APLICACIÓN DE LAS FRACCIONES CONTINUAS GENERALIZADAS Y LA CONEXIÓN CON LOS POLINOMIOS ORTOGONALES GENERALES EN ECUACIONES DE TIPO TODA

Andrés Gago Alonso[1], Luís Santiago Moreno[2], Luís Ramiro Piñeiro[3]
[1]CENATAV, [2]Universidad de Toronto, [3]Universidad de la Habana

RESUMEN
Estudiamos sistemas dinámicos no lineales finitos que generalizan en cierta forma los estudiados por J. Coussement, A. B. J. Kuijlaars y W. Van Assche en [7]. Nuestros sistemas dinámicos tienen representación matricial similar a las analizadas en el artículo mencionado. Esta vez consideramos $D(x)$ una familia uniparamétrica de matrices de Hessenberg, y $M(x)$ triangular inferior con elementos no nulos en la diagonal.

Las matrices de Hessenberg $M^{-1}(x)D(x)$, $D(x)M^{-1}(x)$ son utilizadas para probar la integrabilidad del sistema. Usando la conexión con los polinomios ortogonales generales [16], consideramos vectores de polinomios y formas sesquilineales $\{\cdot,\cdot\}_x$, asociadas mediante relaciones de ortogonalidad. Los valores propios generalizados son constantes y las formas sesquilineales $\{\cdot,\cdot\}_x$ tienen representación explícita en términos de $\{\cdot,\cdot\}_0$ (Condiciones iniciales). Finalmente, proponemos un desarrollo en fracción continua que generaliza el estudiado en [16], y es el análogo en el contexto de las T-fracciones para series de Laurent, como en [7].

ABSTRACT
We study finite nonlinear dynamical systems that somehow generalize those studied by J. Coussement, A.B.J. Kuijlaars and W. Van Assche in [7]. Our dynamical systems have a matrix representation very similar to the ones that were previously analyzed in [7]. In our case $D(x)$ is considered a uniparametrical family of $n\times n$ Hessenberg matrices, and $M(x)$ a lower triangular $n\times n$ matrix with nonzero elements on the diagonal.

The Hessenberg matrices $M^{-1}(x)D(x)$ and $D(x)M^{-1}(x)$ are used to prove the integrity of the system. Using the connection with general orthogonal polynomials, we consider vectors of polynomials and the sesquilinear forms $\{\cdot,\cdot\}_x$, associated by orthogonality relationships. The generalized eigenvalues are constant and the sesquilinear forms $\{\cdot,\cdot\}_x$ have explicit representation in terms of $\{\cdot,\cdot\}_0$. Finally, we obtain a development as a continued fraction that generalizes those studied in [16], in an analogous way as it was done for Laurent series in [7].

1. INTRODUCCIÓN

Formas generalizadas para las ecuaciones de Toda relativistas fueron consideradas por J. Coussement, A. B. J. Kuijlaars y W. Van Assche [7]

$$\begin{aligned} L'(t) &= f(L(t)M(t)^{-1})_{-} L(t) - L(t)\ f(M(t)^{-1}L(t))_{-} \\ M'(t) &= f(L(t)M(t)^{-1})_{-} M(t) - M(t)\ f(M(t)^{-1}L(t))_{-} \end{aligned} \qquad (1)$$

donde $f: R^{+} \to R$ es una función arbitraria en R^{+}, y las dos matrices bidiagonales $L(t)$ y $M(t)$ están definidas a partir de las incógnitas $a_n(t)$ y $b_n(t)$ por

Email: [3]lrp@matcom.uh.cu

$$L(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} a_1(t) & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(t) & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & a_3(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{N-1}(t) & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_N(t) \end{pmatrix},$$

$$M(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -b_1(t) & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & -b_2(t) & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -b_{N-1}(t) & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

siendo $a_n(t) > 0$ para $1 \le n \le N$, $b_n(t) > 0$ para $1 \le n \le N-1$, y $b_0 \equiv 0, b_N \equiv 0$.

El sistema (1) es una generalización de las ecuaciones de Toda relativistas (RTL), introducidas por Ruijsenaars [15] e investigadas en [5,4]. Los casos particulares obtenidos de (1) mediante los cambios de variables $f(x) = x$ ó $f(x) = 1/x$, constituyen representaciones en forma de Lax para las ecuaciones de Ruijsenaars-Toda. El caso finito de las RTL es definido por el sistema de ecuaciones

$$q''_n(t) = \varepsilon q'_n(t)\left(q'_{n-1}(t)\frac{exp(q_{n-1}(t)-q_n(t))}{1+\varepsilon^2 exp(q_{n-1}(t)-q_n(t))} - q'_{n+1}(t)\frac{exp(q_n(t)-q_{n+1}(t))}{1+\varepsilon^2 exp(q_n(t)-q_{n+1}(t))}\right), \tag{3}$$

con $N \in N, 1 \le n \le N$ y por convenio $q_0 \equiv -\infty$ y $q_{N+1} \equiv -\infty$. Este sistema escrito de forma Newtoniana, haciendo $q'_n(t) = x'_n(t) + 1/\varepsilon$ y $\varepsilon \to 0$ obtenemos las ecuaciones de Toda no-relativistas (NRTL) en el caso finito

$$x''_n(t) = exp(x_{n-1}(t) - x_n(t)) - exp(x_n(t) - x_{n-1}(t)), \quad 1 \le n \le N \tag{4}$$

estudiadas por J. Moser y generalizadas en posteriores estudios [2, 3,16].

En el epígrafe 3 mostramos que las ecuaciones (1) estudiadas en [7] son casos particulares de la siguiente forma generalizada de las ecuaciones de Toda relativistas

$$\begin{aligned} D'(x) &= f(D(x)M(x)^{-1})_- D(x) - D(x)\ f(M(x)^{-1}D(x))_- \\ M'(x) &= f(D(x)M(x)^{-1})_- M(x) - M(x)\ f(M(x)^{-1}D(x))_- \end{aligned} \tag{5}$$

donde f es cierta función arbitraria, $D(x)$ es una matriz de Hessenberg, y $M(x)$ triangular inferior con los elementos de la diagonal no nulos, ambas de $N \times N$ y definidas a partir de las funciones incógnitas $d_{i,j}(x)$ y $m_{i,j}(x)$

$$D(x) = \begin{pmatrix} d_{0,0}(x) & d_{0,1}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ d_{1,0}(x) & d_{1,1}(x) & d_{1,2}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & d_{N-2,N-1}(x) \\ d_{N-1,0}(x) & d_{N-1,1}(x) & \cdots & & d_{N-1,N-1}(x) \end{pmatrix},$$

$$M(x)=\begin{pmatrix} m_{0,0}(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{1,0}(x) & m_{1,1}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{N-1,0}(x) & m_{N-1,1}(x) & \cdots & & m_{N-1,N-1}(x) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

El principal objetivo de este trabajo es resolver las ecuaciones de Toda relativistas en la forma general (5) con ayuda de una transformación espectral directa e inversa, de manera análoga a la realizada para el caso relativista en [16] y al caso no-relativista en [7]. Mientras la transformación espectral para las ecuaciones estudiadas en [7] utiliza la teoría espectral de pares de matrices bidiagonales y los polinomios ortogonales de Laurent, en nuestro caso la transformación espectral está basada en las propiedades espectrales de las matrices de Hessenberg y los polinomios ortogonales generales estudiados por L. Santiago y L. Robert en [14, 16, 17]. En la figura 1 se muestra el esquema general para la integración del problema de Cauchy a partir de los problemas espectrales directo e inverso.

Condiciones iniciales, x =	$\longrightarrow$	Soluciones en x
$\downarrow$		$\uparrow$
Problema espectral direct		Problema espectral inv
$\downarrow$		$\uparrow$
Datos espectrales para x =	$\rightarrow$ Evolución	Datos espectrales el

FIGURA 1. ESQUEMA GENERAL

Transformaciones de este estilo fueron discutidas por O. Ragnisco y M. Brushi en [6] para el caso de las RTL periódicas, por J. Coussement, A. B. J. Kuijlaars y W. Van Assche en [7] para cierta forma generalizada del caso relativista y por L. Santiago en [16] para el no-relativista.

2. PROBLEMAS ESPECTRALES: DIRECTO E INVERSO

Sean $D=(d_{i,j})$ una matriz de Hessenberg y $M=(m_{i,j})$ triangular inferior con elementos no nulos en la diagonal. Dado que M es inversible, los problemas generalizados de valores propios no-simétrico del par de matrices (D,M) por la izquierda $D\vec{v}=\lambda M\vec{v}$ y por la derecha $\vec{u}^tD=\lambda\vec{u}^tM$, coincide con los problemas de valores propios de las matrices de Hessenberg $D_1=M^{-1}D$ y $D_2=DM^{-1}$ respectivamente. Los ceros del polinomio característico $p_N(z)=det(zM-D)$ coinciden con las ceros de los polinomios característicos de las matrices de Hessenberg D_1 y D_2, en efecto

$$det(z-M^{-1}D)=det(z-DM^{-1})=\frac{det(zM-D)}{det(M)}.$$

Denotemos $S(D,M)=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})$ el espectro generalizado de los operadores asociados a las matrices D y M, el cual coincide con $S(D_1)$ y $S(D_2)$. Esto nos permitirá utilizar los resultados obtenidos sobre propiedades espectrales para matrices de Hessenberg, demostrados en [8, 16, 14, 17] para estudio de las propiedades espectrales del par de matrices (D,M) .

2.1. MATRICES DE HESSENBERG FINITAS

Para toda matriz de Hessenberg D se puede definir de manera biunívoca un vector de polinomios en $C[z]$, $\{p_0(z),p_1(z),\ldots,p_N(z)\},i=1,2$ tales que $p_0(z)=1$, $p_N(z)$ mónico, $gradp_n(z)=n$ para

$n = 0,1,\ldots,N$ y

$$D\hat{\mathbf{p}}_N(z) = z\hat{\mathbf{p}}_N(z) - (D)_{N-1,N}\, p_N(z)\mathbf{e_N} \tag{7}$$

donde $\hat{\mathbf{p}}_N = (p_0(z), p_1(z), \ldots, p_{N-1}(z))^t$ y $\mathbf{e_N} = (0,\ldots,0,1)^t$.

El siguiente operador fue definido en [16] y nos permitirá caracterizar la descomposición de Jordán de D.

DEFINICIÓN 2.1. Para un polinomio $p(z) = \prod_{i=0}^{r} (z-\alpha_i)^{\beta_i}$ con $\sum_{i=0}^{r} \beta_i = N$ definiremos el operador $R(p,\cdot)$ de las funciones infinitamente derivables en C^n mediante

$$R(p,q) = \left(q(\alpha_0), \frac{q^{(1)}(\alpha_0)}{1!}, \ldots, \frac{q^{(\beta_0-1)}(\alpha_0)}{(\beta_0-1)!}, \ldots, q(\alpha_r), \ldots \frac{q^{(\beta_r-1)}(\alpha_r)}{(\beta_r-1)!} \right).$$

Dicho operador también lo definiremos en los vectores de funciones infinitamente derivables con N componentes, aplicándolo a cada componente, el resultado será una matriz de $N \times N$.

La siguiente proposición demostrada en [16] nos brinda una caracterización de la descomposición de Jordán de una matriz de Hessenberg finita.

PROPOSICIÓN 2.1. Sea $p_N(z) = k_N \prod_{i=0}^{r} (z-\alpha_i)^{\beta_i}$ con $\sum_{i=0}^{r} \beta_i = N$, $Q_N = R(p_N, \hat{\mathbf{p}}_N)$ y

$$J = diag(A_0, A_1 \ldots, A_r)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_i & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

entonces se cumple que

$$D = Q_N J Q_N^{-1}$$

COROLARIO 2.1.

$$det(zI - D) = \left(\prod_{i=0}^{N-1} d_{i,i+1} \right) p_N(z)$$

2.2. PROBLEMA ESPECTRAL DIRECTO

Para resolver el problema de Cauchy (5) por el esquema descrito en la figura 1, se empieza a partir de las condiciones iniciales $D(0) = (d_{i,j}(0))$ y $M(0) = (m_{i,j}(0))$.

En nuestro caso el problema directo consiste en obtener a partir de las matrices de Hessenberg D_1 y D_2 involucradas en las condiciones iniciales, ciertas formas sesquilineales en la manera descrita en [8, 16, 14, 17] y que resumimos a continuación.

Se conoce que dada dos matrices de Hessenberg D_1 y D_2 se pueden definir de manera biunívoca dos vectores de polinomios en $C[z]$, $\{p_{i,0}(z), p_{i,1}(z), \ldots, p_{i,N}(z)\}, i = 1,2$ como en (7).

En este caso la forma sesquilineal regular o fórmula de cuadratura[1] N-ésima

$$\{p(z), q(z)\} = \left(p(D_1), \overline{q(D_2)^t} \right)_{0,0} \tag{8}$$

[1]Según L. Santiago en [16]

definida para $p(z)$ y $q(z)$ en $C_N[z]$, es la única que satisface las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\{p_{1,n}(z), p_{2,m}(z)\} = \delta_{n,m}, \quad 0 \le n,m < N \tag{9}$$

para los polinomios indicados.

NOTA 2.1. El problema directo para dos matrices de Hessenberg D_1 y D_2 consiste en computar los momentos de la forma sesquilineal $\mu_{n,m} = \{z^n, z^m\}$ para $0 \le n,m < N$ a partir de D_1, D_2 y de la fórmula (8).

2.3. PROBLEMA ESPECTRAL INVERSO

NOTA 2.2. El problema inverso para una forma sesquilineal $\{\cdot,\cdot\}$ consiste en encontrar las matrices de Hessenberg D_1 y D_2 asociadas según (7), a los únicos polinomios que satisfacen (9).

Una vez conocidos los momentos $\mu_{n,m} = \{z^n, z^m\}$ de la forma sesquilineal, se pueden encontrar los polinomios que satisfacen (9) por el algoritmo de *Gram-Schmidt*. Luego, a partir de la siguiente relación

$$zp_{i,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} (D_i)_{n,j}\, p_j(z), \quad 0 \le n < N-1$$

es posible determinar las entradas de las matrices D_1 y D_2.

En caso que las matrices de Hessenberg D_1 y D_2 sean conocidas y estén definidas de la siguiente manera, $D_1 = M^{-1}D$, $D_2 = DM^{-1}$ a partir de las matrices D y M, será posible determinar M utilizando el siguiente lema.

LEMA 2.1. Sean $D_1 = M^{-1}D$, $D_2 = DM^{-1}$, $\hat{\mathbf{p}}_i(z) = \hat{\mathbf{p}}_{i,N}(z) = (p_{i,0}(z), \ldots, p_{i,N-1}(z))^t$, el vector de polinomios asociado a la matriz $D_i, i = 1,2$ por medio de la relación (7). Entonces, $\hat{\mathbf{p}}_2(z) = \frac{1}{m_{0,0}} M \hat{\mathbf{p}}_1(z)$.

DEMOSTRACIÓN.
Se procede como en (7)

$$M^{-1}D\hat{\mathbf{p}}_1(z) = z\hat{\mathbf{p}}_1(z) - d_{1,N-1,N}\, p_{1,N}(z) e_{N-1},$$
$$DM^{-1}\hat{\mathbf{p}}_2(z) = z\hat{\mathbf{p}}_2(z) - d_{2,N-1,N}\, p_{2,N}(z) e_{N-1}.$$

Multiplicando la segunda ecuación por M^{-1}, aplicando el corolario 1, restando las ecuaciones, realizando algunas operaciones algebraicas, obtenemos $m_{0,0} M^{-1} \hat{\mathbf{p}}_2(z) = \hat{\mathbf{p}}_1$. Por tanto $\hat{\mathbf{p}}_2(z) = \frac{1}{m_{0,0}} M \hat{\mathbf{p}}_1(z)$.

3. FORMA GENERALIZADA DE LAS ECUACIONES DE TODA RELATIVISTAS Y EVOLUCIÓN DE LOS DATOS ESPECTRALES

En este epígrafe se define la estructura de sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo Toda como en (5) considerando una forma matricial basada en matrices de Hessenberg.

PROPOSICIÓN 3.1. Supongamos que las matrices de $D(x)$ y $M(x)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dD(x)}{dx} = D(x)A(x) - B(x)D(x)$$

(10)

$$\frac{dM(x)}{dx} = M(x)A(x) - B(x)M(x)$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son matrices triangulares inferiores, entonces el espectro $S(L(x), M(x))$, no dependen de x.

DEMOSTRACIÓN.

Sean las matrices $L_1(x)$ y $L_2(x)$ las soluciones únicas de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\frac{dL_1(x)}{dx} = L_1(x)B(x) \qquad L_1(0) = I$$

(11)

$$\frac{dL_2(x)}{dx} = -A(x)L_2(x) \qquad L_2(0) = I$$

puede verificarse sin problemas que estas matrices son triangulares inferiores con los elementos de la diagonal no nulos y por tanto son inversibles.

Aplicando reglas de derivación tenemos

$$\frac{d}{dx}(L_1(x)D(x)L_2(x)) = L_1(x)D(x)L_2(x) + L_1(x)D'(x)L_2(x) + L_1(x)D(x)L_2(x)$$

luego por (10) y (11)

$$\frac{d}{dx}(L_1DL_2) = L_1BDL_2 + L_1(DA - BD)L_2 - L_1DAL_2 = 0$$

de manera análoga $\frac{d}{dx}(L_1(x)M(x)L_2(x)) = 0$, lo que significa

$$L_1(x)D(x)L_2(x) = L_1(0)D(0)L_2(0) = D(0)$$

$$L_1(x)M(x)L_2(x) = L_1(0)M(0)L_2(0) = M(0)$$

de aquí $L_1(x)(zM(x) - D(x))L_2(x) = zM(0) - D(0)$ y como $det(L_1(x)) \neq 0$ y $det(L_2(x)) \neq 0$, llegamos finalmente a que $det(zM(x) - D(x))$ y $det(zM(0) - D(0))$, se anulan para los mismos valores de z, lo cual prueba la proposición. $\square$

Utilizando este hecho y las propiedades de las matrices de Hessenberg discutidas en el epígrafe 2.1, se obtiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.2. Sean $A(x)$ y $B(x)$ matrices triangulares inferiores de $N \times N$, $D(x)$ una familia uniparamétrica de matrices de Hessenberg de $N \times N$ y $M(x)$ una matriz triangular inferior de $N \times N$ con elementos no nulos en la diagonal. Supongamos que todas estas matrices satisfacen (10). Entonces, las matrices de Hessenberg $D_1(x) = M^{-1}(x)D(x)$ y $D_2(x) = D(x)M^{-1}(x)$ tienen la misma forma de Jordán y esta no depende de x.

LEMA 3.1. Sean $A(x)$ y $B(x)$ matrices triangulares inferiores de $N \times N$ tales que $(A(x))_{0,0} = (B(x))_{0,0} = 0$, $D(x)$ una familia uniparamétrica de matrices de Hessenberg de $N \times N$ y

$M(x)$ una matriz triangular inferior de $N\times N$ con elementos no nulos en la diagonal tal que $m_{0,0}(x)=m_{0,0}\neq 0$ no depende de x. Tomemos las siguientes matrices de Hessenberg $D_1(x)=M^{-1}(x)D(x)$ y $D_2(x)=D(x)M^{-1}(x)$ como en la proposición (3.2). Denotemos por $\hat{\mathbf{p}}_i(z,x)=\hat{\mathbf{p}}_{i,N}(z,x)=(p_{i,0}(z,x),\ldots,p_{i,N-1}(z,x))^t$ el vector de polinomios asociado a la matriz $D_i(x), i=1,2$ mediante la relación

$$D_i(x)\hat{\mathbf{p}}_i(z,x)=z\hat{\mathbf{p}}_i(z,x)-d_{i,N}\,p_{i,N}(z,x)e_{N-1}$$

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

(i)

$$\frac{dD(x)}{dx}=D(x)A(x)-B(x)D(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx}=M(x)A(x)-B(x)M(x)$$

(ii)

$$\frac{dD_1(x)}{dx}=[D_1(x),A(x)]$$

$$\frac{dD_2(x)}{dx}=[D_2(x),B(x)]$$

(iii)

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}_1(z,x)}{dx}=A(x)\hat{\mathbf{p}}_1(z,x)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}_2(z,x)}{dx}=B(x)\hat{\mathbf{p}}_2(z,x)$$

DEMOSTRACIÓN.

La equivalencia entre (ii) y (iii) es consecuencia directa de [16, Lema 7.3].
Dado las siguientes expresiones de las derivadas que tienen lugar

$$(M^{-1}(x)D(x))'=-M^{-1}(x)M'(x)M^{-1}(x)D(x)+M^{-1}(x)D'(x) \tag{12}$$

$$(D(x)M^{-1}(x))'=-D(x)M^{-1}(x)M'(x)M^{-1}(x)+D'(x)M^{-1}(x) \tag{13}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) es fácil, sólo hay que combinar (i) con (12) y (13).

Demostremos que (ii) $\Longrightarrow$ (i). De (ii), (12) y (13) se llega fácilmente a

$$\frac{dD(x)}{dx}-D(x)A(x)+B(x)D(x)=(\frac{dM(x)}{dx}-M(x)A(x)+B(x)M(x))M^{-1}(x)D(x)$$

$$\frac{dD(x)}{dx}-D(x)A(x)+B(x)D(x)=D(x)M^{-1}(x)(\frac{dM(x)}{dx}-M(x)A(x)+B(x)M(x))$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $E_L(x)=\frac{dD(x)}{dx}-D(x)A(x)+B(x)D(x)$ y $E_M(x)=\frac{dM(x)}{dx}-M(x)A(x)+B(x)M(x)$ obtenemos

$$E_L(x) = E_M(x)D_1(x)$$
$$E_L(x) = D_2(x)E_M(x)$$

Combinando estas igualdades

$$D_2(x)E_M(x) = E_M(x)D_1(x) \tag{14}$$

Trabajando como en la proposición 3.2, sea la descomposición de Jordán de $D_1(x) = Q_1(x)JQ_1^{-1}(x)$ sustituyendo en (14)

$$D_2(x)(E_M(x)Q_1(x)) = (E_M(x)Q_1(x))J \tag{15}$$

Aplicando [16, corolario 4.4] obtenemos que $E_M(x)Q_1(x) = Q_2(x)H(x)$. Como $m'_{0,0}(x) = 0$ y $(A(x))_{0,0} = (B(x))_{0,0} = 0$ entonces la primera fila de $\frac{dM(x)}{dx}$ es cero, al igual que en $M(x)A(x)$ y $B(x)M(x)$, por tanto la primera fila de $E_M(x)$ es cero. Ahora por la propia forma que tiene $H(x)$ según [16, corolario 4.4], se llega a que $H(x) = 0$, $E_M(x) = 0$ y $E_L(x) = 0$, como se quería. □

TEOREMA 3.1. Sea $f_i(z,x) = \sum_{k=1}^{N-1} a_{k,i}(x)z^k$ donde las $a_k(x)$ son funciones continuas en R, $D_i(x)$ dos familias uniparamétricas de matrices de Hessenberg de $N \times N$, $M_i(x)$ matrices triangulares inferiores de $N \times N$ con elementos no nulos en la diagonal tal que $m_{i,0,0}(x) = m_{i,0,0} \neq 0$ no depende de x y $\{\cdot,\cdot\}_x^{(i)}$ las familias de formas sesquilineales definidas mediante

$$\begin{aligned} \{\alpha(z),\beta(z)\}_x^{(1)} &= (\alpha(M_1^{-1}(x)D_1(x))\overline{\beta(M_2^{-1}(x)D_2(x))}^t)_{0,0} \\ \{\alpha(z),\beta(z)\}_x^{(2)} &= (\alpha(D_1(x)M_1^{-1}(x))\overline{\beta(D_2(x)M_2^{-1}(x))}^t)_{0,0} \end{aligned} \tag{16}$$

donde $\alpha(z),\beta(z) \in C[z]$, $i = 1,2$ entonces son equivalentes

(i)

$$\begin{aligned} \frac{dD_i(x)}{dx} &= D_i(x)F_i(x) - G_i(x)D_i(x) \\ \frac{dM_i(x)}{dx} &= M_i(x)F_i(x) - G_i(x)M_i(x) \end{aligned} \tag{17}$$

$$i = 1,2$$

donde

$$\begin{aligned} F_i(x) &= A_i(x) + f_i(M_i^{-1}(x)D_i(x),x) - (f_i(M_i^{-1}(x)D_i(x),x))_{0,0}I_N \\ \overline{F_1(x)}^t &= -F_2(x) \\ G_i(x) &= B_i(x) + f_i(D_i(x)M_i^{-1}(x),x) - (f_i(D_i(x)M_i^{-1}(x),x))_{0,0}I_N \\ \overline{G_1(x)}^t &= -G_2(x) \end{aligned}$$

y $A_i(x)$ y $B_i(x)$ matrices triangulares inferiores de $N\times N$ tales que $(A_i(x))_{0,0}=(B_i(x))_{0,0}=0$.

(ii)

$$\{\cdot,\cdot\}_x^{(1)}=\frac{\{\cdot e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},\cdot e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(1)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(1)}}$$

$$\{\cdot,\cdot\}_x^{(2)}=\frac{\{\cdot e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},\cdot e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(2)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(2)}} \tag{18}$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $D_{i,1}(x)=M_i^{-1}(x)D_i(x)$ y $D_{i,2}(x)=D_i(x)M_i^{-1}(x)$ y consideremos los polinomios $\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x)$ asociados a la matriz $D_{i,j}(x)$ mediante la relación

$$D_{i,j}(x)\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x)=z\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x)-d_{i,j,N}\,p_{i,j,N}(z,x)e_{N-1}\,. \tag{19}$$

Denotemos $m_{i,k}^{(j)}(x)=\{z^i,z^k\}_x^{(j)}$ los momentos de la forma sesquilineal.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

De (ii) se tiene que

$$\frac{\{\hat{\mathbf{p}}_{1,j}(z,x)e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},\hat{\mathbf{p}}_{2,j}(z,x)e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}=I_N$$

derivando esta igualdad

$$\frac{\frac{d}{dx}\{\hat{\mathbf{p}}_{1,j}(z,x)e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},\hat{\mathbf{p}}_{2,j}(z,x)e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}=\frac{\frac{d}{dx}\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}I_N \tag{20}$$

pero

$$\frac{\frac{d}{dx}\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}=$$

$$=\frac{\{f_1(z,x)e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}+\frac{\{f_2(z,x)e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}$$

$$=\{f_1(z,x),1\}_x^{(j)}+\{1,f_2(z,x)\}_x^{(j)}=\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k,1}(x)m_{k,0}^{(j)}(x)+a_{k,2}(x)m_{0,k}^{(j)}(x))$$

Sean $A_i(x)$ y $B_i(x)$ de forma tal que

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}_{i,1}(z,x)}{dx}=A_i(x)\hat{\mathbf{p}}_{i,1}(z,x)\quad,\quad\frac{d\hat{\mathbf{p}}_{i,2}(z,x)}{dx}=B_i(x)\hat{\mathbf{p}}_{i,2}(z,x) \tag{21}$$

(de aquí que $(A_i(x))_{0,0} = (B_i(x))_{0,0} = 0$) y utilizando que

$$f_i(z,x)\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x) = f_i(D_{i,j}(x),x)\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x) + p_{i,j,N}(z,x)\hat{\mathbf{v}}_{i,j}(z,x)$$

donde $\hat{\mathbf{v}}_{i,j}(z,x)$ es un vector de polinomios en z, obtenemos que

$$\frac{\{(\frac{d\hat{\mathbf{p}}_{1,1}(z,x)}{dx} + f_1(z,x)\hat{\mathbf{p}}_{1,1}(z,x))e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, \hat{\mathbf{p}}_{2,1}(z,x)e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(1)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(1)}}$$

$$= A_1(x) + f_1(D_{1,1}(x),x)$$

$$\frac{\{\hat{\mathbf{p}}_{1,1}(z,x)e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, (\frac{d\hat{\mathbf{p}}_{2,1}(z,x)}{dx} + f_2(z,x)\hat{\mathbf{p}}_{2,1}(z,x))e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(1)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(1)}}$$

$$= \overline{A_2(x)}^t + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)}^t$$

Sumamos las dos últimas igualdades y sustituyendo (20) nos queda

$$A_1(x) + \overline{A_2(x)}^t + f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)}^t = \sum_{k=1}^{N-1}(a_{k,1}(x)m_{k,0}^{(j)}(x) + a_{k,2}(x)m_{0,k}^{(j)}(x))I_N .$$

Como $m_{k,0}^{(1)} = \{z^k,1\}_x^{(1)} = ((D_{1,1}(x))^k)_{0,0}$ y $m_{0,k}^{(1)} = \{1,z^k\}_x^{(1)} = (\overline{(D_{2,1}(x))^k}^t)_{0,0}$ la igualdad anterior se transforma en

$$A_1(x) + \overline{A_2(x)}^t + f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)}^t = (f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)^t})_{0,0} I_N$$

Con esto llegamos a que $\overline{F_1(x)}^t = -F_2(x)$. Análogamente con $\{\cdot,\cdot\}^{(2)}$ obtenemos $\overline{G_1(x)}^t = -G_2(x)$.
Finalmente empleando el lema 3.1, (21) y algunas transformaciones algebraicas obtenemos (i).
(i) $\Longrightarrow$ (ii). De (i) se deduce que

$$\frac{dD_i(x)}{dx} = D_i(x)A_i(x) - B_i(x)D_i(x)$$

$$\frac{dM_i(x)}{dx} = M_i(x)A_i(x) - B_i(x)M_i(x)$$

$$i = 1,2$$

que por el lema 3.1 es equivalente a

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}_{i,1}(z,x)}{dx} = A_i(x)\hat{\mathbf{p}}_{i,1}(z,x) \quad , \quad \frac{d\hat{\mathbf{p}}_{i,2}(z,x)}{dx} = B_i(x)\hat{\mathbf{p}}_{i,2}(z,x)$$

Por la forma en que fueron definidos los polinomios $\hat{\mathbf{p}}_{i,j}$, las matrices $D_{i,j}$ y el corolario 2.1 tenemos que el polinomio $p_{i,j,N}$ es una constante multiplicada por el polinomio $p_i(z,x) = det(zM_i(x) - D_i(x))$ para $j = 1,2$. Por tanto si tomamos las descomposiciones de Jordán para las matrices $D_{i,j}(x)=Q_{i,j}(x)J_iQ_{i,j}^{-1}(x)$ con $Q_{i,j}(x)=R(p_i(z,x),\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x))$ (como en la proposición 3.1), tenemos

$$\frac{dQ_{i,1}(x)}{dx}=A_i(x)Q_{i,1}(x) \quad , \quad \frac{dQ_{i,2}(x)}{dx}=B_i(x)Q_{i,2}(x)$$

$$\frac{d(Q_{i,1}(x))^{-1}}{dx}=-(Q_{i,1}(x))^{-1}A_i(x) \quad , \quad \frac{d(Q_{i,2}(x))^{-1}}{dx}=-(Q_{i,2}(x))^{-1}B_i(x)$$

Tomemos $\Upsilon_j(x)=(Q_{1,j}(x))^{-1}\overline{(Q_{2,j}(x))^{-1}}^t$ y por las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{d\Upsilon_1(x)}{dx}=-(Q_{1,1}(x))^{-1}(A_1(x)+\overline{A_2(x)}^t)\overline{(Q_{2,1}(x))^{-1}}^t$$

$$=(Q_{1,1}(x))^{-1}(f_1(D_{1,1}(x),x)-(f_1(D_{1,1}(x),x))_{0,0}I_N+$$

$$+\overline{(f_2(D_{2,1}(x),x)-(f_2(D_{2,1}(x),x))_{0,0}I_N)}^t)\overline{(Q_{2,1}(x))^{-1}}^t$$

usando las descomposiciones de Jordán y realizando algunas transformaciones algebraicas, llegamos a

$$\frac{d\Upsilon_1(x)}{dx}=(f_1(J_1,x)-(f_1(J_1,x))_{0,0}I_N)\Upsilon_1(x)+\Upsilon_1(x)\overline{(f_2(J_2,x)-(f_2(J_2,x))_{0,0}I_N)}^t$$

mediante un razonamiento similar se puede verificar que

$$\frac{d\Upsilon_2(x)}{dx}=(f_1(J_1,x)-(f_1(J_1,x))_{0,0}I_N)\Upsilon_2(x)+\Upsilon_2(x)\overline{(f_2(J_2,x)-(f_2(J_2,x))_{0,0}I_N)}^t$$

Se puede demostrar, que de esta última ecuación, obtenemos

$$\Upsilon_j(x)=g(x)e^{\int_0^x f_1(J_1,\xi)d\xi}\Upsilon_j(0)e^{\int_0^x \overline{f_2(J_2,\xi)}^t d\xi}$$

$$g(x)=e^{\int_0^x (f_1(J_1,\xi)-\overline{f_2(J_2,\xi)}^t)_{0,0}d\xi}$$

Por [16, Teorema 5.3]

$$\{\alpha(z,x),\beta(z,x)\}_x^{(j)}=R(p_1,\alpha)\Upsilon_j(x)\overline{R(p_2,\beta)}^t$$

por tanto

$$\{\alpha(z,x),\beta(z,x)\}_x^{(j)}=g(x)R(p_1,\alpha)e^{\int_0^x f_1(J_1,\xi)d\xi}\Upsilon_j(0)\overline{R(p_2,\beta)e^{\int_0^x f_2(J_2,\xi)d\xi}}^t$$

Luego

$$R(p_i,\alpha)e^{\int_0^x f_i(J_i,\xi)d\xi}=R(p_i,\alpha)e^{\sum_{k=1}^{N-1}(\int_0^x a_{k,i}(\xi)d\xi)J_i^k}$$

$$=R(p_i,\alpha e^{\sum_{k=1}^{N-1}(\int_0^x a_{k,i}(\xi)d\xi)z^k})=R(p_i,\alpha e^{\int_0^x f_i(z,\xi)d\xi})$$

Por lo tanto

$$\{\alpha(z,x),\beta(z,x)\}_x^{(j)} = g(x)R(p_1,\alpha e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi})\Upsilon_j(0)R(p_2,\alpha e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi})$$

$$= g(x)\{\alpha(z,x)e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi},\beta(z,x)e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}$$

como trabajamos con formas sesquilineales tales que $\{1,1\}_x^{(j)} = 1$, entonces

$$g(x) = (\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\})^{-1}$$

y finalmente

$$\{\cdot,\cdot\}_x^{(j)} = \frac{\{\cdot e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, \cdot e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(j)}}$$

□

3.1. CONCLUSIÓN

El teorema 3.1 provee un resultado muy general con el cual se completa el proceso de integración planteado en (1) para los dos sistemas de ecuaciones diferenciales, como los descritos en (17) al mismo tiempo, solo hay que verificar que se cumplen las condiciones que se indican. Este teorema muestra la evolución en x los datos espectrales.

Como un caso particular tenemos el sistema

$$\frac{dD_i(x)}{dx} = D_i(x)A_i(x) - B_i(x)D_i(x)$$

$$\frac{dM_i(x)}{dx} = M_i(x)A_i(x) - B_i(x)M_i(x) \qquad (22)$$

$$i = 1,2$$

con

$$A_1(x) = -(f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)}^t)_-$$
$$A_2(x) = (f_2(D_{2,1}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,1}(x),x)^t})_{0,0} I_N - (f_2(D_{2,1}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,1}(x),x)}^t)_\leq$$

$$B_1(x) = -(f_1(D_{1,2}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,2}(x),x)}^t)_-$$
$$B_2(x) = (f_2(D_{2,2}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,2}(x),x)^t})_{0,0} I_N - (f_2(D_{2,2}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,2}(x),x)}^t)_\leq$$

que es obtenido de (17) imponiendo la condición $d_{1,k,k+1}(x) = 1, 0 \leq k \leq N-2$ y $m_{1,k,k}(x) = 1, 0 \leq k \leq N-1$.

Tomando ahora $D_1(x) = L(x)$, $M_1(x) = M(x)$, como en (2), $D_2(x)$, $M_2(x)$ y f, apropiadamente, y sustituyendo luego en (22), obtenemos un nuevo caso particular

$$\begin{aligned} L'(x) &= L(x)A(x) - B(x)L(x) \\ M'(x) &= M(x)A(x) - B(x)L(x) \end{aligned} \qquad (23)$$

con $A(x) = (f(M^{-1}(x)L(x)))_-$, $B(x) = (f(L(x)M^{-1}(x)))_-$, al igual que (1).

4. DESARROLLOS EN FRACCIONES CONTINUAS

En este epígrafe recordaremos un algoritmo para desarrollar en fracción continua los elementos de $C^N\left(\left(z^{-1}\right)\right)\times C^N\left(\left(z^{-1}\right)\right)$, y mostraremos otro que generaliza en cierta forma el algoritmo de Jacobi-Perron para elementos de $C^N\left(\left(z^{-1}\right)\right)$. Este último es análogo, en el contexto de las fracciones continuas vectoriales, al caso de las T-fracciones.

DEFINICIÓN 4.1. Sea $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^N\left(\left(z^{-1}\right)\right)\times C^N\left(\left(z^{-1}\right)\right)$

$$f_1 = f_{1,0}, f_{1,1}, \dots$$

$$f_2 = f_{2,0}, f_{2,1}, \dots$$

Definamos

$$\frac{1}{f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_{20}}, \frac{f_{10}}{f_{20}}, \dots \\ \frac{f_{21}}{f_{20}}, \frac{f_{22}}{f_{20}}, \dots \end{pmatrix}$$

De la definición de inverso de f podemos introducir un algoritmo para el desarrollo en fracción continua de manera análoga al caso estándar para series formales [13]. Si en cierto paso del desarrollo la componente $f_{2,0}$ del elemento invertido es cero entonces el algoritmo termina.

Sea

$$f = a^0 + \cfrac{1}{a^1 + \cfrac{1}{a^2 + \cfrac{1}{\dots}}}$$

con $a^i \in C^N\ \ z\ \ \times C^N\ \ z$, lo cual vamos a escribir abreviadamente en la forma $f = \left\langle a^i \right\rangle_{i=0}^{\infty}$. Las fracciones convergentes de f son definidas como la fracción continua truncada en el n-ésimo término, para ellas escribiremos $\phi^n = \left\langle a^i \right\rangle_{i=0}^{n}$.

Sea D una matriz de Hessenberg, M una matriz triangular inferior con elementos no nulos en la diagonal, C una matriz triangular superior con los elementos de la diagonal principal distintos de cero, todas de $N \times N$. Denotemos por $f(z) = \mathbf{e}_0^t[zM - D]^{-1}C$, entonces tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1. La serie $\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}$ puede ser desarrollada en una fracción continua. Tenemos que $\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle a^k \right\rangle_{k=0}^{N-1}$ con $a^0 = 0$ y

$$a_1^k = \left(\frac{c_{k+1,k}}{c_{k,k}}, \frac{c_{k+2,k}}{c_{k,k}}, \dots, \frac{c_{n,k}}{c_{k,k}}, \dots \right)$$

$$a_2^k = \Big(\frac{c_{k-1,k-1}}{c_{k,k}d_{k-1,k}}\left(m_{k,k}z - d_{k,k}\right), \frac{c_{k-2,k-2}}{c_{k,k}d_{k-2,k-1}}\left(m_{k,k-1}z - d_{k,k-1}\right),$$

$$\dots, \frac{c_{0,0}}{c_{k,k}d_{0,1}}\left(m_{k,1}z - d_{k,1}\right), \frac{1}{c_{k,k}}\left(m_{k,0}z - d_{k,0}\right), 0, \dots \Big)$$

para $k \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Probaremos que $\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle b^i \right\rangle_{i=0}^{n}$ con $b^i = a^i$ para $i < n$ y $b^n = a^n + r^n$ con r_1^n igual a

$$\left(\frac{c_{n+1,n+1}q_{n+1}}{c_{n,n}q_n}, \frac{1}{c_{nn}q_n} \sum_{i=n+1}^{n+2} c_{n+2,i}q_i, \ldots, \frac{1}{c_{nn}q_n} \sum_{i=n+2}^{n+k} c_{n,i}q_i, \ldots \right)$$

y r_2^n igual a

$$\frac{1}{q_n c_{n,n}} \Big(\frac{c_{n-1,n-1}}{d_{n-1,n}} \sum_{i=n+1}^{\infty} (m_{i,n}z - d_{i,n})q_i, \frac{c_{n-2,n-2}}{d_{n-2,n-1}} \sum_{i=n+1}^{\infty} (m_{i,n-1}z - d_{i,n-1})q_i,$$
$$\ldots, -\frac{c_{0,0}}{d_{0,1}} \sum_{i=n+1}^{\infty} (m_{i,1}z - d_{i,1})q_i, \sum_{i=n+1}^{\infty} (m_{i,0}z - d_{i,0})q_i, 0, \ldots \Big)$$

y claramente el resultado se sigue de aquí. Note que de $\tau(q_n) = n$ las sumatorias de arriba están bien definidas y $\tau(r^n) \geq 0$. Para probar que $\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle b^i \right\rangle_{i=0}^{n}$ es suficiente chequear que

$$r^n = \frac{1}{a^{n+1} + r^{n+1}}$$

y entonces usar inducción. Pero esta última igualdad se sigue inmediatamente de la definición de inverso y usando la fórmula

$$\left(m_{n+1,n+1}z - d_{n+1,n+1}\right)q_{n+1} = d_{n,n+1}q_n - \sum_{i=n+2}^{\infty} \left(m_{i,n+1}z - d_{i,n+1}\right)q_i$$

obtenida de calcular el término $(0, n+1)$ en ambos lados de $(zM - D)^{-1}(zM - D) = I$.

$\square$

5. REPRESENTACIÓN DE LAS SOLUCIONES MEDIANTE DESARROLLOS EN FRACCIONES CONTINUAS

En este epígrafe analizamos casos particulares de los sistemas resueltos según el teorema 3.1.

TEOREMA 5.1. Sea $f_i(z,x) = \sum_{k=1}^{N-1} a_{k,i}(x) z^k$ donde las $a_k(x)$ son funciones continuas en R, $D_i(x)$ dos familias uniparamétricas de matrices de Hessenberg de $N \times N$, $M_i(x)$ matrices triangulares inferiores de $N \times N$ con elementos no nulos en la diagonal tal que $m_{i,0,0}(x) = m_{i,0,0} \neq 0$ no depende de x y $\{\cdot,\cdot\} \in B$ la forma sesquilineal definida mediante

$$\{\alpha(z), \beta(z)\} = \left. \alpha(D_1 M_1^{-1}) \overline{\beta(D_2 M_2^{-1})}^{t} \right|_{0,0}$$

para $D_1 = D_1(0)$, $M_1 = M_1(0)$, con $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ funciones analíticas, entonces si $d_{1,k,k+1}(x) = 1, 0 \leq k \leq N-2$ y $m_{1,k,k}(x) = 1, 0 \leq k \leq N-1$ la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dD_i(x)}{dx} = D_i(x)A_i(x) - B_i(x)D_i(x)$$

$$\frac{dM_i(x)}{dx} = M_i(x)A_i(x) - B_i(x)M_i(x)$$

$$i = 1,2$$

con

$$A_1(x) = -(f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)}^t)_-$$
$$A_2(x) = (f_2(D_{2,1}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,1}(x),x)^t})_{0,0} I_N - (f_2(D_{2,1}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,1}(x),x)}^t)_\leq$$

$$B_1(x) = -(f_1(D_{1,2}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,2}(x),x)}^t)_-$$
$$B_2(x) = (f_2(D_{2,2}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,2}(x),x)^t})_{0,0} I_N - (f_2(D_{2,2}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,2}(x),x)}^t)_\leq$$

con condiciones iniciales $D_1 = D_1(0)$ y $M_1 = M_1(0)$, viene dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} = a^0 + \cfrac{1}{a^1 + \cfrac{1}{a^2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a^{N-1}}}}} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{pmatrix} = b^0 + \cfrac{1}{b^1 + \cfrac{1}{b^2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{b^{N-1}}}}}$$

donde $\mathbf{f}(\omega,x)$ es igual a

$$\left(\frac{\{\frac{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}}{\omega - z}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}, \frac{\{\frac{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}}{\omega - z}, z e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}, \ldots, \frac{\{\frac{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}}{\omega - z}, z^k e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}, \ldots \right)$$

$\overline{\mathbf{g}(\omega,x)}$ es igual a

$$\frac{1}{m_{2,0,0}} \left(\frac{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, \frac{e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}}{\omega - z}\}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}, \frac{\{z e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, \frac{e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}}{\omega - z}\}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}, \ldots, \frac{\{z^k e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, \frac{e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}}{\omega - z}\}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}}, \ldots \right)$$

y $a^k = \begin{pmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{pmatrix}$, $b^k = \begin{pmatrix} b_1^k \\ b_2^k \end{pmatrix}$ con $a_2^k(\omega,x)$ igual a

$$= (\frac{c_{k-1,k-1}}{c_{k,k} d_{1,k-1,k}} \left(m_{1,k,k}\omega - d_{1,k,k} \right), \frac{c_{k-2,k-2}}{c_{k,k} d_{1,k-2,k-1}} \left(m_{1,k,k-1}\omega - d_{1,k,k-1} \right),$$
$$\ldots, \frac{c_{0,0}}{c_{k,k} d_{1,0,1}} \left(m_{1,k,1}\omega - d_{1,k,1} \right), \frac{1}{c_{k,k}} \left(m_{1,k,0}\omega - d_{1,k,0} \right), 0, \ldots)$$

donde $c_{k,k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} d_{2,i,i+1}(x)}{\prod_{i=0}^{k-1} m_{2,i+1,i+1}(x)}$ y $b_2^k(\omega,x)$ igual a

$$= (\frac{m_{2,k,k}\omega - d_{2,k,k}}{d_{2,k-1,k}}, \frac{m_{2,k,k-1}\omega - d_{2,k,k-1}}{d_{2,k-2,k-1}},$$

$$\ldots, \frac{m_{2,k,1}\omega - d_{2,k,1}}{d_{2,0,1}}, m_{2,k,0}\omega - d_{2,k,0}, 0, \ldots)$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $D_{i,1}(x) = M_i^{-1}(x)D_i(x)$ y $D_{i,2}(x) = D_i(x)M_i^{-1}(x)$ y consideremos los polinomios $\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x)$ asociados a la matriz $D_{i,j}(x)$ mediante la relación

$$D_{i,j}(x)\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x) = z\hat{\mathbf{p}}_{i,j}(z,x) - d_{i,j,N}\, p_{i,j,N}(z,x)e_{N-1}$$

Por la condición $d_{1,k,k+1}(x) = 1, 0 \le k \le N-2$ y $m_{1,k,k}(x) = 1, 0 \le k \le N-1$ tenemos que $d_{1,j,k,k+1} = 1, 0 \le k \le N-2$ y de la misma manera que en la demostración del teorema 3.1 se cumple $\frac{d\hat{\mathbf{p}}_{1,1}(z,x)}{dx} = A_1(x)\hat{\mathbf{p}}_{1,1}(z,x)$ y $\frac{d\hat{\mathbf{p}}_{1,2}(z,x)}{dx} = B_1(x)\hat{\mathbf{p}}_{1,2}(z,x)$, entonces $(A_1(x))_{diag} = (B_1(x))_{diag} = 0$, además

$$A_1(x) + \overline{A_2(x)}^t = -(f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)}^t) + (f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)^t})_{0,0} I_N$$

$$B_1(x) + \overline{B_2(x)}^t = -(f_1(D_{1,2}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,2}(x),x)}^t) + (f_1(D_{1,2}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,2}(x),x)^t})_{0,0} I_N$$

por tanto

$$A_1(x) = -(f_1(D_{1,1}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,1}(x),x)}^t)_-$$
$$A_2(x) = (f_2(D_{2,1}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,1}(x),x)^t})_{0,0} I_N - (f_2(D_{2,1}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,1}(x),x)}^t)_{\le}$$

$$B_1(x) = -(f_1(D_{1,2}(x),x) + \overline{f_2(D_{2,2}(x),x)}^t)_-$$
$$B_2(x) = (f_2(D_{2,2}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,2}(x),x)^t})_{0,0} I_N - (f_2(D_{2,2}(x),x) + \overline{f_1(D_{1,2}(x),x)}^t)_{\le}$$

pero

$$\frac{dD_i(x)}{dx} = D_i(x)A_i(x) - B_i(x)D_i(x)$$

$$\frac{dM_i(x)}{dx} = M_i(x)A_i(x) - B_i(x)M_i(x)$$

$$i = 1, 2$$

por tanto nuestro sistema de ecuaciones es equivalente al del teorema 3.1 de aquí

$$\{\cdot,\cdot\}_x^{(2)} = \frac{\{\cdot e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, \cdot e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(2)}}{\{e^{\int_0^x f_1(z,\xi)d\xi}, e^{\int_0^x f_2(z,\xi)d\xi}\}_0^{(2)}}$$

pero

$$\mathbf{f}(\omega,x)=\left(\left\{\frac{1}{\omega-z},1\right\}_x^{(2)},\ldots,\left\{\frac{1}{\omega-z},z^k\right\}_x^{(2)},\ldots\right)=\left(\mathbf{e}_0^t(\omega I-D_{1,2}(x))^{-1}\right)\overline{C_{2,2}(x)}^t$$
$$=\mathbf{e}_0^t[\omega I-D_1(x)M_1^{-1}(x)]^{-1}\overline{C_{2,2}(x)}^t$$
$$=\mathbf{e}_0^t[(\omega M_1(x)-D_1(x))M_1^{-1}(x)]^{-1}\overline{C_{2,2}(x)}^t$$
$$=\mathbf{e}_0^t M_1(x)[\omega M_1(x)-D_1(x)]^{-1}\overline{C_{2,2}(x)}^t$$
$$=m_{1,0,0}\mathbf{e}_0^t[\omega M_1(x)-D_1(x)]^{-1}\overline{C_{2,2}(x)}^t$$
$$=\mathbf{e}_0^t[\omega M_1(x)-D_1(x)]^{-1}\overline{C_{2,2}(x)}^t$$

para $|\omega|>\|D_{1,2}(0)\|$ y con $C_{2,2}(x)\hat{\mathbf{p}}_{2,2}(z,x)=\chi_N(z)$, lo que implica que $c_{2,2,k,k}(x)=\prod_{i=0}^{k-1}d_{2,2,i,i+1}(x)=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}d_{2,i,i+1}(x)}{\prod_{i=0}^{k-1}m_{2,i+1,i+1}(x)}$, donde $C_{2,2}=(c_{2,2,i,j})$, y de forma análoga

$$\mathbf{g}(\omega,x)=\frac{1}{m_{2,0,0}}\left(\overline{\left\{1,\frac{1}{\omega-z}\right\}_x^{(2)}},\ldots,\overline{\left\{z^k,\frac{1}{\omega-z}\right\}_x^{(2)}},\ldots\right)$$
$$=\frac{1}{m_{2,0,0}}\left(\mathbf{e}_0^t(\omega I-D_{2,2}(x))^{-1}\right)\overline{C_{1,2}(x)}^t$$
$$=\mathbf{e}_0^t[\omega M_2-D_2(x)]^{-1}\overline{C_{1,2}(x)}^t$$

para $|\omega|>\|D_{2,2}(0)\|$ y con $C_{1,2}(x)\hat{\mathbf{p}}_{1,2}(z,x)=\chi_N(z)$, lo que implica que $c_{1,2,k,k}(x)=\prod_{i=0}^{k-1}d_{1,2,i,i+1}(x)=1$, con $C_{1,2}=(c_{1,2,i,j})$, de donde el resultado se sigue tomando $\{\cdot,\cdot\}=\{\cdot,\cdot\}_0^{(2)}$, $c_{k,k}(x)=c_{2,2,k,k}(x)$ aplicando el teorema 4.1 a $\mathbf{f}$ y a $\mathbf{g}$. □

5.1. CASOS PARTICULARES

Presentaremos algunos corolarios del teorema anterior que muestran a ciertos sistemas de ecuaciones, como los estudiados en [7]. Sean

$$L(x)=\begin{pmatrix} a_0(x) & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & a_1(x) & 1 & & & 0\\ 0 & 0 & a_2(x) & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & a_{N-2}(x) & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{N-1}(x)\end{pmatrix},$$

$$M(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ -b_1(x) & 1 & 0 & & & 0\\ 0 & -b_2(x) & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -b_{N-1}(x) & 1\end{pmatrix}. \qquad (24)$$

con $a_n(x) > 0$ y $b_n(x) > 0$, como en [7].

COROLARIO 5.1. Sea $f(z,x) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(x) z^k$ donde las $a_k(x)$ son funciones continuas en R; $L(x)$, $M(x)$ son dadas como en (24) y $\Lambda : C^\infty(R) \to C$ el funcional definido por $\Lambda(\alpha(z)) = (\alpha(LM^{-1}))_{0,0}$, entonces la solución de la ecuación

$$\frac{dL(x)}{dx} = f(L(x)M(x)^{-1})_{-} L(x) - L(x) \, f(M(x)^{-1}L(x))_{-}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = f(L(x)M(x)^{-1})_{-} M(x) - M(x) \, f(M(x)^{-1}L(x))_{-} \qquad (25)$$

con condiciones iniciales $L = L(0)$ y $M = M(0)$, viene dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ 0 \end{pmatrix} = c^0 + \cfrac{1}{c^1 + \cfrac{1}{c^2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{c^{N-1}}}}}$$

donde $\mathbf{h}(\omega, x)$ es igual a

$$\left(\frac{\Lambda \left(\frac{e^{\int_0^x f(z,\xi)d\xi}}{\omega - z} \right)}{\Lambda\left(e^{\int_0^x f(z,\xi)d\xi} \right)}, \frac{\Lambda \left(\frac{e^{\int_0^x f(z,\xi)d\xi}}{\omega - z} \right)}{\Lambda\left(e^{\int_0^x f(z,\xi)d\xi} \right)}, \dots, \frac{\Lambda \left(\frac{e^{\int_0^x f(z,\xi)d\xi}}{\omega - z} \right)}{\Lambda\left(e^{\int_0^x f(z,\xi)d\xi} \right)}, \dots \right)$$

y $c^k = \begin{pmatrix} c_1^k(w,x) \\ c_2^k(w,x) \end{pmatrix}$ con $c_2^k(w,x)$ igual a

$$\left(\frac{a_k(\omega - a_k)}{-b_k}, \frac{a_k a_{k-1} \omega}{-b_{k-1}}, 0, \dots \right)$$

DEMOSTRACIÓN.

Se sigue tomando en el teorema 5.1 $D_1(x) = L(x)$, $M_1(x) = M(x)$, $D_2(x) = [M(x)]^t$, $M_2(x) = [L(x)]^t$. □

REFERENCIAS

[1] M. Adler and P. van Moerbeke. String-orthogonal polynomials, String equations and Two-Toda symmetries. *Comm. and Appl. Math.*, 50:241–290, 1997.

[2] A. Aptekarev, A. Branquinho, and F. Marcellan. Toda-type differential equation for the recurrence coefficients of ortogonal polynomials and Freud transformation. *Journal of Computation and Applied Mathematics*, 16:139–160, 1997.

[3] A. Branquinho and A. Aptekarev. Padé approximants and complex hight order Toda lattices. *Journal of Computation and Applied Mathematics*, 155(2):231–237, 2003.

[4] M. Bruschi and Ragnisco O. Lax representation and complete integrability for the periodic relativistic Toda lattice. *Physics Letters A*, 134(6):365–370, January 1989.

[5] M. Bruschi and O. Ragnisco. Recursion operator and the Bäcklund transformations for the Ruijsenaars-Toda lattice. *Physics Letters A*, 129(1):21–25, May 1988.

[6] M. Bruschi and O. Ragnisco. The periodic relativistic Toda lattice: direct and inverse problem. *Inverse Problems*, 5(3):389–405, 1989.

[7] J. Coussement, A. B. J. Kuijlaars, and W. Van Assche. Direct and inverse spectral transform for the relativistic Toda lattice and the connection with Laurent orthogonal polynomials. *Inverse Problems*, (18):923–942, 2002.

[8] A. Gago. Aproximación racional en sistemas dinámicos no lineales. *Tesis de Diploma, Universidad de la Habana*, Abril 2004.

[9] M. Kudryavtsev. Resolution of the Cauchy problem for the Toda lattice with non-stabilized initial data, *ArXiv Mathematics e-prints*, 2001.

[10] K. Mahler. Perfect systems. *Comp. Math.*, 19:95–166, 1968.

[11] A Miranov, A Zhedanov, and S Kharchev. Faces of relativistic Toda chain. *Inter. J. Mod. Phys. A.*, 12:2675–2724, 1997.

[12] J. K. Moser. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformation. *Adv. In Math.*, 16:197–220, 1975.

[13] E.M. Nikishin and V.N. Sorokin. Rational Approximation and Orthogonality, *Volume 92 of Translation of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[14] L. Robert. Polinomios ortogonales generales. *Tesis de Maestría, Universidad de la Habana*, 2001.

[15] S. Ruijsenaars. Relativistic Toda systems. *Comm. Math. Phys.*, pages 217–247, 1990.

[16] L. Santiago. Aproximación racional simultánea para un número infinito de funciones. *Tesis de Maestría, Universidad de la Habana*, Marzo 2003.

[17] L. Santiago and L. Robert. Finite sections method for Hessenberg matrices. *Journal of Approximation Theory*, 123(1):68–88, July 2003.