El cálculo como ciencia normal: en el centenario del primer texto cubano sobre el cálculo

Concepción Valdés Castro y Carlos Sánchez Fernández
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana, Cuba.

Resumen

Se pretende mostrar la aceptación progresiva de los conceptos y métodos principales del cálculo diferencial e integral y cómo se convierte en "ciencia normal", es decir, en una disciplina establecida y reconocida por la comunidad científica. Para este fin nos valemos del análisis de los textos más distinguidos del siglo XVIII, hasta llegar a los utilizados en la École Polytechnique de París, textos que sirvieron de paradigma en todo el siglo XIX y principios del XX. Concluimos con un análisis crítico del primer texto cubano que incluyó rudimentos del cálculo diferencial e integral, *Elementos de Álgebra Superior,* escrito por Pablo Miquel y Merino, cuya primera edición apareció hace un siglo, en 1914.

Abstract

We intend to show the gradual acceptance of the main concepts and methods of differential and integral calculus and how it become normal science, that is, a discipline well established and recognized by the scientific community. For this purpose we use the analysis of the most distinguished eighteenth-century texts, up to those used in the École Polytechnique of Paris, texts that served of paradigm throughout the nineteenth and early twentieth century's. We conclude with a critical analysis of the first Cuban text that included elements of the differential and integral calculus, *Elementos de Álgebra Superior* written by Pablo Miquel y Merino, whose first edition appeared a century ago, in 1914.

1. Introducción

En el presente trabajo, con el estudio de algunos de los textos más significativos, hemos querido mostrar cómo los conceptos principales del nuevo cálculo, llamado de los diferenciales por la escuela de Leibniz y de fluxiones por los seguidores de Newton, se fueron convirtiendo en "ciencia normal", es decir, en ciencia bien establecida y reconocida por la comunidad científica. El análisis de los libros de texto constituye una vía ineludible para seguir la evolución de los conceptos matemáticos, no solo en las diferentes maneras de formularlos, sino en lo que resulta más importante, en la forma de su comprensión, que puede apreciarse en cómo ellos son aplicados, cuáles ejemplos se proponen y qué tipo de problemas se resuelven con su ayuda.

Los textos surgen en el seno de cierta cultura matemática que los condiciona y van a reflejar aquellos conceptos y métodos que, o bien son compartidos por la mayoría de los iniciados, o lo serán en un período de tiempo relativamente breve, cuando estos libros sean asimilados por una comunidad matemática y alcancen cierta difusión en el país de origen o en otras latitudes a través de las traducciones.

Para nuestro análisis hemos escogido los textos de Euler y aquellos que en nuestra opinión resultan más reveladores, los escritos por Lagrange, Lacroix y Cauchy. Estos textos seleccionados se utilizaron en las primeras décadas de la École Polytechnique de París y por mucho tiempo sirvieron de paradigma de lo que resultaba conocimiento primordial para las profesiones científicas y técnicas de mayor impacto social en los siglos XVIII y XIX.

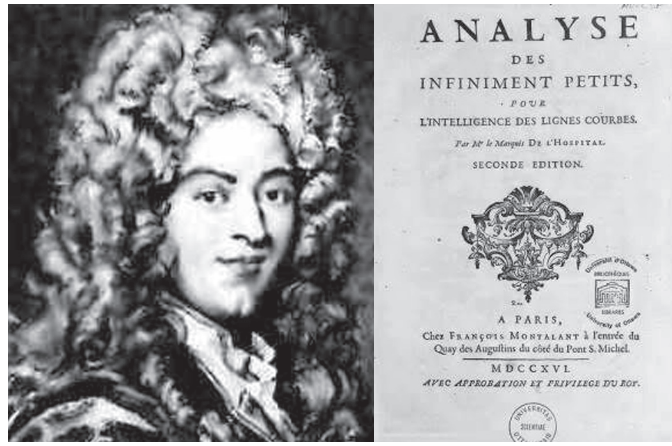
Con la primera parte de este artículo pretendemos facilitar la apreciación del valor histórico que tiene para la educación matemática en Cuba la publicación del texto *Elementos de Álgebra Superior,* del profesor de la Universidad de La Habana, Pablo Miquel y Merino. Precisamente hacemos este análisis en el centenario del primer libro cubano que incluye elementos del cálculo diferencial e integral y como modesto aporte a su justo reconocimiento.

2. Los textos de la infancia del cálculo

Será en 1696 que aparecerá publicado el primer libro destinado a la difusión del cálculo de Leibniz aplicado al estudio de las curvas: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. En la portada no aparece el nombre de su autor, pero el mundillo matemático reconocía que era obra del marqués Guillaume François de l'Hôpital (1661-1704). Pero, ¿cómo el marqués tomó posesión de este nuevo instrumento matemático?

Johann Bernoulli (1667-1748) era aún muy joven cuando, conjuntamente con su hermano Jacob, ya dominaba el *Nuevo Cálculo* de los diferenciales. Tenía solo 24 años cuando viaja a París y conoce al marqués, quien, aunque era un reconocido matemático francés, no sabía de esta nueva herramienta. Por esta razón propuso al joven Bernoulli que le diera clases y se las proporcionara por escrito a cambio de una remuneración generosa. Estas lecciones serán la base del libro de L'Hôpital. Sin embargo, la única referencia que el marqués hace a su maestro la constituye el párrafo siguiente del prólogo del libro: «... reconozco estar en deuda con los trabajos brillantes de los señores Bernoulli; sobre todo con los del más joven quien es ahora profesor en Groninga. Me he servido sin cumplidos de sus descubrimientos y de los del señor Leibniz. Es por ello que consiento que ellos reivindiquen todo lo que gusten; yo me conformo con lo que tengan a bien dejarme.»

Naturalmente, en vida del marqués, Johann Bernoulli no hizo ningún reclamo, pero después de su muerte reivindicó para sí la autoría de este curso. La prueba de que Bernoulli tenía razón solo apareció en 1922 en los manuscritos de un curso por él brindado y redactados por su sobrino Nicolaus I Bernoulli.



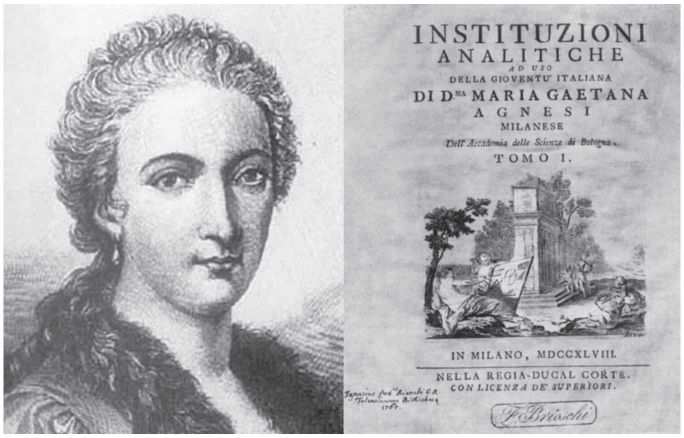
Guillaume François de L'Hôpital (1661-1704)

L'Hôpital comienza el libro con la definición de "diferencial" como «la parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente». Describe la notación a utilizar y explica geométricamente la idea de diferencial. Enseguida asume dos suposiciones básicas o postulados: que se puedan considerar como iguales dos cantidades las cuales no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña y supone que una línea curva puede ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de segmentos de rectas infinitamente pequeños.

L'Hôpital presenta su texto en forma de problemas de carácter geométrico, los cuales resuelve con ayuda de los diferenciales, pero no se interesó en ningún momento por la cuestión de la existencia de las cantidades infinitesimales. Estas siempre existen, pueden ser representadas geométricamente y se calcula con ellas siguiendo las reglas que se describen en el libro.

Pero lo que cada alumno de cálculo relaciona con el nombre de L'Hôpital es la regla para el cálculo de límites indeterminados que lleva su nombre. Por cierto, esta famosa fórmula no aparece en los manuscritos de Johann Bernoulli encontrados en 1922; sin embargo, tanto la regla como los ejemplos que L'Hôpital coloca en su libro fueron comunicados por Bernoulli al marqués en la correspondencia que mantuvieron y que fue conocida del público solo en 1955.

En Italia va a aparecer otro texto interesante, también escrito en el espíritu de los diferenciales de Leibniz, pero esta vez por una mujer, María Gaetana Agnesi (1718-1799). Se trata de *Intituzioni Analitiche ad uso della gioventu italiana,* publicado en 1748 a través de una edición costeada privadamente por la propia Agnesi.



María Gaetana Agnesi (1718-1799).

Este libro le produjo a su autora mucha fama. Es un texto cuyo fin es esclarecer los conceptos y provee de numerosos ejemplos cuidadosamente seleccionados con este fin. Tiene una sección sobre máximos y mínimos, donde Agnesi presenta numerosos problemas de tipo geométrico.

A diferencia de L'Hôpital, Agnesi expone también el cálculo integral al cual considera como el inverso del cálculo diferencial. Sin embargo, da una interpretación de la cantidad *ydx* como el área de un rectángulo infinitesimal, lo que le permite calcular el área bajo una curva por este proceso inverso. Muestra que la curva cuyas ordenadas crecen geométricamente mientras que las abcisas lo hacen de forma aritmética debe satisfacer a la ecuación $dx = a\, dy/y$, la cual resuelve mediante un uso conveniente de las series infinitas. Además calcula el área bajo esta curva, mediante el cálculo de la integral impropia que hoy escribiríamos $\int_{-\infty}^{x} e^{t/a}dt$. Al igual que todos los libros de la primera mitad del siglo XVIII no contiene prácticamente nada sobre las funciones trigonométricas.

Es interesante que el nombre de Agnesi está asociado al ejemplo donde describe geométricamente la curva cuya ecuación, utilizando una notación actual, es $y = \dfrac{a^3}{y^2 + a^2}$ y que no es original de ella (en la Fig. 1 se muestra la curva para $a = 1$). Esta curva se conocía como la *versiera*, vocablo derivado del latín y que significa "dar vueltas". En la traducción al inglés, esta palabra fue confundida con la palabra italiana *avversiera* que significa "esposa del diablo" y de esa forma pasó al castellano como "bruja". Así se conoce como *la bruja de Agnesi*.

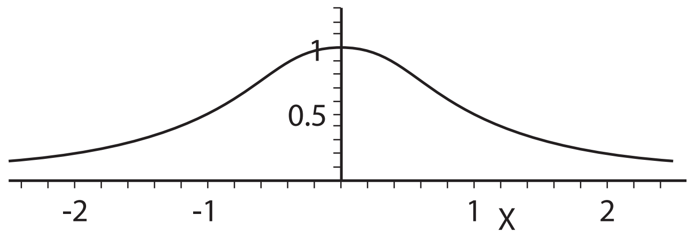


Fig. 1

En las Islas Británicas el estudio del cálculo no se realizaba de forma regular en las universidades, pero sí lo enseñaban muchos maestros privados. Algunos de ellos sintieron la necesidad de escribir textos para complementar su instrucción. Así surgen, en 1737, *A New Treatise of Fluxions,* de Thomas Simpson (1710-1761), publicado gracias a una suscripción realizada por sus alumnos y *A Treatise of Fluxions,* de Colin Maclaurin (1698-1746) publicado en 1742.

El libro de Simpson se caracteriza por proponer al lector numerosos problemas, muchos de ellos del estilo que es familiar a nuestros estudiantes. Por ejemplo, en la sección dedicada a los máximos y mínimos muestra *cómo encontrar el* paralelogramo de área máxima inscrito en un triángulo y también el cono de menor área superficial con un volumen dado. Incluye, además, la solución de lo que posiblemente sea uno de los primeros problemas de búsqueda de extremos de funciones de varias variables. Se trata de encontrar los valores de x, y, z tales que la expresión $(b^3 - x^3)(x^2z - z^3)(xy - y^2)$ sea máxima. Simpson utiliza un método equivalente a resolver el sistema de ecuaciones obtenido al igualar a cero las derivadas parciales. Vinculado a un problema de navegación, aparece, de forma embrionaria, la regla de diferenciación del seno. El nombre de Simpson es asociado actualmente a la regla de integración numérica por medio de aproximaciones parabólicas. Esta regla no aparece en su libro de texto, sino en un trabajo que publicó en 1743. Sin embargo, ella no es original de Simpson, sino que ya se conocía por autores del siglo XVII.

El otro texto británico que comentaremos también tiene un autor de nombre familiar, Colin Maclaurin, esta vez relacionado con la fórmula del desarrollo de funciones en serie. Esta fórmula va a aparecer en su texto *A Treatise of Fluxions*, que tenía el objetivo fundamental de defender la teoría de fluxiones[1] de Newton contra los numerosos ataques de que era objeto. Por esa razón, toda la primera parte del libro está dedicado a tratar de fundamentar, en forma geométrica, el cálculo newtoniano. Sin embargo, en la segunda parte su autor se propone desarrollar los algoritmos de cálculo y las aplicaciones de la teoría. Este texto fue traducido al francés en 1749 y difundido en el continente.

Colin MacLaurin (1698-1746)

Entre otras cuestiones Maclaurin discute los puntos de extremos y de inflexión, encuentra tangentes y asíntotas a las curvas, determina curvaturas. Maclaurin calcula áreas bajo las curvas, demostrando que la fluxión del área es $y\dot{x}$ y después halla el fluente de esta expresión. De forma similar calcula los volúmenes y áreas de sólidos de revolución. Es interesante observar que usa, en forma incipiente, la integración múltiple para el estudio de la atracción gravitacional de los elipsoides.

En relación con la serie que lleva su nombre, Maclaurin supone que y es representable como una serie en la variable z y supone que la fluxión de z, $\dot{z}$ es igual a uno

$$y = A + Bz + Cz^2\ Dz^3 + \ldots,$$

entonces hace $z = 0$ y obtiene que A es el valor de y cuando z se anula y que denota por E. Toma la fluxión de la serie y nuevamente hace $z = 0$, así obtiene que B es el valor de la fluxión de y en $z = 0$ que denota por $\dot{E}$. Continuando de esta forma obtiene

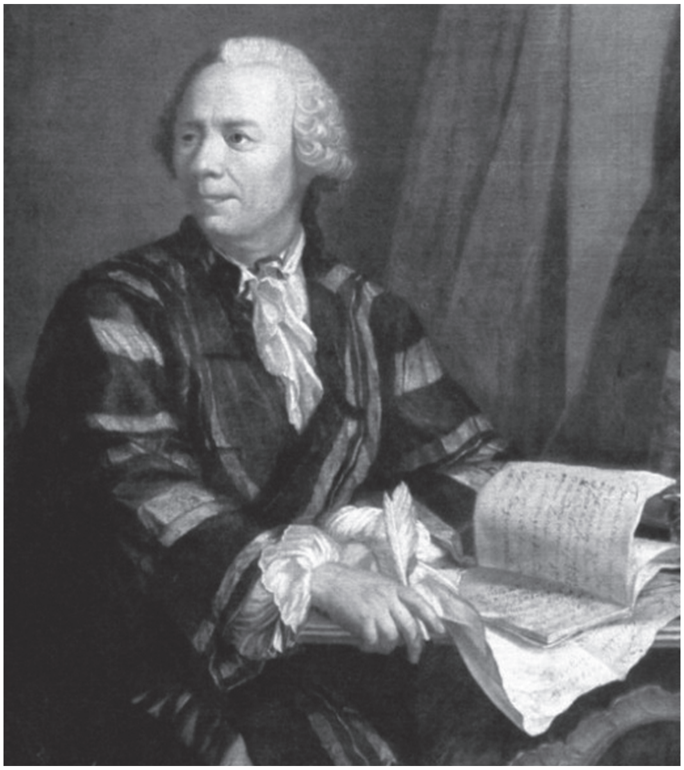
$$y = E + \dot{E}z + \frac{\ddot{E}z^2}{1\times 2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1\times 2\times 3} + \ldots,$$

donde los puntos sobre la letra E denotan los valores, en $z = 0$, de las fluxiones de diferentes ordenes de y. Maclaurin afirma que este resultado fue descubierto por Taylor quien lo publicó en su *Methodus Incrementorum,* en 1715. Quizás se haya asociado el nombre de Maclaurin a esta serie debido al uso extenso que hace de ella. Entre los ejemplos que desarrolla, están las series para el seno y el coseno, definidas en un círculo de radio *a*. También utiliza esta serie para exponer los criterios para la determinación de los extremos relativos mediante el uso de las dos primeras derivadas: Cuando la primera fluxión de la ordenada se anula, si a la vez la segunda fluxión es positiva, la ordenada es un mínimo, pero es un máximo si la segunda fluxión es negativa.

3. Los textos básicos de Euler y su repercusión

Los cuatro textos comentados en la sección anterior estaban destinados a difundir las ideas básicas del análisis infinitesimal entre un público cultivado, pero relativamente amplio, por ello es que aparecen escritos en lengua vernácula. Escritos en latín, y por tanto dirigidos a una elite ilustrada, pero con una importancia enorme para el desarrollo de la matemática, aparecerán, en la segunda mitad del siglo XVIII, los tres textos sobre análisis infinitesimal escritos

[1] La noción de fluxión de una variable x es el equivalente newtoniano al diferencial de Leibniz y la notación utilizada consistía en colocar un punto sobre la variable: $\dot{x}$.



Leonhard Euler (1707-1783)

por Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), *Institutiones Calculi Differentialis* (1755), *Institutiones Calculi Integralis* (tres tomos, 1768-1770).

El primero es un libro concebido por su autor como de iniciación al cálculo, de modo que el lector pueda de forma imperceptible adquirir la idea del infinito. Es en este texto que Euler, de forma muy original, introduce la mayoría de las notaciones y terminologías familiares al lector moderno. En este libro Euler va a dar un paso decisivo en la constitución del análisis matemático como una rama autónoma de la matemática. Va a identificar a las funciones y no a las curvas como el objeto fundamental del análisis. Todo el análisis infinitesimal gira alrededor de las magnitudes variables y de sus funciones.

Ya en la obra de Descartes y Fermat, para representar una curva se hace uso de una fórmula, es decir, una expresión analítica. Sin embargo, para ellos lo fundamental es el estudio de la curva y la fórmula es solo una medio de descripción, cómoda y útil, pero meramente auxiliar. Es interesante comentar que, en general, consideraban las curvas dadas en forma implícita, mediante una ecuación entre las variables y no en la forma explícita $y = f(x)$. Todo parece indicar que el interés por estudiar la fórmula en sí misma, independiente de la curva asociada y de preferir la expresión explícita a la implícita aparece con la obra de Newton, quien en una carta a Leibniz señala: No podría, por supuesto, haber obtenido ninguno de estos resultados si antes no me hubiera abstraído de la consideración de las figuras y lo hubiera reducido todo sencillamente a la investigación de la ordenada.

La denominación "función" fue usada por Leibniz, en 1692, pero con ella solamente designaba ciertas cantidades geométricas asociadas con una curva. Es Johann Bernoulli quien, en 1718, le asocia a este concepto la idea de relación funcional que tenemos hoy, cuando escribe: se llama función de una magnitud variable a una cantidad, que se compone de cualquier forma de esta magnitud variable y de constantes. Sin embargo, Bernoulli no menciona qué entendía por cantidad. Euler, en su *Introductio*..., reproduce la definición de Bernoulli, cambiando la palabra "cantidad" por la frase "expresión analítica". Pero, Euler en sus comentarios aclara el significado del término "expresión analítica", para ello enumera las operaciones por medio de las cuales una expresión analítica puede ser constituida: las operaciones algebraicas, algunas trascendentes, como las funciones exponencial y logarítmica y otras que surgen como solución a ecuaciones diferenciales. Como esta enumeración resulta algo ambigua, declara que la forma universal y más conveniente de expresar una función es mediante una serie de potencias, donde las potencias de la variable pueden ser no solo las enteras positivas sino números cualesquiera. Esta concepción de función, que podemos denominar de Bernoulli-Euler, fue aceptada por muchos otros matemáticos hasta Lagrange inclusive, quien la convirtió en el instrumento básico para la fundamentación del cálculo.

Pero esta no fue la única forma en que Euler concibió las funciones. En el segundo volumen de la *Introductio*..., dedicado a la geometría, define una línea curva plana como correspondiente a cualquier función de x, así que estas líneas son representadas por funciones de x. Basada en esta idea realiza su clasificación de las funciones en *c*ontinuas y discontinuas o mixtas. En el sentido de Euler, continuidad significaba invariabilidad de la ley que determina la ecuación y discontinuidad un cambio en esta ley. Esta terminología euleriana, no usual para nosotros, fue usada hasta la época de Bolzano y Cauchy, cuando la noción de función continua se le confiere el sentido actual.

En la *Introductio*..., Euler declara explícitamente que va a tratar con expresiones analíticas, donde las variables pueden tomar valores cualesquiera incluso “imaginarios” y, aunque no da una definición explícita de estos números, demuestra gran maestría en el trabajo con ellos. En esta obra Euler clasifica las funciones en dos tipos: algebraicas y trascendentes. A las primeras les adjudica el mismo significado que le damos actualmente. Dentro de las funciones trascendentes incluye tanto las funciones trigonométricas y aquellas definidas por exponenciales y logaritmos como también las dadas mediante integrales; sin embargo, dado el carácter elemental del texto, no trata estas últimas.

La parte más atractiva de esta obra es el tratamiento sistemático que realiza Euler de las funciones trascendentes elementales, para las cuales introduce notaciones apropiadas, demuestra numerosas propiedades y elabora unas normas de trabajo con ellas muy cercanas a las que suelen encontrarse en los textos actuales. Por ejemplo, define la función exponencial como una potencia donde el exponente es variable y a continuación define el logaritmo de *y* con base *a* como el valor *z* tal que $a^z = y$. De este modo, las propiedades básicas del logaritmo son obtenidas a partir de la exponencial.

Hasta la aparición de esta obra de Euler, las magnitudes senos y cosenos eran longitudes de segmentos de líneas relacionadas con una circunferencia de radio dado *R*. Así el seno de *A* era el segmento *QP*, la mitad de la cuerda que subtiende el ángulo de magnitud *2A*, y el coseno de *A* la longitud de la perpendicular *OQ,* desde el centro de la circunferencia hasta esta cuerda (Figura 2). Así que con R = 1000, sen 30° = 5000 y cos 30° = 8660,25. Euler considerará solo el círculo de radio unidad, quedando de este modo completamente determinadas las funciones trigonométricas elementales.

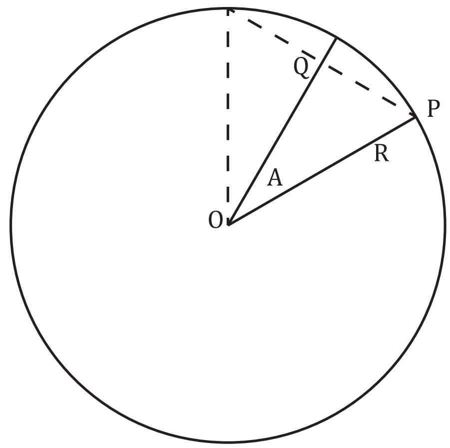
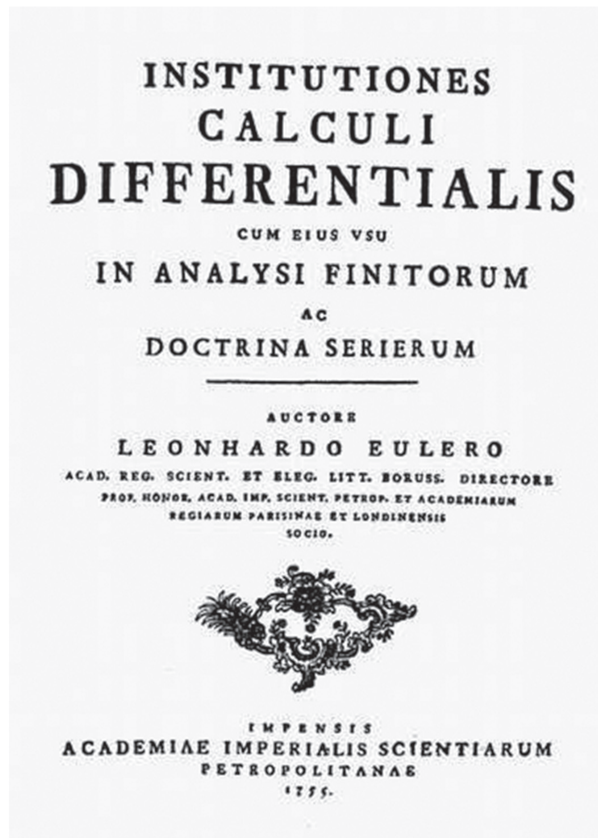


Fig. 2



INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

No cabe la menor duda acerca de que Euler conocía muy bien y utilizaba las numerosas aplicaciones del cálculo diferencial a la geometría, no obstante, *Institutiones Calculi Differentialis* va a ser una obra sobre análisis puro. No encontramos alguna aplicación geométrica y ni tan siquiera gráficos explicativos. Se observa un gran contraste con los textos de análisis anteriores, donde abundan las consideraciones geométricas. De esta manera comienza un largo recorrido hacia la independencia del análisis, hacia su transformación en una disciplina autónoma. Esta tradición la va a seguir Lagrange y a ella no escapa tampoco Cauchy. Para Euler el trabajo con los diferenciales no es más que una extensión del método para operar con las diferencias finitas, ya que los primeros aparecen cuando estas diferencias, asumidas previamente como finitas, se hacen infinitamente pequeñas. Por esta razón, en *Institutiones Calculi Differentialis* comienza con una exposición de las diferencias finitas y sus propiedades y después obtiene de forma original las fórmulas básicas del cálculo diferencial. Por ejemplo, para $y = \ln x$, Euler escribe:

$$dy = \ln(x+dx) - \ln x = \ln\left(1+\frac{dx}{x}\right) =$$
$$= \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \dots$$

Entonces, despreciando los diferenciales de orden superior, da inmediatamente la fórmula $d(\ln x) = dx/x$. En este texto, Euler discute los extremos de las funciones de dos variables. Encuentra la condición necesaria de anulación de las primeras derivadas parciales, sin embargo, falla en su intento de encontrar una condición suficiente, pues afirma que cuando las derivadas parciales $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ son ambas positivas en un punto, entonces la función V tiene en ese punto un mínimo y si ambas son negativas, tiene un máximo. Proporciona varios ejemplos ilustrativos y, asombrosamente, incluye uno donde su criterio ofrece un resultado equivocado: la función $V = x^3 + y^2 - 3xy + (3/2)x$, que, según su criterio, tiene en el punto (1/2, 3/4) un mínimo, lo cual es falso.

Al cálculo integral le dedica Euler la obra *Institutiones Calculi Integralis,* que va a aparecer en tres tomos entre 1768 y 1770. En esta obra Euler define el objetivo del cálculo integral como el "método de encontrar ciertas cantidades variables conocida una relación entre sus diferenciales". Así que, como era usual en la época, lo considera el inverso del cálculo diferencial.

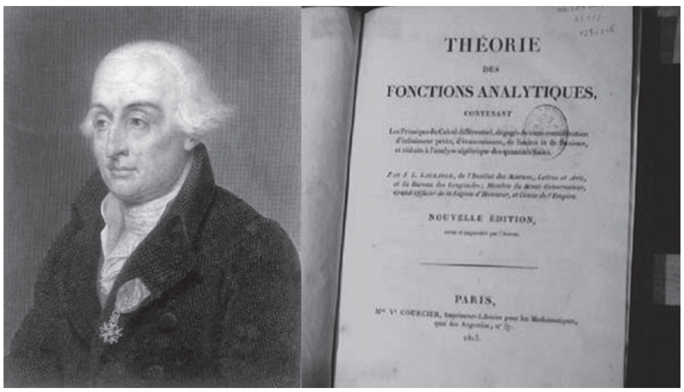
La primera parte está dedicada a exponer sistemáticamente los métodos de cálculo de primitivas de diversas clases de funciones. El resto del texto se dedica a la resolución de ecuaciones diferenciales. Al igual que los otros dos textos, es un libro que versa sobre análisis puro, no contiene ni aplicaciones a la geometría ni de cualquier otro tipo, ni siquiera aparece el cálculo de alguna integral definida. A pesar de que, con una perspectiva moderna, podríamos encontrar lagunas en estos textos, ellos fueron sumamente influyentes hasta el final del siglo XVIII, debido a la calidad de sus explicaciones y la organización del material. Cumplieron sus objetivos de propagar las nuevas ideas entre las capas sociales favorecidas con el acceso al conocimiento.

Pero al iniciarse un nuevo siglo, impulsado por las ideas de la revolución social burguesa en Francia y los adelantos económicos propiciados por la revolución industrial iniciada en Inglaterra, las necesidades comenzaron a cambiar. Con el ascenso al poder de la burguesía, clase entonces mucho más numerosa que la aristocrática, se abrieron las puertas del saber a ciudadanos que mostraban su talento como única riqueza. Este saber adquirió nuevos fines sociales y se comenzaron a estudiar las ciencias técnicas con una fuerte base analítica. Aparecieron estudiosos interesados por la matemática como herramienta fundamental en sus trabajos profesionales y, con ellos, la necesidad de nuevos textos, que obedecieran a las nuevas exigencias tanto económicas como socioculturales.

4. Los primeros textos de l’École Polytechnique

En la época que enseñaba en la École Polytechnique, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) reflexionó profundamente sobre los fundamentos del cálculo y publicó en 1797 la obra *Théorie des fonctions analytiques*, resultado de estas meditaciones y de su experiencia como el primer profesor de análisis de la École Polytechnique. Estas inquietudes acerca de la fundamentación del cálculo habían sido objeto de preocupación por Lagrange desde los comienzos de su actividad matemática. Lagrange consideró los desarrollos en series el fundamento del cálculo con el objetivo de evitar cualquier referencia al movimiento, a los infinitesimales, a cocientes de cantidades evanescentes o a la idea de límite, su programa era esencialmente de reducción al cálculo algebraico.

En un discurso publicado en 1796 en el *Journal de l’École Polythecnique*, Lagrange expone el objeto de la teoría que será el tema de su curso y que constituirá el contenido del libro. Al igual que Euler y todos sus contemporáneos, Lagrange está plenamente convencido que toda función es susceptible de ser desarrollada en series de potencias, con la excepción, quizás, de algunos valores aislados de la variable. Comenta que, hasta ese momento, todos los métodos de exposición de los principios del cálculo diferencial siempre han tenido por objetivo encontrar, en forma aislada, los primeros términos del desarrollo de una función, desgajándolos del resto de la serie, ya que la solución de todos los problemas del cálculo diferencial dependen únicamente de estos primeros términos y afirma que éste es prácticamente el único objetivo a cumplimentar con este cálculo.



Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

A continuación expone su idea fundamental de que el análisis se reduce a, dada una función, encontrar sus funciones derivadas y recíprocamente, dada la función derivada encontrar la primitiva. En este discurso introduce esos términos actualmente tan familiares a nosotros. Dice Lagrange: «[...] dada una función considerada como primitiva, se puede deducir, por reglas simples y uniformes, otras funciones que llamo derivadas; [...] Estas transformaciones responden a la diferenciación y a la integración; pero en la teoría de funciones, ellas no dependen más que de operaciones puramente algebraicas, fundadas sobre los principios simples del cálculo.»

En su libro de texto, Lagrange explica detalladamente cómo obtener las funciones derivadas: «Asignemos a la variable de una función un incremento, podemos, si la función es algebraica, desarrollarla en potencias de esta cantidad, mediante las reglas familiares del álgebra. El primer término del desarrollo será la función dada que se denominará función primitiva, los términos siguientes estarán formados de varias funciones de la misma variable multiplicados por las sucesivas potencias de la cantidad arbitraria. Estas nuevas funciones dependerán solo de la función primitiva de las cuales son derivadas y podemos llamarlas funciones derivadas. En general, sea la función primitiva algebraica o no, siempre se puede desarrollar de la misma forma, y de esta manera hacer aparecer las funciones derivadas.»

En este párrafo se ponen de manifiesto dos cuestiones fundamentales: Lagrange utiliza como base del razonamiento a las funciones algebraicas, para las cuales sus ideas tienen lugar sin ningún tipo de discusión y afirma rotundamente que cualquier función, algebraica o no, puede también desarrollarse en serie. En realidad Lagrange siente la necesidad de demostrar esta afirmación clave sobre la que se basa toda su teoría. Pero la demostración que presenta, como es natural esperar dado el desarrollo de la matemática en ese momento, no es satisfactoria.

A pesar de las buenas intenciones y el prestigio de su autor, el programa de Lagrange no tuvo éxito. Esto se debió a que tenía una aplicabilidad limitada solo a una clase particular de funciones que hoy, precisamente denominamos analíticas y sabemos que son demasiado pocas. Además, en esencia, Lagrange utilizaba de forma implícita los mismos conceptos que pretendía eliminar.

Un prolífico autor de libros de textos de matemática, en la no menos prolífica etapa revolucionaria francesa, lo fue Silvestre François Lacroix (1765-1843), quien entre otros publicará el *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* a partir de 1797.

Esta obra, en tres volúmenes, tenía por objetivo dar un compendio de los métodos del cálculo desarrollados desde la época de Newton y Leibniz. Así, en cuanto al cálculo diferencial, su autor expone tanto el punto de vista de Lagrange de los coeficientes diferenciales, como el de Euler del cociente de infinitesimales o la forma embrionaria del límite de un cociente incremental que había propuesto D'Alembert en la *Encyclopédie*. Consideraba que de esta forma el lector poseía los elementos para juzgar por sí mismo. Esto es el reflejo de la coexistencia en la práctica matemática de diferentes enfoques sobre los conceptos de derivada y diferencial, y de la sensación de insatisfacción que producía cada uno de ellos.

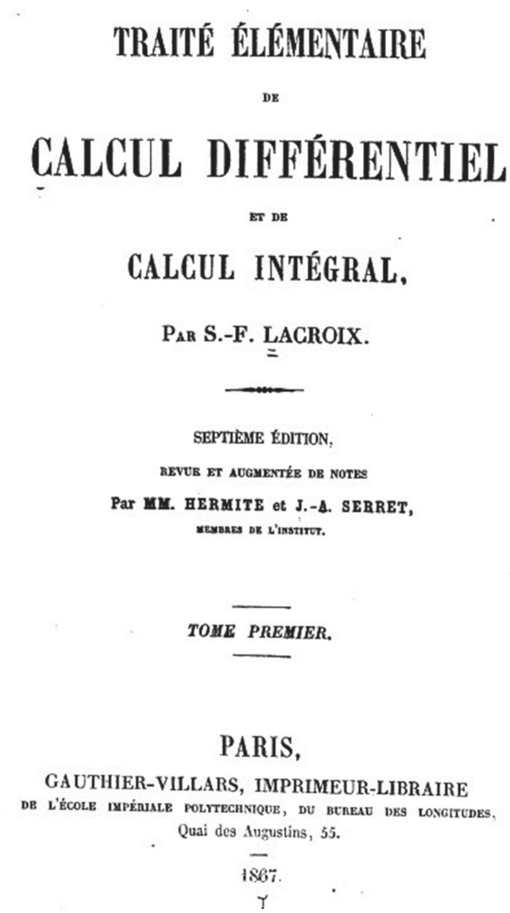
Más tarde, urgido por sus alumnos, Lacroix se vio en la necesidad de publicar una versión reducida de este texto, en un solo volumen, titulado *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, que resultó muy popular, de modo que apareció en 9 ediciones entre 1802 y 1881, fue traducido al inglés en 1816 y al año siguiente al alemán. Es a través de esta traducción que "la nueva matemática" que se hacía en el continente penetró en las islas británicas.

En este libro Lacroix opta por la noción de límite para basar su definición de derivada y la noción de límite lo define en el proceso de su utilización. Por ejemplo, cuando $u = ax^2$ toma $u_1 = a(x + h)^2$, entonces comenta que el cociente $(u_1 - u)/h = 2\,ax + ha$ se compone de dos partes, una es $2ax$ que no depende de h y la otra está afectada por h. Si concebimos que esta última cantidad disminuya, el resultado se aproxima sin cesar a $2ax$, de manera que este es el límite del cociente, es decir, el valor hacia el cual tiende a medida que la cantidad h disminuye y al cual puede aproximarse tanto como se quiera.

Lacroix muy tempranamente introduce la serie de Taylor de una función y tiene la opinión, al igual que Lagrange, de que todas las funciones pueden ser desarrolladas mediante series de potencias. Explica los métodos de encontrar extremos, incluidas las funciones de varias variables, y en particular, rectifica el error cometido por Euler, encontrando, para las funciones de dos variables, una condición suficiente correcta para que un punto sea de extremo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$$

El estándar de rigor lógico, formado en el análisis matemático en la segunda mitad del siglo XVIII se quedaba atrás de las aplicaciones. El problema de la reconsideración crítica del sistema de definiciones y procedimientos lógicos en las demostraciones adquirió novedad singular. Por ello las investigaciones sobre la fundamentación del análisis matemático ocuparon en la matemática del siglo XIX un lugar importante. Las teorías que habían surgido en el análisis matemático durante el curso del siglo XVIII ya estaban extensamente desarrolladas y las dificultades que quedaban por resolver eran de una complejidad extrema, por ejemplo la búsqueda infructuosa de la primitiva de ciertas funciones algebraicas. Es por esta razón que a fines de este siglo muchos compartían la convicción de que la investigación


TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL,

PAR S.-F. LACROIX.

SEPTIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE DE NOTES

Par MM. HERMITE et J.-A. SERRET,

MEMBRES DE L'INSTITUT.

TOME PREMIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1867.

matemática se movía hacia su fin. Esto se refleja claramente en las siguientes líneas que Lagrange escribe a D'Alembert en 1781: «Me parece que la mina (de la matemática) ya ha sido agotada, y al menos que alguien descubra una nueva veta será necesario antes o después abandonarla. [...] y no es imposible que el lugar de la geometría en las academias sea ocupado un día en la forma como se ocupa la cátedra de árabe en las universidades.» Sin embargo, no todos compartían esta visión pesimista y nuevas condiciones propiciaron un interés reverdecido por mejorar las herramientas de las ciencias matemáticas.

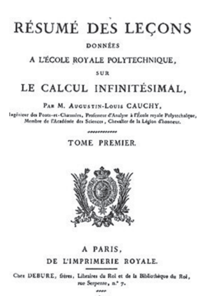
Efectivamente, con la creación de las *Grandes Écoles* en Francia aparece el concepto moderno de Universidad y la incorporación a las mismas de los científicos más prestigiosos que hasta entonces se habían visto obligados a la reclusión en las academias y a realizar su trabajo científico bajo el mecenazgo de príncipes y soberanos. Esta nueva concepción de la universidad que llevaba consigo la exigencia de organizar rigurosamente los contenidos de cada ciencia con propósitos didácticos va a condicionar en gran medida el desarrollo ulterior del análisis.

En 1813 Augustin Louis Cauchy (1789-1857) comenzó a enseñar en la École Polytechnique y en 1821 publica el *Cours d'Analyse*, donde introduce nuevos métodos de fundamento del cálculo.

Este texto será seguido, en 1823, por el *Résumé des leçons sur le Calcul Infinitesimal*. Posteriormente en 1826 y 1828 publicará las dos partes de las *Lecciones sobre las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la geometría*, la primera parte dedicada a las aplicaciones del cálculo diferencial y la segunda a las del integral y que

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.
I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.
1821.



RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL,
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.
TOME PREMIER.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.
1823.

concibe como complementos al *Resumé*. Estos textos fueron un modelo a seguir en el resto del siglo y aún podemos notar su influencia en la manera en que se conforman los cursos y textos actuales de esta disciplina matemática.

Cauchy va a utilizar la noción de límite para dar coherencia a las definiciones de continuidad, derivada e integral de una función así como la convergencia de una serie. Ahora podemos apreciar lo importante que fue para la matemática el haber aislado este concepto, el cual estuvo presente más o menos claramente en el espíritu de cada matemático desde el mismo origen del cálculo infinitesimal.

Cauchy define límite de una variable: «[...] cuando los valores atribuidos sucesivamente a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él tan poco como se quiera, este último se llama límite de los otros.»

Más adelante señala que «[...] cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente de manera que sea menor que todo número dado, la variable se convierte en lo que se llama un infinitesimal o una cantidad infinitesimal. Una variable de esta especie tiene a cero por límite.»

De este modo, abandona definitivamente el lenguaje misterioso y controvertido de los infinitesimales que pasan simplemente a ser variables de límite cero.

La continuidad de una función la define totalmente distinto a la forma euleriana. La aclaración completa de la diferencia entre ambas nociones de continuidad aparece en 1844 cuando da el ejemplo de la función

$$y = \left\{ \begin{array}{c} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{array} \right\},$$

que con esta definición resulta discontinua en el sentido de Euler, pero que también puede ser dada por una sola expresión analítica $y = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dt}{t^2 + x^2}$, y sería por tanto *continua* en este mismo sentido. Así muestra Cauchy que la definición dada por Euler resulta insostenible teóricamente.

Para Cauchy una función *f* es continua entre dos valores *a* y *b* si en valor absoluto la diferencia *f(x + α) - f(x)* decrece indefinidamente *con* α. Notemos que Cauchy no define función continua en un punto, sino en un intervalo, posiblemente sea esto lo que le lleva a confundir reiteradamente la continuidad con la continuidad uniforme.

Es interesante notar que Bernard Bolzano dio en 1817 una definición de continuidad esencialmente idéntica a la de Cauchy. El objetivo de Bolzano era demostrar rigurosamente la idea geométrica, que se tenía desde mucho antes, de que una función continua debe tomar todos los valores intermedios entre dos dados. También Bolzano definió continuidad en un intervalo, aunque su definición era más precisa que la de Cauchy. Como un lema fundamental, Bolzano demuestra que todo conjunto acotado superiormente de números reales tiene una cota superior mínima. Para ello hace uso del conocido como criterio de convergencia de Cauchy, para el cual da una prueba. Por supuesto, la prueba de Bolzano, al igual que la de Cauchy, era incompleta, pues ambos carecían de una construcción adecuada de los números reales. En general los trabajos de Bolzano no circularon ampliamente y no resulta clara la influencia que pudo haber ejercido en sus contemporáneos, incluido Cauchy.

En sus textos sobre cálculo diferencial e integral, Cauchy aplica las nuevas ideas sobre límites a la definición y estudio de la derivada y la integral. Define la función derivada en forma completamente contemporánea, como el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, siempre que este límite exista. Cauchy no encuentra nuevos resultados sobre la derivada, sin embargo, en la demostración de los resultados conocidos hace un uso amplio de su definición y para ello necesita trasladar al lenguaje de las desigualdades el concepto de límite.

Mientras que para Lagrange el desarrollo de funciones en serie de Taylor era el punto de partida, Cauchy lo expone en el final de su *Resumé*... En el prólogo advierte que se vio forzado a «enviar al cálculo integral la fórmula de Taylor, ya que esta fórmula puede ser admitida como general solo cuando la serie que ella encierra se reduce a un número finito de términos y además es completada por una integral definida.» De esta manera, demuestra la fórmula con el resto en forma integral y además explicita que debe demostrarse que este resto tiende a cero para poder considerar la representación de la función por una serie infinita. Para ello propone el ejemplo de la función $f(x)=e^{-x^2}+e^{-(1/x)^2}$, cuya serie de Taylor en $x = 0$ no converge a la función f sino a su primer sumando e^{-x^2}. Sin embargo, al final de la publicación adiciona una nota señalando que ha encontrado una forma de realizar la demostración sin necesidad del auxilio del cálculo integral. Se trata de la generalización del teorema del valor medio, hoy asociado en muchos textos al nombre de Cauchy.

La concepción de integral como proceso inverso de la diferenciación, después de logros tan importantes como el cálculo de primitivas de funciones racionales, de ciertas clases de irracionales y funciones trascendentes, se encontró con serias dificultades de tipo analítico. Incluso integrales de la forma $\int f\left(x,\sqrt{R(x)}\right)dx$, donde R es un polinomio de tercer o cuarto grado y f una función racional no se lograba integrar en forma exacta.

Por otra parte, el análisis matemático había penetrado profundamente en la física, donde la variedad de tipos de movimientos estudiados (principalmente los procesos ondulatorios y la difusión del calor) se había ampliado considerablemente. El estudio de los problemas físicos mostró que las funciones concebidas hasta el momento, las analíticas, no eran suficientes, había que considerar procesos no analíticos y, en ocasiones, incluso discontinuos. Una de las formas idóneas de descripción de tales procesos resultó el desarrollo de funciones en series trigonométricas de Fourier, cuyos coeficientes se calculaban mediante integrales. Así pasó a un primer plano la necesidad dar una definición de la integral definida que fuera independiente del cálculo de unas primitivas difíciles o imposibles de hallar.

Euler parece que fue el que en su forma más vívida expresó la idea de la integración como inversión de la diferenciación, pero a la vez reconocía su limitación. Cuando no conseguía encontrar la primitiva de una función entonces expresaba: «no nos queda otra cosa que tratar de encontrar para ella un valor tan próximo como se quiera al verdadero.»

Precisamente la forma euleriana de aproximación es la que Cauchy va a convertir en la esencia del concepto de "integral definida". Cauchy considera una función continua sobre el intervalo $[x_0, X]$, subdivide este intervalo en n subintervalos por medio de los puntos $x_0, x_1, ..., x_n = X$. y a esta subdivisión asocia la suma $S=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$. Entonces, define la integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ como el límite de las sumas anteriores, cuando la mayor de las longitudes $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero. Para dar consistencia a esta definición demuestra la existencia y unicidad de este límite, y en esta demostración Cauchy inadvertidamente identifica los conceptos de continuidad y continuidad uniforme de una función.

Más adelante Cauchy da la noción de primitiva de una función como la integral definida con el límite superior variable. Con este enfoque va a subordinar, por vez primera, la noción de integral indefinida a la de integral definida, lo que constituye un momento crucial en el camino hacia la constitución de la teoría moderna de la integración. Cauchy escribe en 1823: «[...] me parece que esta manera de concebir la integral definida debe ser adoptada preferentemente ya que es igualmente válida en todos los casos incluso cuando no podamos pasar de la función colocada bajo el signo de integral a la función primitiva. Además cuando se adopta, de esta manera puede fácilmente demostrarse que una integral tiene un valor finito único, cuando la función permanece continua entre los dos valores en los que se toma la integral.»

El nuevo cálculo, después de ser paulatinamente sistematizado en la obra de los ilustrados del siglo XVIII, queda establecido y reconocido como ciencia normal en los textos elaborados por Cauchy. Estos textos serán el paradigma fundamental para los cursos de cálculo diferencial e integral durante mucho tiempo, no solo en Francia, sino también en buena parte de Europa. Pero, estos libros, aun cuando no incluyeran gráficos y aplicaciones de índole geométrica, apelaban con frecuencia a la intuición geométrica, para justificar algunas afirmaciones básicas, especialmente aquellas cuya demostración rigurosa dependía de la propiedad de continuidad de los números reales.

En los cursos impartidos por el germano Karl Weierstrass (1815-1897) en la Universidad de Berlín, a partir de 1861, surge una nueva concepción del rigor en la exposición de los conceptos fundamentales del cálculo, en particular incluirá una tentativa de construcción de los números reales, la primera definición de continuidad utilizando el lenguaje épsilon-delta y el uso de esos instrumentos para la demostración rigurosa de algunas de las propiedades básicas de las funciones continuas, aceptadas hasta entonces sin cuestionamiento alguno. Weierstrass no publicará ningún texto basado en sus lecciones, pero estas ejercerán una influencia decisiva en matemáticos de varios países europeos. Así en 1878 el italiano Ulises Dini (1845-1918) publica el texto *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, donde se realiza la construcción de los números reales a través del método de las cortaduras de Dedekind y se demuestran rigurosamente por vez primera algunos de los teoremas básicos del cálculo diferencial, en particular el importantísimo teorema del valor medio introducido por Lagrange y demostrado hasta el momento con suposiciones implícitas por varios autores, entre ellos Cauchy. También cabe destacar la publicación en 1884 del libro *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale,* publicado por el italiano Angelo Genocchi (1817-1889), con una introducción crítica importante de Giuseppe Peano (1858-1932), referente a la forma que en los textos aparecían los teoremas básicos del cálculo.

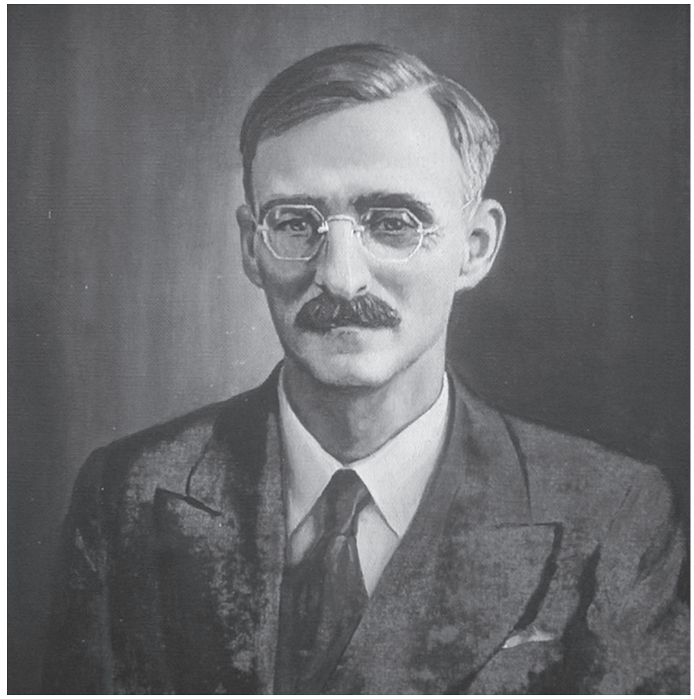
Entre los textos criticados por Peano se encuentra la primera edición del primer tomo del *Cours d'analyse de l'École Polytechnique,* de Camille Jordan (1838-1922), publicado en 1882. Quizás motivado por estas críticas, Jordan en el tercer tomo, aparecido en 1887, incluye un suplemento de 65 páginas donde agrega algunas propiedades y justifica muchas otras juzgadas como inmediatas en el primer tomo. En la segunda edición, publicada en 1893, reestructurará completamente su obra, logrando vencer las dificultades inherentes a los fundamentos del análisis y realiza por vez primera de forma bastante completa una síntesis de todas las ideas nuevas surgidas en la fundamentación del Cálculo Diferencial e Integral. Esta segunda edición será alabada por todos los grandes matemáticos de fines del siglo XIX y comienzos del XX, Hadamard y Peano entre ellos y ejercerá gran influencia en la nueva generación de matemáticos (Gispert-Chambaz, 1980).

En realidad, muchos matemáticos de esta época, aunque conocían y dominaban la fundamentación que se le había construido al cálculo diferencial e integral, todavía no consideraban necesaria su inclusión en los cursos y textos. Así, a excepción de las pocas obras mencionadas, la mayoría de los tratados de fines del siglo XIX y principios del XX, no construyen los números reales, apelan al recurso de la demostración geométrica que en realidad no es más que una ilustración geométrica, la continuidad apenas se mencionaba, pues siempre se concebían funciones suaves, definidas sobre buenos conjuntos. Las reglas de derivación eran meras fórmulas para aplicar mecánicamente, la integral se concebía fundamentalmente como el proceso inverso a la derivación y, a través de comentarios intuitivos geométricos, se utilizaba para el cálculo de áreas y otras magnitudes geométricas o físicas (Granville, W.A. 1911).

Con los comentarios anteriores hemos pretendido dar una panorámica del proceso de aceptación de los principales conceptos que sirven para precisar ideas y fundamentar el uso de las herramientas del cálculo diferencial e integral. Los textos reseñados son los que hemos considerado más significativos y no representan a la mayoría, sino a la vanguardia. Para culminar este trabajo queremos hacer unas observaciones críticas al texto de Cálculo usado en la Universidad de La Habana en una gran parte del siglo XX y que es el primero escrito por un criollo nacido y formado completamente en Cuba. Además lo consideramos un merecido reconocimiento al cumplirse un centenario de su publicación.

5. El primer texto cubano de Cálculo

El texto *Elementos de Algebra Superior,* del profesor Pablo Miquel y Merino,[2] publicado en 1914, es el primer libro de au-



tor cubano, que desarrolla los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral. Pero no es posible apreciar adecuadamente el impacto de la labor del profesor Miquel en la elevación de la calidad de la enseñanza del cálculo en nuestro país sin tener alguna noción acerca del estado de la enseñanza del análisis matemático cuando el joven Pablo Miquel ingresa en la Universidad de La Habana (Sánchez,C.; Valdés, C. 2013).

El plan de estudio para las carreras de Ingenieria Civil, Arquitectura y Ciencias Físico-Matemáticas, matriculadas por el joven Pablo Miquel y Merino en 1904, incluía dos cursos anuales relacionados con el cálculo diferencial e integral: Álgebra Superior en el primer año y Cálculo Diferencial e Integral en segundo. El único libro que aparece recomendado para el curso de Álgebra Superior es *University Algebra,* de E. Olney, cuyo autor es profesor de la Universidad de Michigan y la edición encontrada en la Biblioteca Nacional es de 1884. La obra está dividida en tres partes, la primera y segunda son eminentemente elementales y están concebidas como un repaso de los temas de álgebra correspondientes a la enseñanza secundaria. En la tercera parte denominada *Curso Avanzado de Algebra* se introducen los elementos de diferenciación, la fórmula de Taylor y el método de los coeficientes indeterminados. Por la forma de exposición de su contenido este libro no solo tiene dos siglos

[2] Pablo Miquel y Merino (La Habana, 1887-1944). Al terminar sus estudios secundarios en 1903 viaja a España y matricula en la Universidad de Deusto, donde no consigue culminar el primer año por enfermedad. Al siguiente curso matricula en la Universidad de La Habana las carreras de Ingenieria Civil, Arquitectura y Ciencias Físico-Matemáticas. El título de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas lo obtiene en 1908, en 1910 el de Ingeniero Civil y en 1912 el de Arquitecto. En el curso 1912-1913 comienza su labor como docente, durante 30 años en la enseñanza del Análisis Matemático, primero como catedrático auxiliar y desde 1921 como Titular de la Cátedra A. Participa en el perfeccionamiento de la enseñanza media como miembro de numerosas comisiones encargadas de la elaboración de programas y selección de profesores y textos. Participa en la creación de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas en 1942, siendo su primer presidente y director de la revista de la Sociedad desde la fundación hasta su fallecimiento el 3 de abril de 1944.

de retraso, sino que la pretensión de hacerlo "comprensible" lo coloca en la posición de dar un conjunto de recetas para operar con unos conceptos mal definidos y carentes de un significado siquiera próximo al que de los mismos tenían los matemáticos del siglo XVII. Veamos algunos ejemplos:

- Diferencial de una función o variable es la diferencia entre dos estados consecutivos de la función o variable. Es lo mismo que un infinitesimal.
- Número real es un número el cual puede concebirse como yaciendo en alguna parte de la serie de números o cantidades entre -∞ e ∞ ambos inclusive.
- Una serie se dice convergente si los términos sucesivos decrecen de acuerdo a una ley de modo que hace la suma finita.

El programa del segundo curso (ver Memoria Anuario curso 1902-1903) recomienda los textos: *Cálculo Diferencial e Integral,* de L. Gómez de Terán; *Calculus,* de E. Olney, y *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytecnique,* de Ch. Sturm.

El libro de Sturm abarca aquellos temas del análisis matemático que se estudiaban frecuentemente en las universidades europeas a mediados del siglo XIX, incluyendo temas ausentes en el programa, por ejemplo, trata con cierta extensión las ecuaciones en derivadas parciales y tiene un capítulo dedicado al cálculo de variaciones. La exposición de los conceptos de diferenciación e integración está realizada en el estilo de los textos de Cauchy para la Escuela Politécnica descritos en el epígrafe anterior y aparecen cuestiones tales como la demostración errada de que una serie convergente de funciones puede integrarse término a término (p 385). Esta demostración está realizada de forma semejante a la que presenta Cauchy en su *Resumé des Leçons données a l'Ecole Royale Polytchnique* (1823).

En la Biblioteca de la Universidad de La Habana encontramos el texto recomendado *Lecciones de Cálculo Infinitesimal dictadas en la Escuela de Ingenieros de San Juan*, República Argentina, de Leopoldo Gómez de Terán,[3] editado en 1890. Comentemos la forma en que son presentados en este texto algunos de los conceptos básicos: «Se llama cantidad infinitamente pequeña o simplemente un infinitamente pequeño a una cantidad variable que puede aproximarse a cero tanto como se quiera, pero sin jamás anularse.»

Las funciones se clasifican en dos tipos: cuando la relación de dependencia que existe entre dos cantidades variables sea susceptible de ser expresada por medio de los algoritmos de cálculo y cuando esto no es así. Añade que en el primer caso la ley de dependencia recíproca se expresa por medio de una relación analítica y se llama una ecuación y de los ejemplos propuestos se infiere que el segundo tipo se trata de las funciones empíricas dadas por una tabla de valores. Así que su concepción de función prácticamente se remite a la forma en que se valoraba esta idea a comienzos del siglo XVIII.

Define función continua como aquella tal que puede asignarse a la variable o variables independientes valores tan próximos que la diferencia entre los valores correspondientes de la función sea menor que cualquier cantidad por pequeña que sea. Realiza una "demostración" de que toda función continua es derivable excepto a lo sumo en un número finito de puntos.

De lo anterior se evidencia que, a pesar de la loable intención de presentar, en idioma castellano, una exposición accesible del análisis infinitesimal, en realidad lo que se propone es una exposición distorsionada por la comprensión que el autor tiene del tema.

Es interesante, además, analizar la forma en que el Catedrático titular de Análisis Matemático, J. R. Villalón Sánchez, interpretaba algunos de los conceptos antes comentados. Para ello contamos con el discurso de ingreso a la Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales de La Habana, que realizó el Ing. Villalón el 24 de abril de 1908 y que tituló *Introducción al estudio del Cálculo Infinitesimal* (Villalón Sánchez, 1908-09). He aquí su concepto de cantidades infinitas e infinitesimales: «La potencia de nuestros sentidos y de nuestra imaginación limitan prácticamente lo finito, y aquellas cantidades o magnitudes que, por ser demasiado grandes o demasiado pequeñas, sobrepasan ese límite se llaman infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, o sea infinitas o infinitesimales.»

Su concepción de una función continua es una amalgama de la definición euleriana y la que la sustituyó en la prime-

3 El autor dedica este libro a José Echegaray, su profesor en la Escuela de Ingenieros de Caminos, de Madrid.

ra mitad del siglo XIX debida a Bolzano y Cauchy. En particular señala que; «Una función continua tal como $y = f(x)$ está caracterizada por las siguientes condiciones que debe cumplir:

- Para cada valor finito de la variable independiente x corresponde un valor finito de la función.
- A medida que x cambia gradualmente por variaciones infinitesimales, la función deberá cambiar gradualmente por variaciones también infinitesimales.
- La ley simbolizada por el carácter de la función no debe cambiar abruptamente.»

Para aclarar el significado de la tercera condición incluye el gráfico de la Fig. 3 y expresa: «Si la función representara un lugar geométrico tal como el de la Fig.1 de modo que BA fuera una curva continua trazada según una ley determinada pero que al llegar al punto A dicha ley cambiara de repente y a partir de este punto aquella curva se convirtiera en una recta, entonces la tercera de las condiciones quedará incumplida y la función sería discontinua y A sería un punto de discontinuidad.»

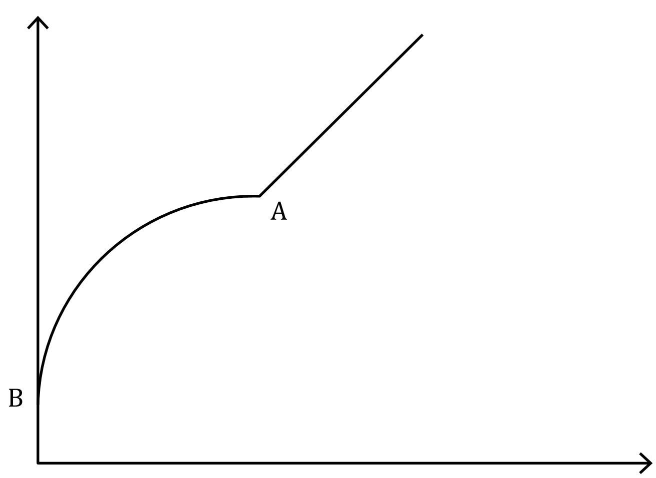


Fig. 3

Estos comentarios nos parecen suficientes para concluir que los textos de Análisis Matemático que se utilizaban, además de tener al menos un siglo de atraso, en aras de una supuesta simplificación presentaban la materia de forma distorsionada. Distorsión esta que va a ser magnificada por la ignorancia y falta de actualización matemática del Catedrático Titular de la asignatura.

La primera edición del texto *Álgebra Superior* (1914) comienza con 4 capítulos dedicados a teoría combinatoria, determinantes, análisis indeterminado y polinomios con coeficientes indeterminados. En el Capítulo V se estudian los números complejos los cuales introduce en forma natural: «[...] la sustracción, cuando el sustraendo era mayor que el minuendo nos había obligado a ampliar la serie de los números enteros añadiéndole los números negativos.

La inversa de la multiplicación, o sea la división obliga a introducir los números fraccionarios para poder explicar el caso en que el dividendo no es múltiplo del divisor.

El conjunto de los números enteros y fraccionarios positivos y negativos forman el conjunto de los números conmensurables. La inversa de la elevación a potencias, que se llama extracción de raíces, en esta operación pueden ocurrir dos clases de imposibilidades, una proveniente de que los números no todos tienen raíz exacta lo cual obliga a crear los inconmensurables y otra que consiste en que ninguna potencia de grado par de un número real puede ser negativa y esto ha dado lugar a las expresiones imaginarias.»

Miquel no aclara qué entiende por número real, se puede sobreentender del párrafo anterior que los considera la unión de los números conmensurables e inconmensurables. En este aspecto de la introducción de los números reales es en el cual radica la debilidad fundamental de la obra, problema que no resolverá totalmente en las ediciones posteriores. Pero si tomamos en consideración que este texto se usaba en todas las carreras de ingeniería y de ciencias no resulta tan inadecuado tal enfoque.

Por otra parte, el concepto función lo enuncia de una forma completamente actual, y los comentarios aclaratorios que realiza demuestran que tiene una noción clara de lo que está escribiendo. Así comenta: «El concepto de función no es en el fondo otra cosa que la correspondencia entre dos conjuntos; uno el de los valores de la variable, otro el de los valores de la función. Para definir una función particular, necesitamos dos cosas:

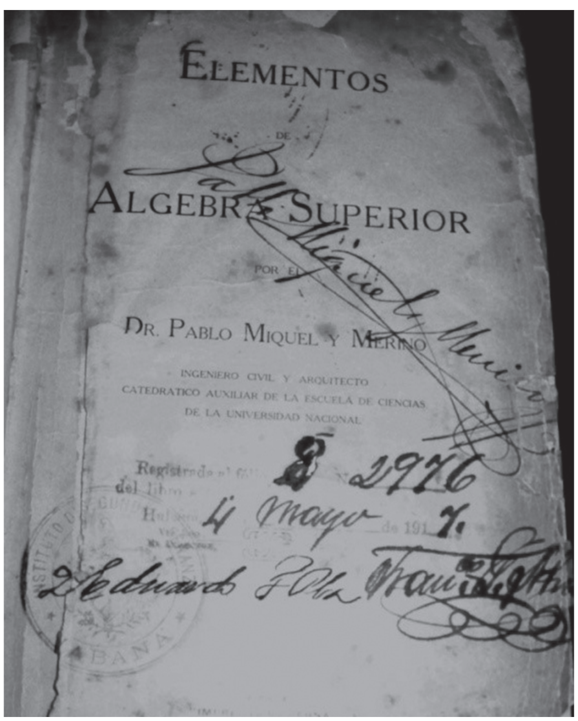
1. Designar el conjunto en que se mueve la variable, o sea definir el argumento.
2. Dar la regla que permite, dado el valor de la variable obtener el de la función, o sea la regla operatoria.»

A continuación presenta varios ejemplos tanto de las que tienen una representación analítica, como de las que provienen de ejemplos de mediciones físicas. En la tercera edición (1939)[4] va a comentar que las relaciones analíticas pueden venir dadas por más de una expresión e incluye el ejemplo de la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} x, \text{para } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, \, para \; \pi/2 \leq x \leq \pi \end{array} \right\}$$

En el texto Miquel da una definición clara y precisa de *límite de una sucesión* y propone varios ejemplos. En el primero, la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$, analiza numéricamente el cumplimiento de la definición dando valores particulares a ε. Otro ejemplo, que permite comprender cómo Miquel supera con éxito las concepciones erróneas de sus antecesores, es el de la sucesión $x = b + \frac{d}{2^n} sen \frac{n\pi}{2}$, sobre la cual escribe que $x - b$ "es alternativamente nula, positiva, nula, negativa, etc., pero dado un valor ε para la diferencia $|x - b|$ siempre es posible encontrar un valor para n, pasado el cual esta diferencia es menor que ε por pequeño que sea."

La definición de función continua en un punto la expresa en la forma actual, en el lenguaje ε-δ y ejemplifica con un polinomio sencillo de segundo grado y con la función



Copia de la primera edición del texto "Elementos de Álgebra Superior" firmada por su autor.

[4] No se localizó un ejemplar de la segunda edición del libro.

$$y = \frac{e^{\cot x} + 1}{e^{\cot x} - 1}$$

en el punto $x = \pi$, cuyos límites laterales (él los llama «valores indirectos») son diferentes en dicho punto.

En su estudio de las funciones continuas, enuncia y demuestra el teorema de Bolzano de que una función continua siempre alcanza todos los valores intermedios entre dos valores de la función dados. La demostración la realiza mediante la subdivisión sucesiva del intervalo en *n* partes iguales de forma impecable, a excepción de la conclusión "evidente" de que las sucesiones monótonas y acotadas son siempre convergentes. Aquí tenemos una manifestación de la dificultad que se produce al no dar una definición precisa y operativa, de número real. En la tercera edición enunciará sin demostración las otras propiedades clásicas de las funciones reales continuas en un intervalo compacto: la acotación y la uniformidad de la continuidad.

Presenta Miquel en su obra la definición de derivada como límite del cociente incremental y obtiene la representación clásica del incremento de la función como la suma de una parte lineal (que define como el diferencial) y una parte infinitesimal. Demuestra la continuidad de toda función derivable y muestra con el ejemplo $y = 1 + x^{1/5}$ que el recíproco no es cierto.

En la primera edición, a pesar de que considera la derivada como concepto primario, cuando calcula las derivadas de funciones con cierto grado de complejidad utiliza fundamentalmente el diferencial, esto le permite evadir el enunciado y demostración de las reglas de la derivada de la función compuesta y de la inversa. Así por ejemplo obtiene $d(sen\, x) = cos\, xdx$, la que utiliza aun cuando x sea función de otra variable.

Como puede apreciarse, en lo concerniente a los conceptos de función, límite, continuidad y diferenciación el texto *Elementos de Algebra Superior,* de Miquel, es no solo muy superior a lo que se recomendaba hasta ese momento, sino que podemos considerarlo actualizado para la época de su publicación, la segunda década del siglo XX. Sin embargo consideramos que el aspecto del Análisis Matemático donde esta obra de Miquel es realmente sobresaliente es en su presentación de las series, tanto numéricas como de potencias.

Miquel clasifica las series en convergentes, divergentes a infinito y oscilantes. Enuncia, demuestra y da una interpretación geométrica de la condición necesaria y suficiente de Bolzano-Cauchy para la convergencia de una serie. En esta parte aparece citado el influyente libro de T. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinites Series,* publicado en 1908, lo que evidencia su actualización en esta temática. La demostración de la suficiencia la realiza por reducción al absurdo: supone que diverge a infinito y llega a una contradicción con la acotación de las sumas parciales, que es una consecuencia de la condición de Cauchy. Después supone que oscila entre dos valores *A* y *B*, entonces toma dos subsucesiones de las sumas parciales una convergente a *A* y la otra a *B* y con esto llega a una contradicción. Por supuesto, en esta parte de la demostración se encuentra nuevamente con la dificultad relativa a la formalización del concepto de número real. En la tercera edición resolverá este problema enunciando como un lema, sin demostración, la propiedad de Bolzano-Weierstrass acerca de la posibilidad de extracción de una subsucesión convergente de una sucesión acotada[5].

A continuación Miquel expone de forma prolija, muy didáctica y sumamente rigurosa los criterios clásicos de series de términos positivos, el criterio de Leibniz para series alternas y criterios para series con otros tipos de periodicidad en el comportamiento del signo de sus términos.

Un tema que aparece tratado en una forma elemental, pero sumamente rigurosa, es el de las propiedades de las funciones definidas por series de potencias. Primero estudia este tipo de series considerando la variable compleja, define, como es habitual, los conceptos de círculo y radio de convergencia y encuentra sus propiedades básicas. A continuación demuestra la continuidad y derivabilidad de la función suma de una serie de potencias en el interior de su intervalo de convergencia realizando las acotaciones necesarias para el incremento de la función. En ningún momento introduce el concepto de convergencia uniforme, no obstante es claro que lo conoce y lo evade en aras de la accesibilidad de la exposición; así comenta que, aunque parezca extraño, es necesario demostrar estos resultados ya que en general la suma de cambios infinitesimales en cada término no tiene porqué ser infinitesimal. En la tercera edición añade el ejemplo de la serie de funciones continuas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{(1+x^2)^n}=\begin{Bmatrix}1+2x^2, \text{si } x\neq 0\\ 0, \text{si } x=0\end{Bmatrix},$$

cuya suma es una función discontinua en el origen.

Semejante al caso de la continuidad, enuncia y demuestra la posibilidad de derivar término a término una serie de potencias y para poner en evidencia la necesidad de tal demostración, exhibe el ejemplo de la serie convergente $\sum\frac{\cos n^2x}{n^2}$, que tiene la característica que la serie de sus derivadas es divergente.

A continuación va a exponer las operaciones con series. Para ello introduce el concepto de convergencia absoluta y la relaciona con la convergencia usual. Entre otras propiedades demuestra de forma rigurosa la posibilidad de reordenación de una serie absolutamente convergente. La idea básica del Teorema de Riemann, acerca de la posibilidad de reordenar una serie condicionalmente convergente (que denomina semi-convergente) de forma tal que converja a cualquier valor prefijado o que diverja, lo ilustra encontrando un reordenamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ convergente a cero.

Finalmente dedica los capítulos XVI, XVII y XVIII a los desarrollos en serie de Taylor y Maclaurin, realizando un análisis detallado del desarrollo de las funciones elementales, la convergencia a cero del resto y expone diferentes métodos de obtención de desarrollos de funciones elementales, así como aplicaciones de los desarrollos obtenidos para realizar cálculos aproximados. Para demostrar la fórmula de Taylor enuncia y demuestra previamente el Teorema de Rolle y en ello confronta dificultades por no contar con la propiedad de Weierstrass de acotación de una función continua en un intervalo compacto. Esta es una situación típica a finales del siglo XIX, incluso en textos europeos. Por ejemplo, refiriéndose al teorema del valor medio Gispert (Gispert-Chambaz, 1980), escribe: «Todas las demostraciones que fueron dadas hasta 1884 en los manuales, a excepción de la de Dini, son incompletas o exigen hipótesis superfluas sobre la derivada.»

En la primera edición de su texto, Miquel cita el libro de Jordan, pero como es costumbre en la época, no aclara la fecha de la edición. En la biblioteca hemos encontrado solo el tercer tomo correspondiente a la primera edición (esta edición apa-

5 Esta solución está próxima a la que asumen muchos de los textos de Análisis Matemático, cuando realizan una presentación axiomática de los números reales.

rece entre 1882-87). En este tercer tomo, Jordan realiza por vez primera en un libro de texto francés, una serie de comentarios relacionados con los fundamentos del Análisis y que serán las bases para la completa reelaboración que realizará en su segunda edición de 1893.

Los restantes 12 capítulos del libro de Miquel están dedicados a problemas algebraicos como el análisis del número de raíces de ecuaciones, la separación de las raíces reales de una ecuación y a la exposición de diferentes métodos de cálculo aproximado de estas raíces, en muchos de ellos se auxilia de las herramientas del cálculo diferencial.

En un comentario bibliográfico en el famoso texto enciclopédico de Rey Pastor y otros, 1963, p. 599 se expresa: «De tipo clásico y elemental, desarrollada a partir de los conceptos de función, límite y derivada, está la extensa y correcta obra de P. Miquel, Elementos de Álgebra Superior.»

Sin dudas el año 1914 marca un decisivo salto cualitativo crucial en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en la Universidad de La Habana y consecuentemente en Cuba. Este logro se vio acrecentado por las magistrales conferencias dictadas por el Profesor Miquel en sus más de 30 años de labor docente, por la aparición en 1939 de la tercera edición de su *Elementos de Álgebra Superior* y algo después por la publicación de sus obras de madurez: *Curso de Cálculo Diferencial* (1941) y *Curso de Cálculo Integral* (1942).

Bibliografía

CAUCHY, A. (1821) *Cours d'Analyse*, L'imprimerie Royale, Paris

CAUCHY, A. (1823) *Résumé des Leçons sur le Calcul Infinitésimal*, L'imprimerie Royale, Paris

EDWARDS, C. H. (1994) *The historical development of the calculus*. Springer Verlag, New York.

EULER, L. (1755) *Institutiones Calculi Differentialis*, Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, San Petersburgo.

EULER, L. (2001) *Introducción al análisis de los infinitos*. Edición de Antonio J. Durán, THALES, Sevilla.

GISPERT-CHAMBAZ, H. (1980) *Camille Jordan et les fondaments de l'Analyse*, Publications Mathematiques d'Orsay, Paris

GÓMEZ DE TERÁN, L. (1890) *Lecciones de Cálculo Infinitesimal dictadas en la Escuela de Ingenieros de San Juan*, Librería de Ch. Bousset, Paris.

GRANVILLE, W.A. (1911) *Elements of the Differential and Integral Calculus*, Ginn and Company, Boston.

KATZ, V. J. (1998) *A History of Mathematics: An Introduction*. Harper Collins College Publishers. New York.

L'HOSPITAL, G. F. MARQUÉS DE (1998) *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas.* UNAM, Ciudad de México.

LACROIX, S.F. (1807) *Traité Eléméntaire de Calcul Différentiel*, Gauthier Villars, Paris

LAGRANGE, J.L. (1797) *Théorie des fonctions analytiques*, L'Imprimerie de la Republique, Paris.

MEMORIA ANUARIO de la Universidad de la Habana (1864-1939), Universdad de La Habana.

MIQUEL Y MERINO, P. (1914) *Elementos de Álgebra Superior*, 1ª ed. Imprenta Moderna, Habana.

MIQUEL Y MERINO, P. (1939) *Elementos de Álgebra Superior*, 3ª ed. Editorial Cultural, S.A. Habana.

OLNEY, E. (1884) *A University Algebra*, New York.

REY PASTOR, J. Y OTROS (1963) *Análisis Matemático* t. 1, Ed. Kapelusz, séptima edición, Buenos Aires.

RIBNIKOV, K. A. (1987) *Historia de las matemáticas*. Ed. Mir. Moscú.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. (2000) La Matemática en la Universidad de La Habana en un Entorno del 98. En: E. Ausejo & Mª C. Beltrán (eds.), *La Enseñanza de las Ciencias: una perspectiva histórica*. "Cuadernos de Historia de la Ciencia". 11. Zaragoza, Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón, Universidad de Zaragoza, vol. 1, pp. 77-88.

SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C (2001) *Los Bernoulli. Geómetras y Viajeros*. Nivola. Madrid.

SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C. (2004) *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una Historia del Arte y la Ciencia del Cálculo.* Nivola. Madrid.

SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C (2013) Emergencia de una Cultura Matemática en Cuba, *Ciencias Matemáticas*, vol. 27, No. 2.

STRUIK, D.(ed.) (1969) *A Source Book in Mathematics*. Harvard Univ. Press. Cambridge.

VILLALÓN SÁNCHEZ, J.R. (1908-09) Introducción al estudio del Cálculo Infinitesimal, Parte I y II, *Revista de la Facultad de Letras y Ciencias* vol. 7 no.1 y vol.9, no.3, Univ. de la Habana.