Ciencias Matemáticas, Vol. 35, No. 2, 2021, Pag. 101-110
Recibido 03-2021, Aceptado 07-2021

Cohomología de Hochschild del Álgebra de Matrices Triangulares
Hochschild Cohomology of Triangular Matrix Algebras

Beatriz de Rancell Montero Deus[1]*, José Fidel Hernández Advíncula [1]

Resumen El objetivo de este trabajo es estudiar la cohomología de Hochschild del álgebra de matrices triangulares. Se define la cohomología de Hochschild de una $K-$álgebra A de dimensión finita con coeficientes en el $A-$bimódulo M para el caso en el que K es un cuerpo. Se demuestra la existencia de una sucesión exacta larga para el caso de la extensión por un punto $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM \\ 0 & K \end{pmatrix}$ que relaciona las cohomologías de Hochschild de A y B y sus aplicaciones para álgebras de tipo representación dirigida. Se generaliza esta sucesión para el caso $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM_B \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Abstract The aim of this paper is to study the Hochschild cohomology of the triangular matrix algebra. We define the Hochschild cohomology of a finite-dimensional $K-$algebra A with coefficients in the $A-$bimodule M, where K denote a field. We demonstrate the existence of a long exact sequence for the one-point extension $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM \\ 0 & K \end{pmatrix}$, which relate the Hochschild cohomologies of A and B and its applications to representation-directed algebras. This long exact sequence is generalized to the case $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM_B \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

Palabras Clave
Cohomología de Hochschild, Extensión por un punto, Álgebra de Matrices Triangulares

Keywords
Hochschild Cohomology, One point extension, Triangular Matrix Algebras

[1] *Departamento de Matemática, Universidad de La Habana, Cuba, betty@matcom.uh.cu, fidel@matcom.uh.cu*
***Autor para Correspondencia, Corresponding Author**

Introducción

Las técnica homológicas tienen su origen en topología a finales del siglo 19. No fue hasta la década de 1940 que se manifiestan en el álgebra cuando Gerhard Hochschild introduce la (co)homología de álgebras (1945) y Samuel Eilenberg y Mac Lane introducen la (co)homología de grupos (1947). Esta herramienta se ha vuelto indispensable en álgebra abstracta, topología algebraica, teoría de representaciones, entre otros campos.

La cohomología de Hochschild, en particular, es una herramienta homológica para álgebras asociativas sobre anillos. Fue introducida por primera vez en 1945 por Gerhard Hochschild en su artículo *On the cohomology groups of an associative algebra* para el caso de álgebras sobre un cuerpo y posteriormente generalizado al caso de álgebras sobre un anillo por Henri Cartan y Samuel Eilenberg en 1956 en su libro *Homological algebra*. En su artículo, Hochschild define la cohomología de Hochschild a partir de resoluciones proyectivas del álgebra A y de grupos de cohomología con valores en un $A-$bimódulo arbitrario. En este mismo trabajo Hochschild da una interpretación del segundo grupo de cohomología en términos de las extensiones del álgebra A.

La cohomología de Hochschild, al guardar una significativa información sobre anillos y álgebras, es usada para estudiar sus estructuras y deformaciones, así como para identificar elementos esenciales sobre sus representaciones. Nuestro interés se centra en las álgebras A finito-dimensionales sobre un cuerpo K, donde tenemos como resultado la invarianza bajo equivalencias Morita.

El objetivo fundamental de esta investigación es el estudio de la cohomología de Hochschild del álgebra de matrices triangulares $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$, donde A y R son dos $K-$ álgebras y ${}_AM_R$ es un $(A-R)-$ bimódulo. Específicamente, encontrar una forma general de describir la cohomología de Hochschild del álgebra B, a partir de las de A y R.

1. Cohomología de Hochschild de un álgebra

En esta sección desarrollaremos las nociones básicas acerca de la cohomología de Hochschild de una $K-$álgebra A donde K es un cuerpo y con coeficientes en un bimódulo M. En general, la cohomología de Hochschild se puede definir en el caso en que K sea un anillo conmutativo y unitario.

Definición 1 *Sean A y B dos $K-$álgebras. Un $(A-B)-$ bimódulo es una terna ${}_AM_B = (M,*,\cdot)$ donde ${}_AM = (M,*)$ es un $A-$módulo izquierdo y $M_B = (M,\cdot)$ es un $B-$módulo derecho y :*

$$(a*m)\cdot b = a*(m\cdot b) \quad \forall\, m\in M,\ a\in A,\ b\in B$$

Para todo $(A-B)$ bimódulo ${}_AM_B$ y todo $B-$ módulo X_B, el $K-$ espacio vectorial $Hom_B({}_AM_B, X_B)$ de todos los $B-$ módulos homomorfismos de M_B a X_B es un $A-$ módulo derecho con respecto a la multiplicación por $A-$ escalares:

$$(f,a) \rightsquigarrow f\cdot a \quad \text{dada por } (fa)(m) = f(am)$$

Si M y X son de $K-$ dimensión finita, entonces $Hom_B({}_AM_B, X_B)$ también lo es.

Definición 2 *Llamamos álgebra envolvente de A al $K-$espacio vectorial $A^e = A\otimes A^{op}$, donde A^{op} denota el álgebra opuesta de A, con la multiplicación definida como sigue:*

$$(a_1\otimes b_1)\cdot(a_2\otimes b_2) = a_1a_2\otimes b_2b_1$$

Con esta definición todo $A-$bimódulo M puede considerarse como un A^e-módulo izquierdo, donde la acción está dada por

$$(a\otimes b)\cdot m = amb,\ \forall a,b\in A \text{ and } m\in M.$$

Cabe aclarar, que de forma análoga, la categoría de $A-$ bimódulos también es naturalmente isomorfa a la categoría de A^e- módulos derechos, definiendo la acción como $m\cdot(a\otimes b) = bma$.

Notemos que A es ella misma un A^e-módulo. En general $A^{\otimes n} = A\otimes\cdots\otimes A$ (n factores) es un A^e- módulo definiendo

$$(a\otimes b)\cdot(c_1\otimes c_2\otimes\cdots\otimes c_{n-1}\otimes c_n) = ac_1\otimes c_2\otimes\cdots\otimes c_{n-1}\otimes c_nb.$$

1.1 Complejo de Hochschild

Consideremos la sucesión de $A-$ bimódulos

$$\cdots \xrightarrow{d_3} A^{\otimes 4} \xrightarrow{d_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{d_1} A\otimes A \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \tag{1}$$

donde π es la multiplicación en A y para $n\geqslant 1$ definimos

$$d_n(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1} \tag{2}$$

Se puede chequear que (1) define un complejo de cadena, es decir, $d_{n-1}d_n = 0$. Además existe una homotopía contractante dada por:

$$s_n(a_0\otimes\cdots\otimes a_{n+1}) = 1\otimes a_0\otimes\cdots\otimes a_{n+1} \tag{3}$$

con lo cual la sucesión anterior es exacta.

Producto de los isomorfismos de A^e- bimódulos:

$$A^{\otimes(n+2)} \cong A^e\otimes A^{\otimes n} \cong \bigoplus_{i\in I} A^e(1\otimes 1\otimes a_i), \tag{4}$$

donde $\{a_i\}_{i\in I}$ es una base de $A^{\otimes n}$ como $K-$espacio vectorial y el primer isomorfismo está dado por

$$a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes a_{n+1} \mapsto (a_0\otimes a_{n+1})\otimes(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)$$

el complejo anterior es una resolución libre de A como A^e- módulo, llamada *resolución de Hochschild de A*.

Si aplicamos el funtor $Hom_{A^e}(\_\_, M)$ al complejo (1), donde M es un A - bimódulo, obtenemos el complejo de $K-$ módulos:

$$0 \longrightarrow Hom_{A^e}(A,M) \xrightarrow{b_0^*} Hom_{A^e}(A^{\otimes 2},M) \xrightarrow{b_1^*} \\ Hom_{A^e}(A^{\otimes 3},M) \xrightarrow{b_2^*} \cdots \tag{5}$$

con diferenciales definidos por $b_n^*(f) = fd_n$ para toda aplicación $f\in Hom_{A^e}(A^{\otimes(n+1)},M)$. Podemos usar para $n\geqslant 0$ el isomorfismo de $K-$módulos

$$Hom_{A^e}(A^{\otimes(n+2)},M) \cong Hom_K(A^{\otimes n},M) \tag{6}$$

dado por

$$n=0:\quad g\mapsto (1\mapsto g(1\otimes 1))$$
$$n\geqslant 1:\quad g\mapsto (a_1\otimes\cdots\otimes a_n \mapsto g(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1))$$

Luego podemos reescribir el complejo (5) como

$$C^*(A,M):\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_1^*} Hom_K(A,M) \xrightarrow{d_2^*} \\ Hom_K(A\otimes A,M) \xrightarrow{d_3^*} \cdots \tag{7}$$

Identificando las funciones que se corresponden por el isomorfismo (6) podemos reescribir

$$\begin{aligned} d_n^*(f)(a_1\otimes\cdots\otimes a_n) =& a_1 f(a_2\otimes\cdots a_n))+ \\ +\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f(a_1\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n)& \\ +(-1)^n f(a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1})a_n& \end{aligned} \tag{8}$$

para toda aplicación $f\in Hom_K(A^{\otimes(n-1)},M)$, donde un producto tensorial vacío se identifica con $1\in K$.

Definición 3 *Llamamos* complejo de cocadenas de Hochschild *al complejo* (7) *con diferenciales* d_n^* *dados por* (8) *para* $n \geqslant 1$ *y* d_0^* *es la aplicación nula.*

Definición 4 *La* Cohomología de Hochschild $HH^*(A,M)$ de A con coeficientes en M*, es la cohomología del complejo* $C^*(A,M)$ (7)*:*

$$HH^n(A,M) = H^n(Hom_K(A^{\otimes *},M))$$

esto es, $HH^n(A,M) = \dfrac{Kerd_{n+1}^*}{Imgd_n^*}$ *con* $n \geqslant 0$.

Los elementos en $Kerd_{n+1}^*$ *se llaman* $n-$cociclos de Hochschild *y los de* $Imgd_n^*$ *se llaman* $n-$colímites de Hochschild. *En lo adelante consideremos* $HH^*(A,M) = \bigoplus_{n\geqslant 0} HH^n(A,M)$ *como* $K-$ *módulo* $\mathbb{Z}_+-$*graduado.*

Particularmente si $M = A$, es usual abreviar la notación para la cohomología de Hochschild como $HH^*(A) = HH^*(A,A)$.

Para el caso en cuestión donde K es un cuerpo, se tiene que (1) es una resolución proyectiva de A como A^e- módulo, luego podemos definir la cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M como

$$HH^n(A,M) \cong Ext^n_{A^e}(A,M), \quad ([18],\ \text{corolario 9.1.5 p. 303})$$

lo que trae como ventaja que podamos escoger cualquier resolución proyectiva de A como A^e -módulo para calcular la cohomología de Hochschild.

Otras propiedades a tener en cuenta son:

i) Si A y B son $K-$álgebras, M un $A-$bimódulo y N un $B-$bimódulo, entonces para cada $i \geqslant 0$ se tiene

$$HH^i(A\times B, M\times N) = HH^i(A,M) \oplus HH^i(B,N).$$

([18], teorema 9.1.8 p. 305)

ii) La cohomología de Hochschild es invariante bajo equivalencia Morita: dadas dos $K-$ álgebras A y B tal que $ModA$ es equivalente a $ModB$, entonces $HH^i(A) \cong HH^i(B)$ para cada $i \geqslant 0$ ([18], teorema 9.5.6 p. 328). Luego basta considerar álgebras básicas.

2. El álgebra de matrices triangulares

Consideremos el anillo de matrices triangulares $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$, donde A y R son dos $K-$ álgebras y ${}_AM_R$ es un $(A-R)-$bimódulo . Los elementos de B son las matrices $\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $b \in R$, $a \in A$, $m \in M$ y las operaciones están dadas por las ordinarias entre matrices:

- Adición: $\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & m+v \\ 0 & b+f \end{pmatrix}$
- Multiplicación: $\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & v \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & av+mf \\ 0 & bf \end{pmatrix}$
- Identidad: $1 = e_A + e_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

El anillo B puede ser dotado de una estructura de $K-$ álgebra, mediante la acción evidente del cuerpo K y nos referiremos a ella como Álgebra Triangular.

Si X es un $B-$ módulo, los idempotentes e_A y e_R nos permiten obtener una descomposición del mismo en suma de grupos abelianos de la forma $X = Xe_A \oplus Xe_R$, donde Xe_A es un $A-$ módulo y Xe_R es un $R-$ módulo. Denotemos por $X'_A = Xe_A$ y por $X''_R = Xe_R$. Sea $m \in {}_AM_B$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_R = e_A \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_A = e_R \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Luego multiplicando X con un elemento de la forma $\tilde{m} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos $Xe_A\tilde{m} \subset Xe_R$. De aquí obtenemos una aplicación $\varphi : X'_A \times M \longrightarrow X''_R$ dada por $\psi(xe_A, m) = x\tilde{m}e_R$ la cual es bilineal. Esta aplicación da lugar a un único homomorfismo de $R-$ módulos $\varphi : X' \otimes_A M_R \longrightarrow X''_R$.

El análisis anterior nos brinda una forma bastante simple de describir los módulos sobre el álgebra triangular B. Para precisar este punto de vista definamos la categoría $rep({}_AM_R)$ de representaciones del bimódulo ${}_AM_R$, la cual demostraremos es equivalente a $ModB$.

Los objetos de $rep({}_AM_B)$ son las ternas (X'_A, X''_B, φ) donde

- $X'_A \in A$,
- $X''_R \in R$,
- $\varphi : X' \otimes_A M_R \longrightarrow X''_R$ es un homomorfismo de $R-$módulos.

Un morfismo en $rep({}_AM_R)$ es un par de morfismos

$$(f', f'') : (X'_A, X''_R, \varphi) \longrightarrow (Y'_A, Y''_R, \psi)$$

donde

$$\begin{array}{l} f' : X'_A \longrightarrow Y'_A \text{ es un } A-\text{homomorfismo} \\ f'' : X''_R \longrightarrow Y''_R \text{ es un } R-\text{homomorfismo} \end{array}$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$X' \otimes_A M_R e, t\varphi s, l f' \otimes M X''_R s, r f'' Y' \otimes_A M_R e, b\psi Y''_R$$

La composición de morfismos y la suma directa en $rep({}_AM_R)$ están definidas componente a componente.

El siguiente teorema establece la equivalencia entre la categoría de módulos sobre B y la categoría $rep({}_AM_R)$ de representaciones del bimódulo ${}_AM_R$.

Teorema 5 *Sean A y R dos $K-$álgebras de dimensión finita y ${}_AM_R$ un $(A-R)$ bimódulo de dimensión finita. Sea B la $K-$álgebra de matrices triangulares de dimensión finita, entonces se tienen las siguientes equivalencias de categorías:*

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_AM_R & A \end{pmatrix} \simeq rep({}_AM_R) \simeq Mod\begin{pmatrix} A & {}_AM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

La demostración de dicho resultado puede ser consultada en [15].

A partir de este resultado, daremos una descripción de los objetos proyectivos e inyectivos en $rep({}_AM_R)$.

Decimos que una sucesión en $rep({}_AM_R)$

$$0 \longrightarrow (X', X'', \phi) \overset{(\alpha,\beta)}{\longrightarrow} (Y', Y'', \psi) \overset{(\alpha',\beta')}{\longrightarrow} (Z', Z'', \varphi) \longrightarrow 0$$

es exacta si las sucesiones $0 \longrightarrow X' \overset{\alpha}{\longrightarrow} Y' \overset{\alpha'}{\longrightarrow} Z' \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow X'' \overset{\beta}{\longrightarrow} Y'' \overset{\beta'}{\longrightarrow} Z'' \longrightarrow 0$ son exactas.

Un objeto en $rep({}_AM_R)$ es simple si no tiene subobjetos propios no nulos. Decimos que (X', X'', ϕ) es un subobjeto de (Y', Y'', ψ) si $X' \subset Y'$, $X'' \subset Y''$ y $\phi = \psi|_{X'\otimes M}$.

Entonces tenemos lo siguiente:

Proposición 6 *Sea B el álgebra triangular $\begin{pmatrix} A & {}_AM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$ y $F : ModB \longrightarrow rep({}_AM_R)$ la equivalencia de categorías que define el teorema (5), entonces*

a) X es proyectivo en $ModB$ si y solo si $F(X)$ es proyectivo en $rep({}_AM_R)$.

b) X es inyectivo en $ModB$ si y solo si $F(X)$ es inyectivo en $rep({}_AM_R)$.

c) $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta en $ModB$ si y solo si
$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ es una sucesión exacta en $rep({}_AM_R)$.

d) X es simple en $ModB$ si y solo si $F(X)$ es simple en $rep({}_AM_R)$.

Proposición 7

a) Los proyectivos inescindibles en $rep({}_AM_R)$ son los objetos isomorfos a los de la forma $(M\otimes_R P, P, 1_{M\otimes_R P})$ donde P es un $R-$módulo proyectivo inescindible y los de la forma $(Q,0,0)$ con Q un $A-$ módulo proyectivo inescindible.

b) Los inyectivos inescindibles en $rep({}_AM_R)$ son de la forma $(0,I,0)$ con I un $R-$ módulo inyectivo inescindible y los objetos isomorfos a $(J,_A(M,J),\phi)$ con J un $A-$módulo inyectivo inescindible y
$\phi : M\otimes_R Hom_A(M,J) \longrightarrow J$ dado por $\phi(m\otimes f) = f(m)$.

Las demostraciones de las proposiciones 6 y 7 pueden ser consultadas en [2].

3. Extensión por un punto

Definición 8 *Sea A una $K-$ álgebra de dimensión finita y $M \in ModA$. La extensión por un punto de A por el módulo M es la $K-$ álgebra*

$$A[M] = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

La razón para esta terminología sigue de lo siguiente. Sea $\Lambda = K(\Gamma,\rho)$ una $K-$ álgebra de camino del carcaj con relaciones (Γ,ρ). Sea i una fuente en Γ y $\bar{e}_i$ el correspondiente idempotente en Λ. Como no hay caminos no triviales que terminen en i tenemos $\bar{e}_i\Lambda\bar{e}_i \simeq K$ y $\bar{e}_i\Lambda(1-\bar{e}_i) = 0$. Si denotamos por (Γ',ρ') el carcaj con relaciones que se obtiene al remover el vértice i y las relaciones que comienzan en i, entonces $(1-\bar{e}_i)\Lambda(1-\bar{e}_i) \simeq K(\Gamma',\rho')$. Así $K(\Gamma,\rho)$ es obtenido a partir de $\Lambda' = K(\Gamma',\rho')$ añadiendo un vértice i, junto con flechas y relaciones que comiencen en i. Entonces tenemos $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda' & (1-\bar{e}_i)\Lambda\bar{e}_i \\ 0 & K \end{pmatrix}$, luego Λ es una extensión por un punto de Λ'.

De la propia definición podemos concluir que una condición necesaria para que un álgebra B sea de la forma $A[M]$ para algún álgebra A y un $A-$módulo M es que exista un $B-$módulo simple inyectivo. Esta propiedad también es suficiente: supongamos B tiene un módulo simple inyectivo S, sean $P(S)$ su cubierta proyectiva y $e \in B$ un idempotente tal que $P(S) = Be$, tomando $A = \dfrac{B}{\langle e\rangle}$ (donde $\langle e\rangle$ denota el ideal bilátero en B generado por el idempotente e) y $M = P(S)$, entonces M es un $A-$ módulo y $B \cong A[M]$.

Dualmente podemos hablar de coextensión por un punto cuando $[M]A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & K \end{pmatrix}$. En este caso se considera i un vértice pozo, es decir, no hay caminos no triviales que comiencen en i. Así $K(\Gamma,\rho)$ es obtenido a partir de $\Lambda' = K(\Gamma',\rho')$ añadiendo un vértice i, junto con flechas y relaciones que terminen en i.

4. Álgebras de representación dirigida

En esta sección expondremos algunos de las definiciones y resultados del capítulo IX de [1] que nos permitirán comprender la próxima sección.

Sea A un álgebra. Un *camino* en A es una sucesión

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \qquad \cdots \qquad M_{t-1} \xrightarrow{f_t} M_t$$

de no isomorfismos no nulos $f_1, f_2, \cdots, f_t$ entre $A-$ módulos indescomponibles $M_0, M_1, \cdots, M_t$ con $t \geqslant 1$. Decimos que M_0 es un *antecesor* de M_t o que M_t es un *sucesor* de M_0. Un camino en A es un *ciclo* si su fuente M_0 es isomorfo con su final M_t.

Definición 9 *Decimos que un módulo indescomponible es* dirigido *si no está contenido en un ciclo.*

Definición 10 *Llamamos* soporte *de un módulo M, y lo denotamos por (M), al subcarcaj de Q_A generado por los vértices $i \in (Q_A)_0$ tal que $(\dim M)_i \neq 0$ o lo que es equivalente tal que $Hom_A(P(i), M) \neq 0$.*

Definición 11 *Un módulo se dice* sincero *si $Sop(M) = Q_A$. Sea $e = \sum_{j \notin ((M))_0} e_j$, donde e_j denota el primitivo idempotente correspondiente al vértice $j \in (Q_A)_0$, entonces M es sincero visto como módulo sobre el álgebra $\frac{A}{AeA}$, llamada* álgebra soporte *de M.*

Decimos que $Sop(M)$ es un *subcarcaj convexo* de Q_A si todo camino en Q_A con vértices de partida y final en $(Sop(M))_0$ está contenido completamente en $Sop(M)$.

Proposición 12 *Sea $A = \frac{KQ_A}{I}$ y M un $A-$módulo indescomponible dirigido, entonces $Sop(M)$ es un subcarcaj convexo de Q_A.*

Proposición 13 *Sea A un álgebra y M un $A-$módulo indescomponible dirigido, entonces $End(M) \cong K$ y $Ext^j_A(M,M) = 0$ para todo $j \geqslant 1$.*

Definición 14 *Un álgebra es de tipo* representación dirigida *si todo $A-$ módulo indescomponible es dirigido.*

Proposición 15 *Toda álgebra de tipo representación dirigida es de representación finita.*

Definición 16 *Sea A un álgebra con carcaj Q_A sin ciclos. Un $A-$ módulo proyectivo indescomponible $P(a)$, con $a \in (Q_A)_0$, se dice que tiene* radical separado *si para cualesquiera dos sumandos indescomponibles distintos de $radP(a)$ los soportes $Sop(M)$ y $Sop(N)$ están contenidos en componentes conexas distintas el subcarcaj pleno $Q_A(\vec{a})$ de Q_A generado por los no antecesores de a, es decir, con vértices j tal que no hay un camino desde j hasta a. El álgebra A satisface la* condición de separación *(S-condición) si cada $A-$módulo proyectivo indescomponible tiene radical separado.*

Como consecuencia directa de la definición, tenemos que si un $A-$ módulo proyectivo indescomponible P tiene radical indescomponible, entonces tiene radical separado. Trivialmente, todo simple proyectivo tiene radical separado.

5. Cohomología de Hochschild de la extensión por un punto

Dedicaremos esta sección a analizar y demostrar los resultados de la sección 5 de [13].

Continuando con las notaciones de la sección (3), consideremos $B = A[M]$ y sea $e \in B$ el primitivo idempotente tal que $M = radBe$, $A = \frac{B}{I}$, donde $I = \langle e \rangle = BeB$ es el ideal bilátero generado por e.

Con las notaciones anteriores y siendo A^e y B^e las respectivas álgebras envolventes de A y B. Denotemos por $P(e,e')$ al B^e- módulo proyectivo indescomponible $B^e(e \otimes e')$, se cumple que:

(i) ${}_{B^e}I \cong P(e,e') \cong Hom_K(S(e), P(e))$

(ii) $Ext^j_{A^e}(A,A) \cong Ext^j_{B^e}(A,A)$

(iii) $Ext^{i+1}_B(S(e), P(e)) \cong Ext^i_A(M,M)$ para $i \geqslant 1$

(iV) $Ext^1_B(S(e), P(e)) \cong \frac{Hom_A(M,M)}{K}$

(V) $Hom_B(S(e), P(e)) = 0$

Demostración.

- (ii) Sale directamente del hecho de que A^e es una subcategoría convexa de B^e y por tanto, $Ext^i_{B^e}(X,Y) \cong Ext^i_{A^e}(X,Y)$ para $X, Y \in A^e$.
- Sea la sucesión exacta corta

  $$0 \to M = radP(e) \to P(e) \to S(e) \to 0$$

  Apliquemos $Hom_B(M, \_\_)$:

  $$\begin{aligned} 0 \to Hom_B(M,M) \to Hom_B(M,P(e)) \to Hom_B(M,S(e)) \\ \to Ext^1_B(M,M) \to Ext^1_B(M,P(e)) \\ \to Ext^1_B(M,S(e)) \to Ext^2_B(M,M) \to \cdots \end{aligned}$$

  Como $Hom_B(M,S(e)) = 0$ y $Ext^i_B(M,S(e)) = 0$ para $i \geqslant 1$ por ser $S(e)$ un $B-$módulo inyectivo, entonces $Ext^i_B(M,M) \cong Ext^i_B(M,P(e))$ para $i \geqslant 0$.

  Aplicando $Hom_B(\_\_, P(e))$:

  $$\begin{aligned} 0 \to Hom_B(S(e),P(e)) \to Hom_B(P(e),P(e)) \to \\ Hom_B(M,P(e)) \to Ext^1_B(S(e),P(e)) \to Ext^1_B(P(e),P(e)) \\ \to Ext^1_B(M,P(e)) \to Ext^2_B(S(e),P(e)) \to Ext^2_B(P(e),P(e)) \to \cdots \end{aligned}$$

  $Ext^i_B(P(e),P(e)) = 0$ para $i \geqslant 1$ por ser $P(e)$ un $B-$ módulo proyectivo, de donde $Ext^{i+1}_B(S(e),P(e)) \cong Ext^i_B(M,P(e)) \cong Ext^i_B(M,M)$ para $i \geqslant 1$ y se obtiene (iii).

- Para (iv) y (v) tenemos

$$0 \to Hom_B(S(e),P(e)) \xrightarrow{f_1} Hom_B(P(e),P(e)) \xrightarrow{f_2}$$
$$Hom_B(M,P(e)) \xrightarrow{f_3} Ext^1_B(S(e),P(e)) \to 0$$

Primeramente observemos que $Hom_B(P(e),P(e)) = eBe \cong K$ ([6], lema 1.2.6 p. 7). Luego f_2 es un monomorfismo y $Kerf_3 = Imgf_2 = K$, de donde $Ext^1_B(S(e),P(e)) \cong \dfrac{Hom_B(M,P(e))}{Kerf_3} \cong \dfrac{Hom_B(M,M)}{K}$ y obtenemos (iv). Además f_1 es un monomorfismo, por lo que $Hom_B(S(e),P(e)) \cong Imgf_1 = f_2 = 0$ y obtenemos (v).

■

Teorema 17 *Sea $B = A[M]$, entonces existe una sucesión exacta larga de $K-$espacios vectoriales que conecta a las cohomologías de Hochschild de A y de B, dada por*

$$\begin{aligned} 0 \to HH^0(B) \to HH^0(A) \to \frac{Hom_A(M,M)}{K} \\ \to HH^1(B) \to HH^1(A) \to Ext^1_A(M,M) \to \cdots \\ \to Ext^i_A(M,M) \to HH^{i+1}(B) \to HH^{i+1}(A) \\ \to Ext^{i+1}_A(M,M) \to \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta de B^e- módulos

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow A = \frac{B}{I} \longrightarrow 0$$

Aplicando $Hom_{B^e}(\_\_,A)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_{B^e}(A,A) \to Hom_{B^e}(B,A) \\ \to Hom_{B^e}(I,A) \to Ext^1_{B^e}(A,A) \\ \to Ext^1_{B^e}(B,A) \to Ext^1_{B^e}(I,A) \\ \to Ext^2_{B^e}(A,A) \to \cdots \end{aligned}$$

Por (5) (i) tenemos que I es proyectivo sobre B^e por lo que $Ext^i_{B^e}(I,A) = 0$ para $i > 0$ y por construcción $Hom_{B^e}(I,A) = 0$. Luego, $Ext^i_{B^e}(B,A) \cong Ext^i_{B^e}(A,A) \cong Ext^i_{A^e}(A,A) \cong HH^i(A)$ para $i \geqslant 0$, donde el segundo isomorfismo está dado por (5) (ii). Luego, aplicando $Hom_{B^e}(B,\_\_)$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_{B^e}(B,I) \to HH^0(B) \to HH^0(A) \\ \to Ext^1_{B^e}(B,I) \to HH^1(B) \to HH^1(A) \\ \to Ext^2_{B^e}(B,I) \to \cdots \end{aligned}$$

Además $Ext^i_{B^e}(B,I) = HH^i(B,I) =$
$= HH^i(B, Hom_K(S(e),P(e))) = Ext^i_B(S(e),P(e))$, donde la segunda igualdad viene dada por el segundo isomorfismo de (5) (i) y la tercera igualdad es consecuencia de ([5], corolario 4.4 p. 170). Además $Hom_{B^e}(B,I) = Hom_B(S(e),P(e)) = 0$, $Ext^1_{B^e}(B,I) = Ext^1_B(S(e),P(e)) \cong \dfrac{Hom_A(M,M)}{K}$ y $Ext^i_{B^e}(B,I) = Ext^i_B(S(e),P(e)) \cong Ext^{i-1}_A(M,M)$ para $i \geqslant 2$ por (5) (v), (iv) y (iii) respectivamente. De donde se obtiene la sucesión deseada.

En lo siguiente consideremos $B = \dfrac{KQ}{\mathscr{I}}$ y teniendo en cuenta las definiciones de la sección (4) enunciemos los siguientes resultados.

Proposición 18 *Si B es de representación dirigida, entonces $HH^i(B) = 0$ para $i \geqslant 2$.*

Demostración. Como B es de representación dirigida, entonces por la proposición (15) es de representación finita, luego su carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(ModB)$ no tiene ciclos y B tiene un número finito de módulos indescomponibles salvo isomorfismo. En particular, al tener un número finito de módulos proyectivos indescomponibles, existe un $B-$ módulo proyectivo indescomponible $P(a)$ que no tiene otro proyectivo indescomponible como sucesor, esto garantiza que a es una fuente en Q_B. Sea A el álgebra (no necesariamente conexa) cuyo carcaj es el subcarcaj pleno de Q_B generado por todos los puntos excepto a, con las relaciones heredadas ($\mathscr{I} \cap Q_A$). Pongamos $A = A_1 \times \cdots \times A_r$, donde las A_i son álgebras conexas y $radP(a) = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$, con $M_i \in ModA_i$ indescomponible para $1 \leqslant i \leqslant r$.

Procedamos por inducción sobre el número $n = |(Q_B)_0|$ de $B-$ módulos simples distintos. Para $n = 1$, Q_B es el carcaj formado por solo un punto y $B \cong K$. En este caso se tiene que $HH^i(K) = 0$ para $i \geqslant 1$.

Para una cantidad $n > 1$ de $B-$ módulos simples, por el análisis anterior se tiene que existe un vértice fuente $a \in (Q_B)_0$, por lo que $B = A[M]$, donde $A = A_1 \times \cdots \times A_r$, cada A_i es de representación dirigida y $M = radP(a) = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$, con $M_i \in ModA_i$ indescomponible. Por construcción la cantidad de $A-$ módulos simples es $n-1$. La proposición (13) nos dice que ${}^{j}_{A_i}(M_i,M_i) = 0$ para todo $j \geqslant 1$ e $1 \leqslant i \leqslant r$, luego $Ext^j_A(M,M) = 0$ para todo $j \geqslant 1$. Además, por hipótesis de inducción tenemos $HH^j(A_i) = 0$ para $j \geqslant 2$ e $1 \leqslant i \leqslant r$, luego $HH^j(A) = 0$ para $j \geqslant 2$. Sustituyendo en la sucesión (9), obtenemos $HH^i(B) = 0$ para $j \geqslant 2$. ■

Proposición 19 *Si B es tipo representación dirigida. Entonces B satisface la S-condición si y solo si $HH^1(B) = 0$.*

Demostración. Como en la demostración anterior procedamos por inducción sobre el número $n = |(Q_B)_0|$ de $B-$ módulos simples distintos. Para $n = 1$, Q_B es el carcaj formado por solo un punto y $B \cong K$. En este caso, $HH^i(K) = 0$ para $i \geqslant 1$, luego se tiene lo planteado. Para $n > 1$ supongamos $B = A[M]$, donde $A = A_1 \times \cdots A_r$ donde A_i son de representación dirigida para $1 \leqslant i \leqslant r$ y $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$, con $M_i \in ModA_i$ indescomponible.

Si B satisface la S-condición, también la satisfacen $A = A_1 \times \cdots A_r$ para $1 \leqslant i \leqslant r$. Por hipótesis de inducción tenemos

$HH^1(A_i) = 0$, de donde $HH^1(A) = 0$. Como M_i es indescomponible y A_i es de representación dirigida, entonces por (13) $End_{A_i}M_i = K$, así $End_A M = K^r$. Tenemos que $HH^0(B) = K$, $HH^0(A) = K^r$ y $\dim \dfrac{Hom_A(M,M)}{K} = r-1$, por tanto, al sustituir en (9) y tener en cuenta la exactitud en cada punto se obtiene $HH^1(B) = 0$.

Recíprocamente, si $HH^1(B) = 0$, B es dirigida y $B = A[M]$, entonces $Ext^1_A(M,M) = 0$ como arriba. Como a es una fuente, cada A_i satisface la S-condición y por inducción inferimos que A satisface la S-condición. Falta por analizar qué sucede con $radP(a) = M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$. Como $HH^1(B) = 0$, entonces $\dim \dfrac{Hom_A(M,M)}{K} = r-1$, luego $\dim EndM_i = 1$ y en particular M_i es indescomponible. De aquí que B satisface la S-condición. ■

Proposición 20 *Sea A es una $K-$álgebra conexa finito dimensional con $HH^0(A) = K$ y $HH^i(A) = 0$ para $i > 0$. Sea $M \in ModA$ y $B = A[M]$ la correspondiente extensión por un punto. Entonces $HH^0(B) = K$, $HH^1(B) \cong \dfrac{Hom_A(M,M)}{K}$ y $HH^i(B) \cong Ext^{i-1}_A(M,M)$ para $i > 1$.*

Demostración. De las hipótesis $HH^i(A) = 0$ para $i > 0$ y la existencia de la sucesión (9) obtenemos directamente $HH^i(B) \cong Ext^{i-1}_A(M,M)$ para $i > 1$. Como la aplicación

$$0 \to HH^0(B) \xrightarrow{f} HH^0(A) = K$$

es inyectiva, entonces $HH^0(B) \cong Imgf = K$ (por ser K simple). Analicemos ahora la aplicación h:

$$HH\ nolimits^0(A) = K \xrightarrow{g} \frac{Hom_A(M,M)}{K} \xrightarrow{h} HH^1(B) \to 0.$$

Del análisis anterior y como la sucesión (9) es exacta podemos inferir que $g \equiv 0$, de donde $Kerh = 0$, y al ser sobreyectiva constituye un isomorfismo, por tanto, $HH^1(B) \cong \dfrac{Hom_A(M,M)}{K}$. ■

Ejemplo 21 *Consideremos el álgebra $B = \dfrac{KQ}{I}$ donde Q es el carcaj*

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "\gamma"] & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & 5 \\
 & & 4 \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

e $I = \langle \gamma\beta - \varepsilon\delta, \beta\alpha \rangle$. Podemos observar que $S(1) = I(1)$, luego $B = A[M]$, donde $A = \dfrac{B}{\langle e_1 \rangle}$ y $M = P(1)$.

$A \cong \dfrac{KQ'}{I'}$ *donde Q':*

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dr, "\gamma"] & \\
2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & 5 \\
 & 4 \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

e $I' = \langle \gamma\beta - \varepsilon\delta \rangle$

$P(S(1)) = P(1) = Be_1:$
$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr, "0"] & \\
K \arrow[r, "1"] & K \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \\
 & & K \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

${}_BM = P(1):$
$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr, "0"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & K \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \\
 & & K \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

$\cong {}_AM:$
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr, "0"] & \\
K \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \\
 & K \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Demos una lista de los $A-$módulos proyectivos indescomponibles y sus radicales:

$P(2):$
$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dr, "1"] & \\
K \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & K \\
 & K \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

$radP(2):$
$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dr, "1"] & \\
0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\
 & K \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

$$P(3): \quad \begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "1"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$radP(3)(=S(5)): \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$P(4): \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & K \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}$$

$$radP(4)(=S(5)): \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$P(5): \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd} \qquad radP(5) = 0$$

Como todos los radicales de proyectivos son indescomponibles o cero, entonces A satisface la S-condición. Veamos que además es de representación dirigida y para ellos analicemos su carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A)$:

$$\begin{tikzcd} & P(3) \arrow[dr] & & S(4) \arrow[dr] & \\ S(5) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \dfrac{P(3)\oplus P(4)}{S(5)} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & P(2) \arrow[r] & \dfrac{I(5)}{S(5)} \\ & P(4) \arrow[ur] & & S(3) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & I(3) \arrow[dr] & \\ \dfrac{I(5)}{S(5)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & S(2) \\ & I(4) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Como no hay ciclos, entonces A es de representación dirigida. Utilizando las proposiciones (18) *y* (19)*, tenemos que $HH^i(A) = 0$ para todo $i \geqslant 1$.*

A es de representación dirigida y $M \in ModA$ indescomponible, entonces $Hom_A(M,M) = K$ y $Ext^i_A(M,M) = 0$ para $i \geqslant 1$. Sustituyendo toda esta información en la sucesión (9)*, obtenemos $HH^0(B) \cong HH^0(A)$ y $HH^i(B) = 0$ para $i \geqslant 1$. Se puede comprobar que $HH^0(A) = Z(A) = K$, luego $HH^0(B) = K$ y queda completamente calculada la cohomología de Hochschild del álgebra B.*

6. Cohomología de Hochschild del álgebra de matrices triangulares

Consideremos el álgebra triangular $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$. Como objetivo fundamental, nos proponemos generalizar la sucesión obtenida en la sección (5) para relacionar las cohomologías de Hochschild de las $K-$ álgebras A y R con la de toda el álgebra B.

Teorema 22 *Sea $B = \begin{pmatrix} A & {}_AM_R \\ 0 & R \end{pmatrix}$. Entonces existe una sucesión exacta larga de $K-$espacios vectoriales que conecta a las cohomologías de Hochschild de A, R y B dada por:*

$$\begin{aligned} 0 \to HH^0(B) \to HH^0(A) \oplus HH^0(R) \to \\ Hom_{A\otimes_K R^{op}}(M,M) \to HH^1(B) \\ \to HH^1(A) \oplus HH^1(R) \to Ext^1_{A\otimes_K R^{op}}(M,M) \\ \to \cdots \to HH^i(B) \to HH^i(A) \oplus HH^i(R) \\ \to Ext^i_{A\otimes_K R^{op}}(M,M) \to \cdots \end{aligned} \tag{10}$$

Demostración. Sea la sucesión exacta corta de B^e- módulos

$$0 \to M \to B \to A \oplus R \to 0$$

Aplicando $Hom_{B^e}(B, \_\_)$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_{B^e}(B,M) \to HH^0(B) \to Hom_{B^e}(B, A\oplus R) \\ \to Ext^1_{B^e}(B,M) \to HH^1(B) \to Ext^1_{B^e}(B, A\oplus R) \\ \to \cdots \to HH^i(B) \to Ext^i_{B^e}(B, A\oplus R) \\ \to Ext^{i+1}_{B^e}(B,M) \to \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

El resto pasa por tres puntos:

El resto pasa por tres puntos:

- ${}_{B^e}(B,M) = 0$
- ${}_{B^e}(B,M) \cong_{B\otimes_K R^{op}} (R,M) \cong^i_{B^e} (R,M) \cong$

${}^{i-1}_{B^e}(M,M) \cong^{i-1}_{A\otimes_K R^{op}} (M,M)$ para $i \geqslant 1$

- ${}^i_{B^e}(B, A\oplus R) \cong^i_{B^e} (B,A) \oplus^i_{B^e} (B,R) \cong^i_{B^e} (A,A) \oplus^i_{B^e} (R,R) \cong^i_{A^e}$ $(A,A) \oplus^i_{R^e} (R,R) \cong^i (A) \oplus^i (R)$

de los cuales podemos encontrar demostración en [5], [7] y [16]. ■

Una consecuencia clara del teorema anterior, es que si $M = 0$, entonces

$$HH^*(B) \cong HH^*(A) \oplus HH^*(R)$$

Más aun, si M es un $A \otimes_K R^{op}-$módulo proyectivo, se tiene

$$HH^i(B) \cong HH^i(A) \oplus HH^i(R)$$

para todo $i \geqslant 2$.

Otro caso particular que queremos destacar por su minimalidad en diversas teorías es el de las álgebras $T_2(A) = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. En [4] se llega al siguiente resultado.

Proposición 23

$$HH^* \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \cong HH^*(A)$$

Referencias

[1] Assem I., Simson D., Skowronski A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* Vol. 1: Techniques of Representation Theory, 2006. London Mathematical Society. Students Texts 65.

[2] Auslander M., Reiten I., Smal∅ S., *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics 36, Cambridge University Press, New York, 1995.

[3] Belmans P., *Advanced topics in algebra (V5A5). Hochschild (co)homology, and the HochschildKostantRosenberg decomposition*. Lecture notes, University of Bonn, Versión del 9 de julio de 2018.

[4] Bendiffalah B., Guin D., *Cohomologie des morphismes*. Communications in ALgebra, 26:12, p. 3939-3951, 1998.

[5] Cartan H., Eilenberg S., *Homological Algebra*. Princeton University Press, New Jersey, 1956.

[6] Cibils C., Larrión F., Salmerón L., *Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones*. Monografías del Instituto de Matemáticas 11, 1982. Universidad Nacional Autónoma de México.

[7] Cibils C., *Tensor Hochschild homology and cohomology*, Proceedings: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 210, Dekker, New York, 2000.

[8] Cibils C., María Julia Redondo and Andrea Solotar, *Han's conjecture and Hochschild homology for null-square projective algebras*, arXiv:1703.02131v1 [math.RT], 6 Mar 2017.

[9] Dourlens S., *On the Hochschild Cohomology of Triangular Algebras*, Communications in Algebra, Vol. 31, No. 10, p. 48714897, 2003.

[10] Gerstenhaber M., *The Cohomology Structure of an Associative Ring*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 78, No. 2, p. 267-288, 1963.

[11] Green E. L., Snashall N., and Solberg ∅, *The Hochschild cohomology ring of a selfinjective algebra of finite representation type*, Proceedings: American Mathematical Society 131, 2003.

[12] Green E. L., Marcos E. and Snashall N.,*The Hochschild Cohomology Ring of a One Point Extension*, Communications in Algebra, Vol. 31, No. 1, p. 357-379, 2003.

[13] Happel D., *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988), Lecture Notes in Math., vol. 1404, Springer, p. 108-126, 1989.

[14] Lluis-Puebla E., *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[15] Montero B., *Descripción de la categoría de los módulos prinyectivos sobre el álgebra de matices triangulares*, Tesis de Licenciatura, Universidad de La Habana, 2016.

[16] Michelena S. and Platzeck M. I., *Hochschild Cohomology of Triangular Matrix Algebras*, Journal of Algebra 233, p. 502-525, 2000.

[17] Redondo M. J., *Hochschild cohomology: some methods for computations*, Resenhas do Instituto de Matemática e Estadística da Universidade de São Paulo, vol. 5, No. 2, 2001.

[18] Weibel C. A., *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.

[19] Witherspoon S., *An Introduction to Hochschild Cohomology*. A publicar. Versión del 19 de diciembre de 2018. URL: http://www.math.tamu.edu/ sarah.witherspoon/bib.html.