100)$$

y

$$0 \longrightarrow P_3(001) \longrightarrow P_1\,(111) \longrightarrow I_2(110) \longrightarrow 0$$

de donde se obtienen los complejos

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Como son no proyectivos, el triángulo de Auslander-Reiten se obtiene de la sucesión de

Auslander-Reiten asociada, o sea, se tienen los siguientes triángulos

$$P_3 \to P_2 \to S_2 \xrightarrow{w_1 \neq 0} TP_3$$
$$P_2 \to P_1 \to I_1 \xrightarrow{w_2 \neq 0} TP_2$$
$$P_3 \to P_1 \to I_2 \xrightarrow{w_3 \neq 0} TP_3$$

A continuación se expone como son los triángulos de Auslander-Reiten para los proyectivos.

Primero hay que encontrar para cada P_i, el correspondiente E (caminos que salen o llegan a i) ya que si existe E, entonces también existirá el triángulo de Auslander-Reiten asociado al proyectivo, como muestra el lema. Recordemos que E viene determinado también por las sucesiones exactas,

$$0 \to P_a \to E \to \frac{I_a}{socI_a} \to 0$$
$$0 \to radP_a \to E \to I_a \to 0$$

Para P_3 se tiene,

$$0 \to P_3(001) \to E(111) \to \frac{I_3}{socI_3} = I_2(110) \to 0$$

En el caso de P_2,

$$0 \to P_2(011) \to E(111) \to \frac{I_2}{socI_2} = I_1(100)$$

Y para P_1,

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}P_1 = P_2(011) \longrightarrow E\,(111) \longrightarrow I_1(100) \longrightarrow 0$$

Aplicando el lema, se obtienen los triángulos,

$$T^{-}I_3 \to T^{-}I_2 \oplus radP_3 \to P_3 \to I_3$$
$$T^{-}I_2 \to T^{-}I_1 \oplus radP_2 \to P_2 \to I_2$$
$$T^{-}I_1 \to T^{-}\frac{I_1}{socI_1} \oplus radP_1 \to P_1 \to I_1$$

donde los trasladados se obtienen a partir de los complejos.

Por último se desea conectar los triángulos para construir el carcaj de Auslander-Reiten. Como existen flechas de 1 a 2 y de 2 a 3, se obtienen flechas en el carcaj de I_1 en P_2 y de I_2 en P_3, por tanto el carcaj de Auslander-Reiten para la categoría derivada $D^b(A_3)$ queda de la forma siguiente,

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & P_1[0] \arrow[dr] & & P_3[1] \arrow[dr] & & S_2[1] \arrow[dr] & & I_1[1] \arrow[dr, dashed] & & P_1[2] \arrow[dr] & & \\
\cdots & P_2[0] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_2[0] \arrow[ur, dashed] \arrow[dr] & & P_2[1] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_2[1] \arrow[ur] \arrow[dr, dashed] & & P_2[2] \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_2[2] \arrow[dr] & \cdots \\
P_3[0] \arrow[ur] & & S_2[0] \arrow[ur] & & I_1[0] \arrow[ur, dashed] & & P_1[1] \arrow[ur] & & P_3[2] \arrow[ur] & & S_2[2] \arrow[ur] & & I_1[2]
\end{tikzcd}$$

Este mismo procedimiento se tiene para cualquier A_n, con cualquier orientación. Más aún, para cualquier álgebra hereditaria de tipo de representación finita.

Referencias bibliográficas

[1] D.HAPPEL. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. Lecture Note Series 119, London Mathematical Society.

[2] M. AUSLANDER, I. REITEN, S. SMALO. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge studies in advanced mathematics, 36, 1995, Cambridge University Press.

[3] S. GELFAND, Y. MANIN. *Methods of Homological Algebra*. Springer