Ciencias Matemáticas, Vol. 30, No. 2, Pag. 43-53, 2016
Recibido 04-2016

Generalizaciones de la integral definida hasta la integral de Riemann
Generalizations of the definite integral until the Riemann integral

Otilio B. Mederos Anoceto[1], Rita A. Roldán Inguanzo[2]*

Resumen En este trabajo se define el concepto de generalización de un funcional y se plantean ocho tareas didácticas para llevar a cabo el proceso de generalización correspondiente. Se ejemplifican estas tareas en el proceso de generalización del funcional integral definida sobre la clase de funciones escalonadas definidas sobre un intervalo cerrado, a la clase de las funciones regladas.

Abstract In this work is defined the concept of generalization of a functional and raised eight learning tasks to carry out the process of generalization corresponding. It exemplify these tasks in the process of generalization of the integral functional defined on the class of step functions defined over a closed interval, to the class of the functions weakly regular.

Palabras Clave
Generalización — Integral definida — Integral de Riemann

[1] *Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, México, omederosa@gmail.com*
[2] *Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba, rroldan@matcom.uh.cu*
***Autor para Correspondencia**

Introduction

En este artículo consideramos que un concepto es un modelo mental generalizado de determinados rasgos o propiedades de objetos, o relaciones entre objetos, agrupados en una clase; así como de los objetos con esas características agrupados en otra clase. Se denominan propiedades esenciales de un concepto a características de los objetos modelados en el mismo, cada una de las cuales es necesaria y todas en conjunto suficientes para distinguir los objetos que corresponden al concepto de los demás.

Un conjunto de propiedades esenciales de los objetos conocidos del concepto, que sea suficiente para distinguir los nuevos objetos del concepto, constituye su *contenido*. El contenido es un factor indispensable de todo concepto, por lo que no puede existir un concepto carente de contenido, en el que consecuentemente no se conciba propiedad alguna.

La extensión de un concepto es la clase (conjunto) de los objetos que dicho concepto abarca. La extensión es una característica lógica del concepto tan indispensable como su contenido. Consideramos que un objeto de cualquier concepto subordinado al concepto de función real de variable real es una colección, que puede ser unitaria, de representaciones equivalentes de una función que satisfacen las propiedades del contenido del concepto subordinado.

En este trabajo se indican los conceptos por un par (E,C), donde por E y C se denotan la extensión y el contenido respectivamente, del concepto de que se trate, o simplemente por E cuando no haya dudas de cuál es el contenido. Pueden encontrarse diferentes colecciones C de propiedades que sólo cumplen los elementos (objetos) de E, por lo que es usual indicar el contenido por la colección de propiedades $\{p_i\}_{i\in I}$ que se haya escogido, donde I es un conjunto de índices.

Tanto en la matemática disciplinar como en la escolar se pasa frecuentemente de un concepto con una extensión determinada a otro con una extensión diferente, mediante las operaciones lógicas llamadas definición, generalización, restricción y clasificación. Estas cuatro operaciones conceptuales tienen el doble carácter de proceso y resultado. La palabra generalización aparece con diferentes acepciones en la literatura psicopedagógica; entre ellas las siguientes:

La generalización como subproceso del proceso complejo de formación conceptual

Vygotski, (([17]), desde finales de la década del veinte del siglo pasado hasta su muerte en 1938, trabajó en la determinación de un enfoque de la estructura, las funciones y el proceso formativo de la generalización, en particular de los procesos de generalización que intervienen en la formación de conceptos.

En Mederos, Roldán y otros, ([12], p.74-78), se considera que el proceso de formación conceptual por la vía inductiva lo integran los subprocesos de comparación, análisis, abstracción, síntesis y generalización. Los cuatro primeros subprocesos permiten agrupar en una clase los rasgos esenciales particulares. El subproceso de generalización consiste en agrupar en otra clase a todos los objetos que cumplan los rasgos esenciales. Obsérvese que esta clase incluye no sólo a los objetos particulares analizados que cumplan los rasgos esenciales; sino también a todo nuevo objeto que los cumpla.

Para Kondakov la generalización en la formación conceptual consta de dos subprocesos. El primero consiste en la determinación de una clase de atributos que cumplen los objetos de cierta clase. El segundo es la ampliación de la clase de objetos que cumplen los atributos.

> "Generalización es un desgaje mental de ciertos atributos comunes pertenecientes a toda una clase de objetos y el acto de formular una deducción extensiva a cada objeto suelto de la clase dada." ([9], p. 457.)

Strogóvich considera que la generalización es el proceso mental que va desde la determinación de indicios particulares de los objetos, hasta el encuentro de indicios que pertenecen a grupos de objetos, sin aclarar las características de estos grupos.

> "Generalizar es efectuar el tránsito mental desde los indicios aislados y singulares de los objetos hasta los indicios pertenecientes a grupos enteros de dichos objetos", ([14], p. 82.)

La generalización como sinónimo de concepto

En la literatura psicopedagógica es frecuente encontrar la utilización de la palabra generalización como equivalente al proceso de formación conceptual, y no como uno de sus subprocesos. En esta dirección Davýdov señala lo siguiente:

> "En la literatura psicológico-didáctica y metodológica es muy frecuente que los procesos de generalización se caractericen como la vía principal formativa de conceptos ... El término *generalización* se emplea a menudo como sinónimo de *concepto*."([5], p.14.)

Del planteamiento de Smirnov, que aparece a continuación, podemos observar la coincidencia entre generalización y formación del concepto.

> "Al generalizar, revelamos lo común en los objetos y fenómenos de la realidad individualizados". "Destacando lo común, el hombre lo designa con la palabra, vinculándolo en los objetos y fenómenos dotados de ese indicio común. El término árbol está relacionado con todos los árboles, cualesquiera que sean las familias a que pertenezcan, y las peculiaridades distintivas de cada una de ellas, ya que todos ellos poseen ciertos rasgos comunes... La palabra es una señal de muchos objetos distintos pero que tiene entre sí algo común." ([13], p. 242-43).

Para Clauss la generalización es el proceso cuyo resultado es el concepto.

> "Generalizar es el método con ayuda del cual agrupamos en clases los objetos sueltos, sobre la base de propiedades iguales inherentes a los mismos. Resultado de ese agrupamiento es el concepto". ([4], p. 59.)

La generalización de conceptos ya formados

Existen diferentes vías para generalizar conceptos ya formados, según Davýdov:

> "En el proceso ... de tránsito de una extensión menor a otra mayor, se substrae del concepto específico dado un cierto número de rasgos y se forma el concepto genérico, en virtud de lo cual resulta más pobre el contenido que el específico." ([5], p. 51).

El proceso de ampliación de la extensión del concepto de partida mediante la eliminación de propiedades de su contenido, hasta formar un concepto con una extensión más amplia y un contenido más reducido recibe el nombre de operación de generalización por algunos autores como Chelpanov, ([3], p. 17), Asmus, ([1]), p.60), Gorski, ([8], p. 68).

La generalización en la matemática escolar y disciplinar

Dado un concepto ya formado (E_1, C_1) que se ha definido a partir del concepto (E, C), en Mederos y Roldán ([10], p. 28) se define el concepto (F_1, D_1) de generalización de (E_1, C_1) subordinada a (E, C) mediante eliminación de propiedades del contenido C_1; y se proponen tereas didácticas para que los estudiantes participen en el aprendizaje de este tipo de generalización. En este trabajo se proponen dos conjuntos de tareas didácticas necesarias, a juicio de los autores, para que los estudiantes participen en el aprendizaje de los conceptos de caracterización y generalización conceptual, respectivamente.

En Mederos y Roldán ([11]) se define y aplica el concepto de criterio de generalización de un concepto eliminando propiedades de su contenido, y se obtienen 16 generalizaciones del concepto de métrica.

El capítulo VI del libro escrito por Mederos, Roldán y otros ([12]) se construyen veintitrés generalizaciones del concepto de derivada puntual de una función f, subordinadas al concepto de función real de una variable real; tomando como criterio de generalización el debilitamiento sucesivo de las exigencias sobre la existencia del límite de la función definida por $F_c(h) = [(f(c+h) - f(c)]/h$, $h \neq 0$, cuando h tiende a cero, o de las características topológicas de c con respecto al dominio de f.

En este trabajo nos ocupamos de estudiar las características de las generalizaciones de un *funcional* muy importante en el Análisis Matemático, la integral definida. Para ello definimos la integral definida sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones escalonadas y estudiamos sus propiedades fundamentales en la sección 3. El resto de las secciones se dedican a analizar tres vías de generalización que conducen a la integral de Cauchy-Riemann. La presentación de los resultados se organiza de manera tal que facilite el diseño de herramientas para el aprendizaje significativo activo y mediado, y se construye dando solución a un conjunto de tareas didácticas que se presentan en la sección 3.

1. Definiciones y resultados auxiliares

Definición 1. Se denomina operador lineal a toda aplicación lineal f de un espacio vectorial V_1 en un espacio vectorial V_2. Cuando V_2 es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los números reales la función f se denomina funcional.

El concepto de retículo juega un papel importante para el desarrollo y comprensión de las generalizaciones que se realizan en este artículo.

Definición 2. Sea R un conjunto no vacío, sobre el cual se definen dos operaciones internas $\vee$ y $\wedge$ por

$$\vee : R \times R \to R, (a,b) \mapsto a \vee b \text{ y } \wedge : R \times R \to R, (a,b) \mapsto a \wedge b.$$

Se dice que la terna $(R,\vee,\wedge)$ es un retículo si se cumplen los axiomas siguientes:

r_1) Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son conmutativas.

r_2) Para todo a de R se cumple que $a \vee a = a$ y $a \wedge a = a$.

r_3) Para cualesquiera a y b de R se cumplen las leyes de absorción $a \vee (a \wedge b) = a$ y $a \wedge (a \vee b) = a$.

En todo retículo $(R,\vee,\wedge)$ se define una relación de orden parcial $\leq$ por $a \leq b$ si y sólo si $a \vee b = b$. La colección $\mathscr{F}(A,R)$ de todas las funciones reales definidas sobre un subconjunto A de R es un retículo con las operaciones $\vee$ y $\wedge$ definidas por

$$(f \vee g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} \text{ y } (f \wedge g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}.$$

A continuación se presentan definiciones y relaciones entre elementos de este tipo de retículos.

r_4) A toda función f de $\mathscr{F}(A,R)$ se asocian las funciones no negativas f^+ y f^- elementos de $\mathscr{F}(A,R)$ definidas por las igualdades $f^+ = f \vee 0$ y $f^- = (-f) \vee 0$. Esas funciones se conocen respectivamente como parte positiva y parte negativa de f.

r_5) Las funciones f, $|f|$, f^+ y f^- están relacionadas por las igualdades $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, así como $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$, $f^- = \frac{|f|-f}{2}$.

r_6) Se cumplen las relaciones $f \vee g = -[(-f) \wedge (-g)]$ y $f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)]$.

r_7) Es cierta la relación $f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f+g|}{2}$ y la relación $f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f+g|}{2}$.

De estas propiedades y relaciones se deduce la proposición siguiente:

Proposición 1. Un espacio vectorial de funciones es un retículo si y sólo si es cerrado con cualesquiera de las dos operaciones binarias $f \vee g$, $f \wedge g$ y las tres operaciones unarias $|f|$, f^+ y f^-.

Definición 3. Una función real f definida sobre un intervalo real finito I se llama débilmente regular si para cada x de su dominio existen sus límites laterales.

La extensión $R(I)$ del concepto de función débilmente regular es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar que hereda del conjuntoR. Si se considera, además, la multiplicación heredada de la multiplicación de R es un álgebra conmutativa unitaria. Las funciones débilmente regulares también reciben el nombre de funciones regladas Viloria y Cárdenas (Ver (15), p.49).

Sea F el subconjunto de I en cuyos elementos f tiene discontinuidad de salto finito. De la definición 3 se deduce que f sólo puede tener discontinuidades de salto finito o evitables, por lo que $R(I) = [C(I \setminus F) \cap \Delta_{sf}(F)] \cup C(I)$, donde por $C(I)$, $C(I \setminus F)$ y $\Delta_{sf}(F)$ se indican las extensiones de los conceptos de función real continua sobre I, continua sobre $I \setminus F$ y discontinua de salto finito o evitable sobre F, respectivamente. En la figura 1 se muestran los mapas gráficos y simbólicos de estas extensiones.

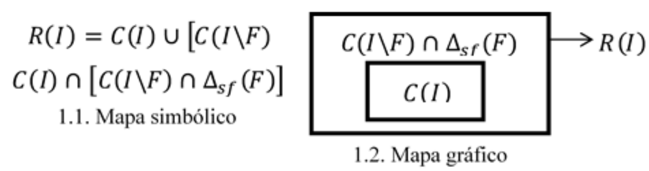

Figura 1. Mapas de extensiones

2. Sobre el aprendizaje significativo

Para que un estudiante integre el conocimiento nuevo que se le presenta a los conocimientos que tiene en sus estructuras mentales, debe establecer conexiones entre estos dos tipos de conocimientos. Surge entonces la pregunta:

> ¿Qué se requiere para que el estudiante establezca las conexiones?

Para establecer las conexiones se requiere actividad mental y para que se produzca la actividad mental en el estudiante, debe:

- Hacer algo con el conocimiento nuevo, debe manipularlo y construir conocimiento.
- Establecer interacción entre lo que ya conoce y las interpretaciones de los otros, (profesores, compañeros, etc.).

Ante una situación de aprendizaje nuevo, cada estudiante relaciona alguna idea que surge de sus estructuras mentales con la situación de aprendizaje del conocimiento nuevo. Entonces el estudiante trata de establecer conexiones, comparando sus teorías con sus observaciones basadas en el conocimiento nuevo. Si las observaciones del estudiante respecto a la situación de aprendizaje, no pueden ser explicadas por el propio estudiante, entonces sus modelos internos son rechazados, modificados, reemplazados, ampliados o sólo temporalmente aceptados. Cuando esto ocurre se dice que se ha producido aprendizaje activo.

Al aceptar que se produce actividad mental en el estudiante cuando establece interacciones entre lo que ya conoce y las interpretaciones de los otros, se está aceptando que el aprendizaje es un proceso socialmente mediado.

Si las interacciones entre lo que ya conoce el estudiante y las interpretaciones de otros se materializan mediante observaciones de los otros, respecto a la situación de aprendizaje; y si estas observaciones no pueden ser explicadas por el propio estudiante, entonces su modelos internos también son rechazados, modificado, etc. El proceso de modificaciones de los modelos mentales para llegar a una comprensión de la situación de aprendizaje y una nueva comprensión de lo que antes sabía, es lo que se llama aprendizaje significativo.

Para Ausubel lo más importante de todo este proceso es la determinación de lo que el estudiante conoce.

> "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente." Ausubel y otros (ver [2], p.1)

Para diseñar actividades de aprendizaje activo y mediado significativos es necesario construir una organización significativa del conocimiento que queremos que se aprenda. El propósito de este trabajo es presentar una construcción significativa del conocimiento relativa a tres vías de generalización a la integral de Cauchy-Riemann como funcional y como resultado de manera tal que facilite;

- El diseño de herramientas de aprendizaje activo y mediado significativas para la adquisición de conocimientos relativos a tres vías de generalización que conducen a la integral de Cauchy-Riemann.
- La construcción de una organización significativa de la generalización de la integral de Cauchy-Riemann a la integral de Lebesgue.

3. Tareas didácticas que facilitan la generalización de funcionales

Comenzamos esta sección definiendo el concepto de generalización de un funcional y posteriormente se plantean ocho tareas didácticas relativas a la generalización de un funcional.

Definición 4. Dado un funcional $g : V \to \mathbb{R}$ se llama generalización de g a todo funcional $h : V_1 \to \mathbb{R}$ que cumpla las propiedades:

p_1: $V \subset V_1$

p_2: Para todo $x \in V$ se cumple que $h(x) = g(x)$.

El proceso de construcción de h se denomina proceso de generalización y la operación que asocia h a g recibe el nombre de generalización. En la matemática escolar se pueden presentar distintos tipos de tareas didácticas relativas a la generalización de funcionales, entre ellas las siguientes:

1. Utilizar estructuras de V para organizar sus elementos.
2. Establecer relaciones entre elementos de V_1 y colecciones de V.
3. Construir funcionales y operadores relacionados con g cuya composición sea un funcional $h : V_1 \to \mathbb{R}$, donde $V \subset V_1$.
4. Probar que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in V$.
5. Determinar subclases infinitas de V_1.
6. Determinar caracterizaciones del concepto cuya extensión es V.
7. Construir otras generalizaciones de g.
8. Dadas dos generalizacionesh_1 y h_2 de g determinar;
   - 8.1. Si una es generalización de la otra.
   - 8.2. Si $h_1 = h_2$.

El resto de las secciones se ejemplifica como dar cumplimiento a las tareas anteriores.

4. Retículos de las particiones de un intervalo cerrado

Definición 5. Se denomina partición de $[a,b]$ a toda sucesión finita y estrictamente creciente $\{x_i\}_{i=0}^n$ de elementos de $[a,b]$ tal que $x_0 = a$ y $x_n = b$; es decir, que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Sean $J = [a,b]$ y $\Pi(J)$ la extensión del concepto de partición de $[a,b]$. A cada elemento $q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $\Pi(J)$ se asocia un número positivo $\lambda(q)$, que denominamos norma de q y que está definido por la igualdad $\lambda(q) = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Para $p, q \in \Pi(J)$ se definen las operaciones $\wedge$ y $\vee$ por $p \wedge q = p \cap q$ y $p \vee q = p \cup q$. Resulta sencillo comprobar que la terna $(\Pi(J), \vee, \wedge)$ es un retículo. Si se considera el conjunto

$$\Pi_1(J) = \left\{ q_n = \{x_i\}_{i=0}^n \in \Pi(J) : \ \Delta x_i = \frac{b-a}{n},\ i = \overline{1,n} \right\},$$

las operaciones $\vee$ y $\wedge$ anteriormente definidas se expresan, a partir del orden dado por la inclusión de conjuntos, mediante las igualdades

$$\begin{aligned} q_k \wedge q_m &= \min\{q_n \in \Pi_1(J) : \ q_k \subseteq q_n y q_m \subseteq q_n\}, \\ q_k \vee q_m &= \max\{q_n \in \Pi_1(J) : \ q_k \supseteq q_n y q_m \supseteq q_n\}. \end{aligned}$$

Para la norma de las particiones de este conjunto se cumple que $\lambda(q_n) = \frac{b-a}{n}$. Nótese que, a causa de la simetría de los elementos de $\Pi_1(J)$, se tiene que $q_k \subseteq q_m$ si y sólo si m es múltiplo de k. De ello se deduce que $q_k \vee q_m$ es la menor de las particiones $q_n \in \Pi_1(J)$ tal que n es múltiplo de k y de m, mientras que $q_k \wedge q_m$ es la mayor de las particiones simétricas $q_n \in \Pi_1(J)$ tal que k y m son múltiplos de n; por lo tanto se tiene que

$$q_k \wedge q_m = q_{mcm\{k,m\}} \quad \text{y} \quad q_k \vee q_m = q_{mcd\{k,m\}}.$$

Es obvio que también la terna $(\Pi_1(J), \vee, \wedge)$ constituye un retículo. En la figura 2 se presenta un diagrama con las ocho primeras particiones del retículo $(\Pi_1(J), \vee, \wedge)$ y sus relaciones de inclusión estricta, las cuales son representadas por flechas. En este diagrama se observa que se cumple

$$q_4 \vee q_6 = q_{mcd\{4,6\}} = q_2 \text{ y } q_2 \wedge q_3 = q_{mcm\{2,3\}} = q_6.$$

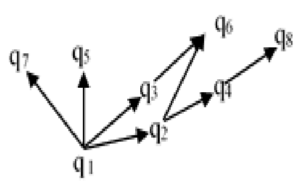

Figura 2. Las particiones q_i, $i = \overline{1:8}$, y sus relaciones de inclusión

Con esta sección se da cumplimiento parcial a la tarea didáctica 1. Para la integración de conocimientos juega un papel esencial la relación entre los retículos de las particiones y de las funciones escalonadas. En la sección 5 dedicamos especial atención al retículo de las funciones escalonadas y su relación con los retículos de las particiones, y de esta forma se completa el cumplimiento de la tarea 1.

5. Retículos de funciones escalonadas

Definición 6. Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se denomina función característica o indicadora de A a la función real χ_A definida sobre $\mathbb{R}$ por la igualdad

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}.$$

Definición 7. Se dice que una función real $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ es escalonada si existe una partición $\{x_i\}_{i=0}^n$ de $[a,b]$ tal que s:

- Tiene una discontinuidad de salto finito o evitable en cada valor de x_i, $i = 1:n$.
- Toma en cada sub-intervalo (x_i, x_{i+1}) un valor constante s_i.

La extensión del concepto de función escalonada real sobre el intervalo $J = [a,b]$, se denota en este trabajo por $E(J)$. Según la definición 7 a cada función escalonada s corresponde una y sólo una partición $\{x_i\}_{i=0}^n$, que se llama en este trabajo partición asociada a s y se denota por q_s. Las funciones características permiten representar a los elementos s de $E(J)$ en la forma

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i \chi_{I_i}(x), \quad I_0 = [x_0, x_1] \text{ e } I_i = (x_{i-1}, x_i],\ i = 1:n.$$

Sobre el conjunto $E(J)$ se define de manera natural la adición $(+)$ y la multiplicación $(\times)$ de funciones escalonadas; así como el producto $(\cdot)$ de un escalar real y una función escalonada. Se prueba sin dificultad que $(E(J), +)$ es un grupo conmutativo, $(E(J), +, \times)$ es un álgebra conmutativa unitaria y $(E(J), +, \cdot)$ es un espacio vectorial real.

Atención especial merecen las operaciones binarias, máximo y mínimo; ya que hacen de $E(J)$ un retículo. Sean s y t dos elementos cualesquiera de $E(J)$ y sean p_s y p_t las particiones asociadas a s y t respectivamente. Entonces su máximo y su mínimo definidos, de manera natural como funciones real sobre $[a,b]$, por

$$(s \vee t)(x) = \text{máx}\{s(x), t(x)\} \text{ y } (s \wedge t)(x) = \text{mín}\{s(x), t(x)\},$$

son funciones escalonadas que tienen a $p_s \cup p_t$ como partición asociada. Resulta sencillo comprobar que $(E(J), \vee, \wedge)$ es un retículo. El conjunto $E(J)$ se utiliza como el dominio del operador g que se generaliza en este trabajo.

Pasamos a establecer una relación entre los retículos de las ternas $(\Pi(J), \vee, \wedge)$ y $(E(J), \vee, \wedge)$ que permite integrarlos en una sola estructura. Considerando que $S(N_n)$ es la extensión del concepto de sucesión real definidas sobre el conjunto $N_n = 0, 1, \ldots, n$, se tiene $S : \Pi(J) \to E(J)$, que es un operador multiforme definido para toda partición $q \in \Pi(J)$, $q = \{x_i\}_{i=0}^n$, por

$$S(q) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} s_i \chi_{I_i}(x) \right\}_{\{s_i\}_{i=0}^n \in S(N_n)}.$$

Este operador es compatible con las operaciones de los dos retículos ya que se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} S(p \cup q) &= S(p) \vee S(q) = \{s_p \vee s_q\}_{(s_p, s_q) \in S(p) \times S(q)} \\ S(p \cap q) &= S(p) \wedge S(q) = \{s_p \wedge s_q\}_{(s_p, s_q) \in S(p) \times S(q)}. \end{aligned}$$

Proposición 2. Una función real f definida sobre un intervalo real cerrado $J = [a,b]$, es reglada, si y sólo si es el límite de una sucesión de funciones escalonadas $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ que converge uniformemente a f sobre J.

El enunciado y la demostración de una proposición más general que la proposición 2 puede verse en Dieudonné, (ver [6], p.143-144).

6. Las funciones acotadas y su relación con retículos de funciones escalonadas de Darboux

En esta sección se da cumplimiento a una tarea del tipo 2. Para ello consideremos que $B(J)$ es la extensión del concepto de función real acotada definida sobre $[a,b]$. Se consideran, para cada $f \in B(J)$, las colecciones $\{S_{q,f}\}_{q\in\Pi(J)}$ y $\{s_{q,f}\}_{q\in\Pi(J)}$ definidas por

$$S_{q,f}(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sup_{I_i} f(x)\right)\chi_{I_i}(x), \tag{1}$$

$$s_{q,f}(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(\inf_{I_i} f(x)\right)\chi_{I_i}(x). \tag{2}$$

donde $q = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $I_0 = [x_0, x_1]$ y $I_i = (x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1:n}$. Estas funciones se denominan funciones escalonadas de Darboux y satisfacen las propiedades siguientes:

1. Para todo q de $\Pi(J)$ se tiene que $s_{q,f} \le f \le S_{q,f}$.
2. Si q_1 y q_2 son elementos cualesquiera de $\Pi(J)$ tales que $q_1 \subset q_2$; entonces
   - 2.1. $s_{q_1,f} \le s_{q_2,f}$
   - 2.2. $S_{q_2,f} \le S_{q_1,f}$
3. Si q_1 y q_2 son elementos cualesquiera de $\Pi(J)$, entonces $s_{q_1,f} \le f \le S_{q_2,f}$

Se tienen los operadores

$$S : B(J) \to S(J) \qquad \text{y} \qquad s : B(J) \to s(J), \tag{3}$$

donde

$$S(J) = \{\{S_{q,f}\}_{q\in\Pi(J)} : f \in B(J)\}$$
$$s(J) = \{\{s_{q,f}\}_{q\in\Pi(J)} : f \in B(J)\},$$

definidos por las aplicaciones

$$f \mapsto S(f) = \left\{S_{q,f}\right\}_{q\in\Pi(J)} \text{ y } f \mapsto s(f) = \left\{s_{q,f}\right\}_{q\in\Pi(J)}$$

respectivamente.

Las relaciones que se construyen a continuación tienen un objetivo didáctico, ya que facilitan la construcción por parte de los profesores de herramientas para que los estudiantes puedan formarse una estructura mental significativa, de las particiones de $\Pi_1(J)$ y de las sumas inferiores y superiores de $E_1(J)$ que corresponden a cada elemento f de $B(J)$. A todo f de $B(J)$ están asociadas las colecciones

$$\left\{S_{q_n,f}\right\}_{q_n\in\Pi_1(J)} \quad \text{y} \quad \left\{s_{q_n,f}\right\}_{q_n\in\Pi_1(J)}, \quad q_n = \{x_i\}_{i=0}^{n},$$

definidas por las expresiones (1) y (2).

Se tienen los operadores multiformes

$$S_1 : B(J) \to E_1(J) \text{ y } s_1 : B(J) \to E_1(J)$$

definidos por las aplicaciones

$$f \mapsto S_1(f) = \left\{S_{q_n,f}\right\}_{q_n\in\Pi_1(J)} \text{ y}$$

$$f \mapsto s_1(f) = \left\{s_{q_n,f}\right\}_{q_n\in\Pi_1(J)},$$

respectivamente. El conjunto $s_1(f)$ con las operaciones $\vee$ y $\wedge$ que hereda de $E(J)$ y que satisfacen las igualdades

$$s_{q_m,f} \vee s_{q_n,f} = s_{q_{mcd\{m,n\}},f} \quad \text{y} \quad s_{q_m,f} \wedge s_{q_n,f} = s_{q_{mcm\{m,n\}},f}$$

es un retículo.

La restricción $s_{1,f}$ del operador $s : \Pi(J) \to E(J)$ al retículo $(\Pi_1(J), \vee, \wedge)$ definido por $s_{1,f}(q_n) = s_{q_n,f}$ toma valores en el retículo $(s_1(f), \vee, \wedge)$ y cumple las igualdades

$$s_{1,f}(q_m \vee q_n) = s_{1,f}(q_{mcd\{m,n\}}) = s_{q_{mcd\{m,n\}},f} = s_{q_m,f} \vee s_{q_n,f},$$
$$s_{1,f}(q_m \wedge q_n) = s_{1,f}(q_{mcm\{m,n\}}) = s_{q_{mcm\{m,n\}},f} = s_{q_m,f} \wedge s_{q_n,f}.$$

En la figura 3 se muestran los ocho primeros elementos de $\Pi_1(J)$, sus relaciones de inclusión y sus imágenes $s_{1,f}(q_i)$, $i = \overline{1:8}$ por el operador $s_{1,f}$, que se indican por s_i para facilitar la construcción del diagrama correspondiente, con sus relaciones de inclusión.

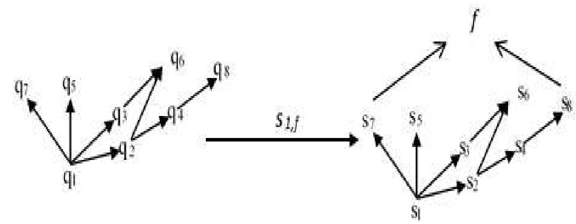

Figura 3. Representación de las q_i, $i = \overline{1:8}$, sus relaciones de inclusión y sus imágenes por $s_{1,f}$

De manera análoga se tiene que el conjunto $S_1(f)$ es un retículo con las operaciones $\vee$ y $\wedge$ que hereda de $E(J)$ y que satisfacen las igualdades

$$S_{q_m,f} \vee S_{q_n,f} = S_{q_{mcd\{m,n\}},f} \quad \text{y} \quad S_{q_m,f} \wedge S_{q_n,f} = S_{q_{mcm\{m,n\}},f}.$$

La restricción $S_{1,f}$ del operador $S : \Pi(J) \to E(J)$ al retículo $(\Pi_1(J), \vee, \wedge)$ definido por $S_{1,f}(q_n) = S_{q_n,f}$ toma valores en el retículo $(S_1(f), \vee, \wedge)$ y satisface las igualdades

$$S_{1,f}(q_n \vee q_m) = S_{1,f}(q_{mcd\{m,n\}}) = S_{q_{mcd\{m,n\}},f} = S_{q_n,f} \vee S_{q_m,f},$$
$$S_{1,f}(q_n \wedge q_m) = S_{1,f}(q_{mcm\{m,n\}}) = S_{q_{mcm\{m,n\}},f} = S_{q_m,f} \wedge S_{q_n,f}.$$

Por lo tanto, la terna $(S_1(f), \vee, \wedge)$ es un retículo con las operaciones $\vee$ y $\wedge$ heredadas de $E(J)$. En la figura 4 se muestran los ocho primeros elementos de $\Pi_1(J)$ con sus relaciones de inclusión y sus imágenes por el operador $S_{1,f}$, que se indican por S_i, con sus relaciones de inclusión.

7. La integral definida de las funciones escalonadas

En esta sección se define el funcional que va a ser objeto de generalización y se enuncian algunas de sus propiedades.

Definición 8. Dada una función escalonada cualquiera s de $E(J)$ con representación

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i \chi_{I_i}(x),\ I_0 = [x_0, x_1],\ I_i = (x_{i-1}, x_i],\ i = 1:n$$

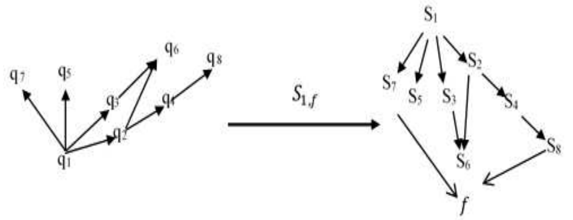

Figura 4. Representación de las q_i, $i = \overline{1:8}$, sus relaciones de inclusión y sus imágenes por $S_{1,f}$

y partición asociada $p_s = \{x_i\}_{i=0}^n$, se llama integral definida de s desde a hasta b, y se denota por $\int_a^b s(x)dx$, al número $\sum_{i=1}^n s_i(x_i - x_{i-1})$. Por lo tanto,

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{i=1}^n s_i(x_i - x_{i-1}).$$

La función de $E(J)$ en $\mathbb{R}$, que a cada s de $E(J)$ le asocia su integral definida desde a hasta b se denomina funcional integral desde a hasta b y se denota por $\int_a^b$. En consecuencia

$$\int_a^b : (E(J) \to \mathbb{R}, \qquad s \mapsto \int_a^b s(x)dx.$$

El intervalo $[a,b]$ se denomina intervalo de integración. De la unicidad de las sucesiones $\{x_i\}_{i=0}^n$ y $\{s_i\}_{i=1}^n$ se tiene que este funcional está bien definido. A continuación se enuncian siete propiedades del funcional $\int_a^b$.

Propiedad 1. $\int_a^b$ es una transformación lineal del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $(E(J),+,\cdot)$ en el espacio vectorial $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

Propiedad 2. $\int_a^b$ es estrictamente creciente de $(E(J),<)$ en $(\mathbb{R},<)$.

Sea A el conjunto

$$\left\{a_i \in \mathbb{R} : \ a_i = \int_a^b s_i(x)dx, \ s_i(x) = s_{1,f}(q_i), \ q_i \in \Pi_1(J)\right\}.$$

Este conjunto con las operaciones internas $\vee$, $\wedge$ definidas por $a_m \vee a_n = a_{mcd\{m,n\}}$ y $a_m \wedge a_n = a_{mcm\{m,n\}}$ es un retículo.

Propiedad 3. $\int_a^b$ es un operador de $(E(J),\vee,\wedge)$ sobre $(A,\vee,\wedge)$ que respeta las operaciones $\vee$ y $\wedge$.

Los números a_i, $i \in \mathbb{N}$, corresponden a las áreas de la regiones limitadas por $[a,b]$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la representación gráfica de los s_i. En la figura 5 se presentan los ocho primeros elementos de $E_1(J)$ con sus relaciones de desigualdad y sus imágenes a_i con sus relaciones de desigualdad por el operador $\int_a^b$.

Sea

$$B = \left\{ A_i = \int_a^b S_i(x)dx : \ S_i(x) = S_{1,f}(q_i), \ q_i \in \Pi_1(J))\right\}$$

con las operaciones internas $\vee$, $\wedge$ definidas por

$$A_m \vee A_n = A_{mcd\{m,n\}} \quad \text{y} \quad A_m \wedge A_n = A_{mcm\{m,n\}}$$

que hacen de $(B,\vee,\wedge)$ un retículo.

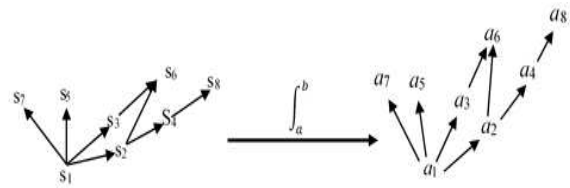

Figura 5. Representación de las s_i, $i = \overline{1:8}$, sus relaciones de inclusión y sus imágenes por $\int_a^b$

Propiedad 4. $\int_a^b$ es un operador de $(E_1(J),\vee,\wedge)$ sobre $(B,\vee,\wedge)$ que respeta las operaciones $\vee$ y $\wedge$.

Los números A_i, $i \in \mathbb{N}$, corresponden a las áreas de la regiones limitadas por $[a,b]$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la representación gráfica de S_i. En la figura 6 se presentan los ocho primeros elementos de $E_1(J)$ con sus relaciones de inclusión y sus imágenes A_i con sus relaciones de desigualdad por el operador $\int_a^b$.

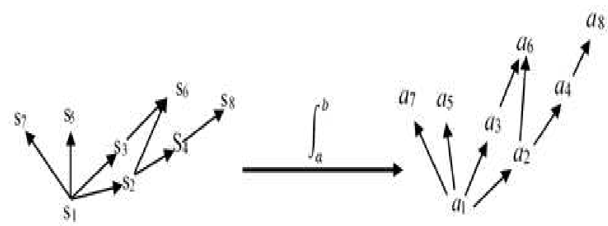

Figura 6. Representación de las S_i, $i = \overline{1:8}$, sus relaciones de inclusión y sus imágenes por $\int_a^b$

Propiedad 5. $\int_a^b$ es invariante por traslaciones, lo que significa que para todo número real c se cumple la igualdad $\int_a^b s(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)dx$.

Propiedad 6. Si el intervalo de integración $[a,b]$ se multiplica por un factor μ (se contrae cuando $\mu < 1$ y se dilata cuando $\mu > 1$), entonces el valor de la integral se reduce (aumenta) mediante el factor μ, es decir,

$$\int_{\mu a}^{\mu b} s\left(\frac{y}{\mu}\right) dy = \mu \int_a^b s(x)dx.$$

Propiedad 7. $\int_a^b$ es aditivo con respecto al intervalo de integración; es decir, si se presenta la relación $a < c < b$, entonces $\int_a^b s(x)dx = \int_a^c s(x)dx + \int_c^b s(x)dx$.

Para toda función f de $B(J)$ los elementos de las colecciones $\left\{\int_a^b S_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)}$ y $\left\{\int_a^b s_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)}$ se denominan integrales definidas de sumas inferiores y superiores de Darboux asociadas a f, respectivamente.

Así resultan los operadores

$$I : S(J) \to \mathscr{I}(J) \qquad \text{e} \qquad i : S(J) \to i(J),$$

donde

$$\mathscr{I}(J) = \left\{\left\{\int_a^b S_{q,f}\right\} : f \in B(J)\right\} \text{ e}$$

$$i(J) = \left\{\left\{\int_a^b s_{q,f}\right\} : f \in B(J)\right\},$$

definidos por

$$\{S_{q,f}\} \mapsto \left\{\int_a^b S_{q,f}\right\} \text{ y } \{s_{q,f}\} \mapsto \left\{\int_a^b s_{q,f}\right\}.$$

Se demuestran sin dificultad los dos corolarios de la proposición 2 que se enuncian a continuación.

Corolario 1. La sucesión $\left\{\int_a^b e_n(x)dx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Corolario 2. Si $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de funciones escalonadas que convergen uniformemente a f, entonces $\{r_n - s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función 0 y, por tanto, convergen a un mismo valor las sucesiones

$$\left\{\int_a^b r_n(x)dx\right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \left\{\int_a^b s_n(x)dx\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

8. Generalizaciones de la integral definida a una colección de funciones acotadas

Cauchy definió el concepto de integral definida para los elementos de $C(J)$, $J=[a,b]$. Posteriormente extendió este concepto a la colección $C(J\setminus F)\cap\Delta_{sf}(F)$.

Según Dieudonné [6], Cauchy definió la integral para las funciones débilmente regulares o regladas a partir de considerar a tales funciones como límite de sucesiones de funciones escalonadas. Tal forma de definir la integral tiene la ventaja desde el punto de vista didáctico de que el estudiante puede visualizar mejor el proceso de reducción del problema a casos muy simples para luego retornar el caso general a través del límite.

8.1 La integral definida utilizando integrales inferiores y superiores

En este epígrafe generalizamos el concepto de integral definida a una sub-clase de la extensión del concepto de función acotada, utilizando sumas inferiores y superiores de Darboux, con lo cual damos cumplimiento a una tarea del tipo 3.

La propiedad 3 de las funciones escalonadas de Darboux que se enuncia en la sección 5, nos permite asegurar todo elemento de la colección y $\left\{\int_a^b s_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)}$ es una cota inferior de colección $\left\{\int_a^b S_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)}$ y que todo elemento de esta colección es una cota superior de la primera colección.

Definición 9. Se denomina integral definida inferior (superior) de f y se denota por $\underline{I}(f)(\overline{I}(f))$ al extremo superior (inferior) de $\left\{\int_a^b s_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)}$ $\left(\left\{\int_a^b S_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)}\right)$. Por lo tanto, $\underline{I}(f)=\sup\limits_{q\in\Pi(J)}\int_a^b s_{q,f}(x)dx$ e $\overline{I}(f)=\operatorname{ínf}\limits_{q\in\Pi(J)}\int_a^b S_{q,f}(x)dx$.

Consecuentemente, se tienen los operadores

$$\operatorname{ínf}: I(J)\to\mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \sup: i(J)\to\mathbb{R}, \tag{4}$$

definidos por

$$\left\{\int_a^b S_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)} \mapsto \overline{I}(f)=\operatorname{ínf}_{q\in\Pi(J)}\int_a^b S_{q,f}(x)dx$$

$$\left\{\int_a^b s_{q,f}(x)dx\right\}_{q\in\Pi(J)} \mapsto \underline{I}(f)=\sup_{q\in\Pi(J)}\int_a^b s_{q,f}(x)dx$$

Componiendo los operadores (3)−(4) se obtiene el diagrama de la figura 7 que sintetiza los procesos de formación de los funcionales integral superior e integral inferior para todo elemento f de $B(J)$.

Los funcionales $(\operatorname{ínf})\circ I\circ S$ y $(\sup)\circ i\circ s$ se indican por $\overline{I}$ y $\underline{I}$, o por $\int_a^{\overline{b}} dx$ ($\int_{\underline{a}}^b dx$) y se denominan funcional integral definida superior e inferior, respectivamente.

Para cada f de $B(J,R)$ el número $\overline{I}(f)$ ($\underline{I}(f)$) se denomina integral superior (inferior) de f y se denota por $\int_a^{\overline{b}} f(x)dx$ ($\int_{\underline{a}}^b f(x)dx$). Para todo f de $B(J,R)$ se cumple que

$$\underline{I}(f)=(\sup)\circ i\circ s\leq(\operatorname{ínf})\circ I\circ S=\overline{I}(f). \tag{5}$$

Obsérvese que los operadores S, I, s e i son multiformes, y como ínf y sup son uniformes $(\operatorname{ínf})\circ I\circ S$ y $(\sup)\circ i\circ s$ son funcionales.

Pasamos a definir los conceptos de función integrable y de integral de Cauchy-Riemann utilizando las imágenes de los funcionales integral inferior e integral superior.

Definición 10. Se dice que un elemento f de $B(J)$ es integrable Cauchy-Riemann sobre J si y sólo si se cumple que

$$\underline{I}(f)=\overline{I}(f). \tag{6}$$

La extensión del concepto de función integrable Cauchy-Riemann sobre J se indica por $I(J)$. La función de Dirichlet, definida por $f(x)=1$ si $x\in\mathbb{Q}$ y $f(x)=0$ si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, es obviamente una función acotada; pero no es integrable Cauchy-Riemann. Consecuentemente, se cumple que $I(J)\subset B(J)$.

Definición 11. Si $f\in I(J)$, se denomina integral de Cauchy-Riemann de f desde a hasta b a uno cualquiera de los números $\underline{I}(f)$ y $\overline{I}(f)$ y se indica por $\int_a^b f(x)dx$.

De la definición 11 se tiene el funcional $\int_a^b : I(J)\to\mathbb{R}$ definido por $f\mapsto\int_a^b f(x)dx$. Este funcional se denomina también integral de Cauchy-Riemann; por lo tanto; la integral de Cauchy-Riemann tiene el doble carácter de funcional e imagen del funcional. De esta forma se da cumplimiento a una tarea del tipo 3.

Pasamos a dar cumplimiento a una tarea del tipo 4.

Proposición 3. Las funciones escalonadas $s\in E(J)$ cumplen la igualdad (6) y su integral definida satisface la cadena de igualdades

$$\int_a^b s(x)dx=\underline{I}(s)=\overline{I}(s).$$

Demostración. Sea s una función escalonada definida sobre J con representación

$$s(x)=\sum_{i=1}^n s_i\chi_{I_i}(x), \quad I_0=[x_0,x_1] \quad \text{e} \quad I_i=(x_{i-1},x_i],\ i=\overline{1:n}$$

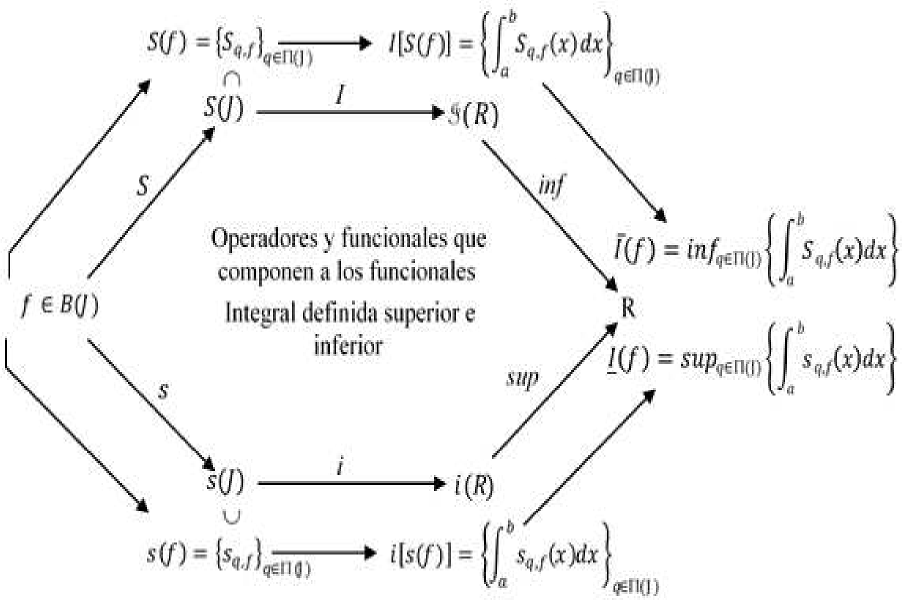

Figura 7. Diagrama del proceso de formación del concepto de la integral definida

y sea $p_s = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ la partición asociada a s. Se tiene que

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - x_{i-1}).$$

Si q es una partición cualquiera de $\Pi(J)$, formamos la nueva partición $p = q \cup p_s$, la cual contiene a q y a p_s. Los subintervalos de esta nueva partición se pueden agrupar en bloques a partir de los subintervalos de la partición p_s, y en cada uno de esos sub-intervalos de p el ínfimo (supremo) de la función escalonada no será menor (mayor) que el ínfimo (supremo) de la función escalonada en el correspondiente sub-intervalo de p_s. Entonces en las sumas de Darboux $s_p(s)$ y $S_p(s)$ se pueden reagrupar los sumandos según la partición p_s y, factorizando los correspondientes m_i y M_i, se obtiene que

$$s_p(s) = s_{p_s}(s) \qquad \text{y} \qquad S_p(s) = S_{p_s}(s).$$

De esta manera todas las sumas de Darboux de una función escalonada se reducen a las sumas de Darboux correspondientes a la partición asociada a la función, y por tanto, obviamente se cumple que

$$\underline{I}(s) = \sup_{q\in\Pi(J)} s_p(s) = s_{p_s}(s) \text{ y } \bar{I}(s) = \inf_{q\in\Pi(J)} S_p(s) = S_{p_s}(s).$$

Pero como la función escalonada s es constante en cada subintervalo de p_s, entonces coinciden m_i y M_i para todo valor de i. De modo que $s_{p_s}(s) = S_{p_s}(s)$ y por tanto se cumple la igualdad (2). Q.e.d.

En consecuencia $E(J) \subset I(J)$, lo que nos permite afirmar la integral de Cauchy-Riemann es una generalización de la integral definida de funciones escalonadas.

8.2 Definición de integral utilizando límite de sucesiones de funciones escalonadas

Se presenta a continuación otro procedimiento para generalizar el funcional integral definida de funciones escalonadas, que conduce al mismo funcional construido en el epígrafe 8.1.

Sean $S(N,E(J))$ y $S_{\rightrightarrows f}(N,E(J))$, $f \in R(J)$, las extensiones de los conceptos de sucesión de funciones escalonadas y de sucesión de funciones escalonada convergente uniformemente a f, respectivamente. Por lo tanto,

$$S_{\rightrightarrows f}(N,E(J)) = \left\{\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S(N,E(J)) | e_n \rightrightarrows f)\right\}.$$

Considerando que

$$S_{\rightrightarrows}(N,E(J)) = \left\{S_{(} \rightrightarrows f)(N,E(J)) :\ f \in R(J)\right\}$$

se tiene el operador multiforme,

$$S_{\rightrightarrows} : R(J) \to S_{\rightrightarrows}(N,E(J)) \tag{7}$$

definido por $f \mapsto S_{\rightrightarrows} = S_{\rightrightarrows}(N,E(J))$.

Sea el operador

$$\int_a^b : S_{\rightrightarrows}(N,E(J)) \to S_{\rightrightarrows \int_a^b}(N,R) \tag{8}$$

donde $S_{\rightrightarrows \int_a^b f}(N,R)$ es el conjunto de las sucesiones de integrales $\left\{\int_a^b e_n(x)dx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\{e_n\} \in S_{\rightrightarrows f}(N,E(J))$ con $S_{\rightrightarrows \int_a^b}(N,E(J)) = \left\{S_{\rightrightarrows \int_a^b f}(N,R) :\ f \in R(J)\right\}$, definido por la relación $S_{\rightrightarrows f}(N,E(J)) \mapsto S_{\rightrightarrows \int_a^b f}(N,R)$.

Otro operador necesario para definir la integral de Cauchy-Riemann utilizando sucesiones de funciones escalonadas es

$$\lim_{n\to\infty} : S_{\rightrightarrows \int_a^b}(N,R) \to S(N,R) \tag{9}$$

definido por $S_{\rightrightarrows \int_a^b f}(N,R) \mapsto \left\{ \lim_{n\to\infty} \int_a^b e_n(x)dx \right\}_{\{e_n\} \in S_{\rightrightarrows f}(N,E(J))}$. Componiendo los operadores (7)−(9) se obtiene el operador

$$\left(\lim_{n\to\infty} \circ \int_a^b \circ S_{\rightrightarrows} \right) : R(J) \to S(N,R) \qquad (10)$$

definido por

$$f \mapsto \left\{ \lim_{n\to\infty} \int_a^b e_n(x)dx \right\}_{\{e_n\} \in S_{\rightrightarrows f}(N,E(J))}.$$

Para dar cumplimiento a tareas del tipo 5 y 6 puede verse Viloria y Cárdenas ([15] y [16]), donde se demuestran los resultados relativos a las funciones regladas siguientes:

Proposición 3. Toda función de variación acotada sobre $[a,b]$ es reglada sobre este intervalo.

Proposición 4. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es reglada si, y sólo si, existe una sucesión $\{e_n\}$ de $E(J)$ que converge uniformemente a f sobre $[a,b]$.

Proposición 5. El conjunto de puntos de discontinuidad de una función reglada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es numerable.

Proposición 6. Toda aplicación continua o monótona de un intervalo real J en un espacio de Banach es reglada. (([6]), p. 144).

Basándonos en la proposición 4 y teniendo en cuenta que la imagen del operador (10) para cada f de $R(J)$ es una sucesión constante de números reales, se da la definición siguiente.

Definición 12. La integral de Cauchy-Riemann desde a hasta b de un elemento f de $R(J)$ es uno cualquiera de los elementos de la sucesión constante $\left(\lim_{n\to\infty} \circ \int_a^b \circ S_{\rightrightarrows} \right)(f)$; o sea, tomando un elemento cualquiera $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $S_{\rightrightarrows f}(N,E(J))$ se define la integral de f mediante la igualdad

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b e_n(x)dx.$$

Esta es otra forma de definir el operador integral definida desde a hasta b.

8.3 Definición de integral utilizando otro tipo de sumas finitas

En este epígrafe se da cumplimiento a tareas del tipo 7 y 8 siguiendo procedimientos diferentes a los realizados en los epígrafes 8.1 y 8.2; utilizando otra definición usual de la integral definida, que presentamos a continuación para funciones f de $B(J)$.

Definición 13. Una sucesión de particiones $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi(J)$, $J = [a,b]$ se denomina fundamental (ver ([7], p. 346) si las sucesión de sus normas $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a cero.

A cada partición $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi(J)$ está asociada la colección $\xi(q)$ de todas las sucesiones numéricas $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ tales que $x_(i-1) \le \xi_i \le x_i$, $i = \overline{1:n}$. Toda suma del tipo $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ se denota por $\sigma(f,q,\xi)$ y se conoce como suma de Riemann de f respecto a la partición q y a la sucesión de puntos $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$. Si denotamos por $\xi(q)$ a la colección de todas las sucesiones $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ anteriormente descritas, se observa que existen tantas sumas del tipo $\sigma(f,q,\xi)$ como elementos tiene el conjunto $\bigcup_{q\in\Pi[a,b]} \xi(q)$.

A continuación se define el concepto límite de la colección $\sigma(f,q,\xi)$ utilizando el concepto de sucesión fundamental de particiones de $\Pi(J)$ y utilizando el lenguaje $\varepsilon - \delta$.

Definición 14. Se dice que el límite de las sumas $\sigma(f,q,\xi)$ cuando $\lambda \to 0$ es el número I, si para todo número real positivo ε existe un número real positivo δ tales que cuando $\lambda(q) < \delta$ se tiene $|\sigma(f,q,\xi) - I| < \varepsilon$, independientemente de la sucesión $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ de $\xi(q)$ que se considere.

Definición 15. Se dice que el límite de las sumas $\sigma(f,q,\xi)$ cuando $\lambda \to 0$ es el número I, si para toda sucesión fundamental de particiones $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi(J)$ toda sucesión de sumas $\{\sigma(f,q,\xi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende al límite I independientemente de la sucesión $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ de $\xi(q)$ que se considere.
El límite I se indica por

$$I = \lim_{\lambda\to 0} \sigma(f,q,\xi) = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Proposición 7. Las definiciones 14 y 15 son equivalentes.

Demostración. Probemos primeramente que si se satisface la definición 14, entonces se satisface la definición 15. Si $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión fundamental de $\Pi(J)$, entonces para todo número real positivo ε existe un número real positivo K tal que cuando $n > K$ se tiene que $\lambda_n < \delta$ siendo $\lambda_n = \lambda(\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. Por la definición 15 es $|\sigma(f,q,\xi) - I| < \varepsilon$. Queda así probada la convergencia a I de $\{\sigma(f,q,\xi)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pasemos a probar por contraposición que si f cumple las condiciones de la definición 15, también cumple las condiciones de la definición 14. Supongamos que se puede encontrar un número real positivo ε para el que no exista un número real positivo δ tal que cuando $\lambda < \delta$ se tenga la acotación $|\sigma(f,q,\xi) - I| < \varepsilon$. En ese caso se puede afirmar que existen una sucesión infinitesimal $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos y una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Pi(J)$ con $\lambda_n = \lambda(\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ tales que

$$\lambda_n < \delta_n \quad \text{y} \quad |\sigma(f,q,\xi) - I| \ge \varepsilon.$$

Pero esto contradice la definición 15, pues se concluye que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión fundamental de $\Pi(J)$ y la sucesión correspondiente $\{\sigma(f,q,\xi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiende a I. Q.e.d.

Las sumas de Riemann de una función acotada f de $B(J,R)$ se relacionan obviamente con las sumas de Darboux de la misma función a través de la siguiente propiedad:

> Para toda partición q de $\Pi(J)$ y toda selección de puntos intermedios $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ de $\xi(q)$ se cumple que $s(q,f) \le \sigma(f,q_n,) \le S(q,f)$.

Esta propiedad permite establecer la siguiente proposición, cuya demostración se puede encontrar en casi cualquier texto de Análisis Matemático:

Proposición 8. Una función acotada f de $B(J,R)$ es integrable si y sólo sí existe el límite I de las límite de las sumas de Riemann $\sigma(f,q,\xi)$ si la norma de la partición $\lambda \to 0$. Tal límite es precisamente el valor de la integral desde a hasta b de f; es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma(f,q,\xi).$$

Proposición 9. Una función real acotada f definida sobre $[a,b]$ cumple la igualdad (6) si y sólo si satisface las condiciones de la definición 15.

La validez de esta proposición se deduce directamente de la equivalencia de las definiciones 14 y 15.

Resulta entonces evidente que esta nueva definición de la integral es también una generalización de la integral de funciones escalonadas.

9. Conclusiones

Se define el concepto de generalización de un funcional y se presentan ocho tareas didácticas que facilitan el proceso de generalización hasta obtener un nuevo funcional que lo generaliza.

Se aplican las tareas didácticas en el desarrollo de tres procesos de generalización del funcional integral definida de funciones escalonadas hasta obtener un mismo resultado el funcional integral de Riemann sobre la colección de funciones regladas. Estos tres procesos utilizan respectivamente integrales inferiores y superiores, el límite de funciones escalonadas y un tipo de sumas finitas diferentes al que corresponde a las funciones escalonadas.

Los procesos de generalización se presentan mediante una organización significativa del conocimiento utilizando la composición de operadores y funcionales, que puede ser utilizada por los docentes para que los estudiantes participen en su construcción y para la generalización del funcional integral de Riemann.

Referencias

[1] Asmus, V. F. (1947). *Lógica*. Gospolitizdat. Moscú.

[2] Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H. (2000). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognitivo*. Editorial Trillas. México. Primera página.

[3] Chelpanov, G. I. (1946). *Manual de Lógica*. Gospolitizdat. Moscú.

[4] Clauss, G. (1960). *Introducción a la lógica formal*. IL. Moscú.

[5] Davýdov, V. V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.

[6] Dieudonné, J. (1966). *Fundamentos de Análisis Moderno*. Reverté. España.

[7] Fikhtengol G. M. (1965). *The Fundamentals of Mathematical Analysis. Volumen 1*. Pergamon Press. USA.

[8] Gorski, D. P. y Tavants, P. V. y otros (s.f.). *Lógica*. Ediciones Pedagógicas. Imprenta Nacional de Cuba. La Habana. Cuba.

[9] Kondakov, N. I. (1954). *Lógica*. Ediciones AC de la URSS. Moscú.

[10] Mederos, O. B. y Roldán, R. A. (2011). *Generalizaciones y caracterizaciones del concepto de métrica*. Ciencias Matemáticas. Vol. 25. No. Único. Año 2009-2011, 26-38.

[11] Mederos, O. B. y Roldán, R. A. (2013). *Generalizaciones del concepto de métrica*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 35, 43-58.

[12] Mederos, O. B., Roldán, R. A. y otros (2014). *Algunas formas de generalización de conceptos en la matemática disciplinar y escolar*. Plaza y Valdés, S.A. de C. V. Editores. México.

[13] Smirnov, A. A. y otros. (1956). *Psicología*. Libro de texto para los institutos pedagógicos. Uchpedguiz. Moscú.

[14] Strogóvich, M. S. (1949). *Lógica*. Gospolitizdat. Moscú.

[15] Viloria, N. y Cadenas, R. (2003). *Integral de Cauchy: Alternativa a la Integral de Riemann*. Divulgaciones matemáticas. Vol. 11. No.1, 49-53.

[16] Viloria, N. y Cadenas, R. (2007). *Integral de Cauchy y Funciones Regladas*. Revista Notas de Matemática. Vol. 3(1), No. 251, pp. 45-71.

[17] Vygotskii, L. S.(1968). *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. Instituto del Libro. La Habana. Cuba.