Ciencias Matemáticas, Vol. 33, No. 2, Pag. 189-196, 2019
Recibido 12-2018, Aceptado 09-2019

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde un enfoque semántico
The process of teaching and learning mathematics from a semantic approach

Eladio Jorge Oliveros Saúco[1], Ricardo Sánchez Casanova[2], Idania Urrutia Romaní[3]

Resumen En este trabajo se realiza un análisis sobre la importancia que tiene la semántica matemática para el desarrollo del pensamiento en general y, en particular, para desarrollar el pensamiento matemático y el poder semántico, concepto que el autor define en este artículo. Para su estudio se establecen tres niveles semánticos y se ejemplifican a través del análisis de un caso particular. Por otra parte, se muestra la semántica matemática como un principio heurístico y su estrecha relación con los procedimientos heurísticos y el pensamiento lateral.

Abstract This paper is an analysis of the importance that has the mathematical semantics for the development of thinking in general and, in particular, to develop mathematical thinking and the semantic power, concept that the author defined in this article. Three semantic levels are established for study and are exemplified through the analysis of a particular case. On the other hand, shows the semantic math as a heuristic principle and its close relationship with the heuristic procedures and lateral thinking.

Palabras Clave
Semántica matemática — poder semántico — heurística

[1] *Departamento de Matemática, Universidad Santa María campus Guayaquil, Ecuador, eoliveross@usm.edu.ec*
[2] *Facultad Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba, ricardo.sanchez@matcom.uh.cu*
[3] *Facultad Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba, idania@matcom.uh.cu*

Introducción

Desde la antigüedad hasta hoy, el proceso de enseñar y aprender Matemática ha constituido un serio problema para la sociedad en su conjunto porque, ante todo, resulta insuficiente lo que aprende el alumno para resolver los diferentes y complejos problemas que, en cada época, genera el desarrollo humano. Siempre ha estado presente esta situación problémica, que han tratado de resolver muchos pedagogos, metodólogos, psicólogos y matemáticos a lo largo de la historia.

En las postrimerías del siglo XIX, José Martí sentenciaba que *"Es criminal el divorcio entre la educación que se recibe en una época, y la época"* [6]. Hoy día, esta problemática se hace más ostensible debido al vertiginoso crecimiento de la ciencia y la tecnología durante el siglo XX y los primeros 16 años del XXI. Se ha radicalizado el divorcio al que se refería Martí y aparecen nuevos desafíos pedagógicos porque al viejo problema de la insuficiencia del conocimiento se han sumado otros.

Muchas veces nos preguntamos, ¿están preparados los graduados universitarios para la vida profesional moderna? La investigadora Regla M. Calderón, expresó: *"La desvinculación del aparato productivo y el carácter academicista de la enseñanza han caracterizado la educación en las universidades de América Latina y el caribe en el presente siglo"* [1]. En mayor o menor medida, esta triste realidad persiste casi 20 años después.

En estos momentos, es imposible enseñar al discente toda la obra matemática que le antecede, ni siquiera el cúmulo de conocimientos que él pueda necesitar en su vida profesional. Por tanto, entre los grandes desafíos actuales de la enseñanza de la Matemática universitaria, tal vez los más importantes, son las respuestas a las siguientes interrogantes: ¿qué contenidos debemos seleccionar para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje?, ¿cómo debemos desarrollar este proceso?, ¿qué metodología y qué herramientas utilizar para enseñar a pensar a nuestros alumnos?

Según el especialista en Educación Andreas Schleicher de la OCDE: *"... There's no competitive advantage today in knowing more than the person next to you. The world doesn't care what you know. What the world cares about is what you can do with what you know"* [9]. La traducción del final de la frase anterior nos expresa que: *"Al mundo no le interesa cuánto sabes, sino lo que puedes hacer con lo que tú sabes"*. Al analizar esta idea concluimos que el objetivo principal de la enseñanza de la Matemática no radica en enseñar muchos contenidos, sino en conseguir la construcción de capacidades en el ser humano que les permita enfrentarse con éxito a los diferentes problemas que se presentan.

En efecto, se requiere enseñar a pensar, no hay otro camino y la Matemática como ciencia y soporte científico de múltiples teorías es una herramienta insustituible en este proceso. La propia Dra. Regla ofreció un criterio que el autor de este artículo comparte plenamente: *"La educación superior debe lograr en el estudiante la capacidad de aprender, es decir, la tarea de la Universidad no consiste en dar una gran cantidad de conocimientos sino enseñar al alumno a pensar, a orientarse independientemente"* [1].

En la historia de este gran problema científico, el componente de la enseñanza de la Matemática que ha sufrido más es la formación de conceptos, porque en la rutina del trabajo escolar nos hemos dedicado principalmente a enseñar procedimientos y contenidos estériles con vistas a las "evaluaciones periódicas", que una vez realizadas, hacen que los citados procedimientos (muchos de los cuales sin lógica fundamentación) pierdan valor y rápidamente son olvidados por la falta de una correcta sistematización. Esto, en mayor o menor medida se mantiene en el ámbito universitario.

No cabe la menor duda que el proceso metodológico para la formación de conceptos constituye un elemento insustituible para enseñar a pensar e investigar y aquí juega un papel esencial la semántica matemática, que también será de extrema utilidad en el tratamiento de teoremas y sus demostraciones, así como complemento básico en la aplicación de la heurística en la resolución de problemas.

¿Cómo actuar para resolver los problemas planteados y qué recursos metodológicos usar? En este artículo se abordará la manera en que la semántica, como herramienta lingüística, contribuye al desarrollo de la lógica y del pensamiento matemático en general y se convierte en un principio heurístico para la resolución de diversos problemas. Su aplicación, por tanto, no se reduce exclusivamente a la interpretación de signos en la formación de conceptos pues se convertirá en fuente inagotable de búsqueda e imaginación constantes.

1. Desarrollo

1.1 Concepto de semántica y su relación con la semiótica

La palabra *semántica* proviene del griego *semantikos* que quiere decir significado relevante, pero el prefijo *sema* quiere decir signo o señal [2]. Por tanto, según la etimología de la palabra, semántica quiere decir *significado relevante de los signos y las señales*. Sin embargo, como ocurre con otros tantos conceptos, con el tiempo y el desarrollo de la ciencia, se amplía tanto el campo de uso y aplicación que la concepción original es desbordada por la realidad.

Según la página web Wikipedia, el término **semántica** se refiere a los aspectos del significado, sentido o interpretación de signos lingüísticos como símbolos, palabras, expresiones o representaciones formales. En principio, cualquier medio de expresión (lenguaje formal o natural) admite una correspondencia entre expresiones de símbolos o palabras y situaciones o conjuntos de cosas que se encuentran en el mundo físico o abstracto que puede ser descrito por dicho medio de expresión.

Hoy día, no existe consenso sobre el concepto de semántica. El problema principal es que la semántica no solo se encarga del significado de signos, símbolos y señales, sino de la interpretación de estructuras y representaciones formales y no formales. Sin embargo, según las investigaciones realizadas por el autor, la semántica forma parte de un campo más amplio: la semiótica. Tampoco existe un consenso sobre el concepto de semiótica, sin embargo, el autor asume el concepto del norteamericano Charles Sanders Peirce (sin desconocer los aportes de Ferdinand de Saussure) por considerarla la más general y por tanto la más flexible: "Teoría general de los signos".

Muchos autores coinciden en que la semiótica tiene tres elementos principales, a saber:

- La sintáctica: estudia la relación entre los signos y las normas para su uso.
- La semántica: estudia los signos y su significado.
- La pragmática: estudia la relación entre tales signos y los contextos y circunstancias en que son usados.

Como este artículo se centra en el estudio de la semántica, el autor dará una definición de semántica que no se circunscribe únicamente al significado de los signos y símbolos, sino que brinda la posibilidad de lograr un mayor alcance para su aplicación.

Semántica: Es el estudio de la relación entre los signos, las expresiones y las estructuras y sus respectivos significados en un determinado contexto.

Existe, sin embargo, un amplio consenso sobre los diferentes tipos de semántica, según el campo donde se aplica. Así, podemos señalar los siguientes:

- *Semántica lingüística*: Estudia el significado de las palabras y las expresiones del lenguaje común. Aquí, la pragmática es predominante debido a que el contexto es esencial.
- *Semántica lógica o matemática*: Estudia el significado de los símbolos matemáticos, de las expresiones y regularidades de esta ciencia.
- *Semántica de las ciencias cognitivas*: Estudia los mecanismos psíquicos entre el hablante y el oyente.

La Semántica lógica desarrolla una serie de problemas lógicos de significación, destacando en particular la relación entre el signo lingüístico y el contexto real. Por eso, esta disciplina, estudia las condiciones necesarias para que un signo o símbolo pueda aplicarse a un objeto y las reglas que aseguran una significación exacta.

Hoy día muchos pedagogos en el mundo entero procuran, como se ha planteado anteriormente, transformar las viejas y arraigadas estructuras del proceso de enseñanza aprendizaje donde el objetivo principal consistía en enseñar la mayor cantidad de contenidos científicos posibles al estudiante (tengan o no posibilidades cognitivas para aplicarlas). Esa transformación debe enfocarse en un paradigma claro y preciso: enseñar a pensar y la semántica es un recurso inestimable por lo que aporta al desarrollo del pensamiento creador.

Una vez que el estudiante adquiere la habilidad de recurrir a la semántica para realizar todas las interpretaciones posibles de un objeto o regularidad matemática se crea un fuerte hábito de hacerlo en disímiles situaciones de aprendizaje y lo que es más importante: lo realiza ante las múltiples situaciones problemáticas que enfrentará a lo largo de su vida profesional. En ese momento deja de ser reproductivo y se convierte un profesional creativo, muy proclive hacia la investigación científica. Y eso es lo que necesitamos.

Sin embargo, no es tan sencillo lograr que la semántica sea un recurso empleado por los docentes y los discentes en el desarrollo del proceso educativo. En su tesis doctoral Arnaldo Faustino plantea:

> *Actualmente lograr el valor semántico matemático absoluto en los futuros profesionales es una tarea muy difícil ya que el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la Educación Superior Angolana se rige en los fundamentos de la pedagogía desarrolladora, a pesar de prevalecer en los profesionales rasgos de la aplicación de procedimientos tradicionalistas, ... generalmente el profesional en su quehacer matemático el docente enfatiza más la aplicación de métodos expositivos y deja de lado la integración de métodos interactivos que dinamizan la enseñanza aprendizaje que son muy importantes para desarrollar diferentes habilidades comunicativas para el desarrollo del pensamiento lógico.* [3]

Debe enfatizarse que este fenómeno, que se describe para Angola por el Profesor Arnaldo en su tesis doctoral, no es lejano a la problemática de la educación superior en la República del Ecuador y, según las investigaciones realizadas por el autor, es un problema que está presente en muchos países de nuestra región.

Lo peor que puede suceder en la enseñanza de la disciplina Matemática en la Universidad es que los estudiantes solo conozcan procedimientos sin tener una representación mental clara de los conceptos, los teoremas y las estrategias más significativas (en correspondencia con su especialidad) para resolver problemas. Se forman profesionales carentes de toda iniciativa y profundidad en los análisis cuantitativos y cualitativos relativos a los problemas que les corresponde enfrentar en su vida laboral.

El conocido psicólogo Vygotski, afirmó que: ...”*el objeto matemático sin el pensamiento lógico matemático es una cosa muerta y un pensamiento lógico matemático carente del objeto matemático permanecen en la sombra*” [10]. El autor, a través de su quehacer como profesor durante más de 44 años ha comprobado reiteradamente esta afirmación. Es más, estos antecedentes motivaron la creación de la siguiente categoría:

Poder semántico: *Es la capacidad del individuo para interpretar estructuras y diferentes situaciones simples o integradas en un contexto de contenidos diversos.*

Ahora podemos afirmar que sin el poder semántico no hay pensamiento lógico. No manejar el arsenal semántico es la razón fundamental por la que futuros profesionales tienen tantas dificultades cuando se enfrentan a situaciones problemáticas pues sus capacidades son limitadas y, a lo sumo, logran ver la parte externa de los objetos y fenómenos. En estos casos, que son abundantes, la falta del poder semántico conduce inevitablemente a grandes limitaciones en la capacidad de análisis, síntesis, abstracción y creación.

1.2 Niveles de la semántica

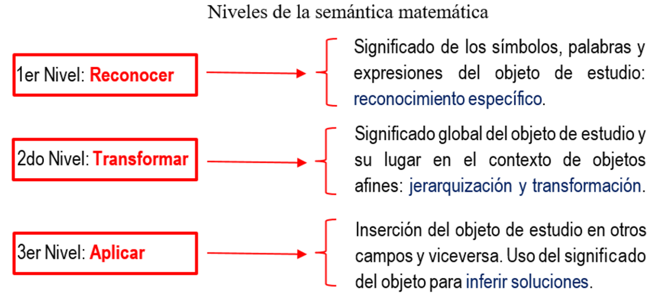
Según el grupo de autores ya mencionado en este artículo: “*La semántica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática significa el estudio del significado de los signos lingüísticos matemáticos, esto es, la indagación del significado por parte de los implicados en el proceso formativo matemático que se expresa mediante palabras, expresiones, enunciados, teoremas, propiedades y axiomas*” [4].

El autor de este artículo considera muy estrecho el campo de acción que los citados investigadores conceden a la semántica matemática. Reducir el uso de la semántica al “*estudio del significado de los signos lingüísticos matemáticos*” es, cuando menos, olvidar que ligados a la observación e interpretación básica de signos y objetos matemáticos, se desarrolla un intenso proceso de interpretación de enunciados complejos que, a la postre, permiten el desarrollo de capacidades para resolver problemas.

Debido a lo anterior y, como se ha dicho anteriormente, la realidad cognitiva ha sobrepasado a la definición original de semántica se hace necesario establecer, además de la nueva definición dada de semántica, los niveles en que esta disciplina incide en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Tal dimensión tiene el campo donde desarrolla su accionar que el autor ha establecido tres niveles de aplicación y trabajo con la semántica matemática. Estos niveles se representan en el siguiente esquema:

Niveles de la semántica matemática



De forma general, en el **primer nivel** se desarrolla el proceso de identificación de signos y símbolos involucrados en una expresión determinada, así como la relación entre estos. En otras palabras, en el 1er nivel se busca la comprensión básica de la situación planteada, corresponda a la definición de un concepto, a la estructura de un teorema o al enunciado de un problema. Si el discente no ha vencido este nivel, es decir, si no reconoce el significado de los signos y símbolos presentes, se hace imposible que comprenda y con ello, se trunca el proceso de aprendizaje.

Con el afán de enseñar tantos procesos, casi siempre algorítmicos, el docente obvia esta primera interpretación y los estudiantes se nutren de mecanismos que son inservibles porque no están respaldados por una clara comprensión de conceptos y regularidades. Como consecuencia, la mayoría de nuestros alumnos no pueden resolver problemas, por simples que estos sean, peor aún construir modelos matemáticos para representar problemas de su especialidad universitaria. Es justo decir que, con el pasar del tiempo, olvidan con relativa facilidad estos “procesos” matemáticos ganados a fuerza de enorme cantidad de repeticiones.

Ya en el **segundo nivel** se procura la transformación de los significados particulares encontrados en el primer nivel en elementos semánticos que permitan la comprensión global de las diversas situaciones planteadas. Las acciones propias de este nivel son, entre otras afines, la jerarquización de conceptos y leyes (determinación de lo que es particular, de lo que es general y abarca lo anterior), la búsqueda de nexos con significados anteriores, la determinación de contraejemplos y la transformación de tesis en las demostraciones de propiedades matemáticas. Esta última acción constituye una regla heurística y reviste especial importancia en el proceso de resolución de problemas.

El **tercer nivel** se exige la aplicación de los significados al análisis de expresiones más complejas, al análisis de los nexos con los saberes precedentes para resolver situaciones problemáticas diversas. Aquí, el discente debe ser capaz de combinar y conectar significados, inferir soluciones, establecer regularidades y realizar conjeturas. Un buen uso de la semántica matemática, de las interpretaciones de expresiones no solo contribuye a encontrar vías de solución, también ayuda de forma directa a desarrollar un pensamiento creador y perspectivo, aplicable en cualquier situación futura.

A través de un ejemplo concreto se puede ilustrar el tránsito del proceso de enseñanza aprendizaje por estos tres niveles mencionados. Pero antes es necesario aclarar un aspecto muy importante: en la práctica cognitiva es muy difícil separar los tres niveles mencionados. En muchas ocasiones aparecen entrelazados porque existe una división muy fina entre ellos e incluso, como veremos posteriormente, interrelacionados con los elementos de la heurística. En todo caso, el docente en todo momento debe tener claridad sobre la etapa del proceso en que se encuentra.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x)=|x+2|$ definida en el conjunto **R** de los números reales.

1. Halla $f(-3)$
2. Representa gráficamente la función dada.
3. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x)=-x$? Justifica tu respuesta.

Análisis del trabajo del docente en el aula de clases en la discusión de este ejemplo:

Para el éxito del trabajo docente y cumplir el objetivo de lograr un aprendizaje significativo, ante todo, se requiere la determinación de los conocimientos previos que debe poseer el estudiante. En nuestro caso, son necesarios los siguientes:

- Conceptos de función, valor funcional, valor absoluto y ecuación.
- Habilidad para representar gráficamente una función lineal.

Por otro lado, se supone que el discente aún no conoce la función valor absoluto y que se enfrenta a una nueva situación. Veremos ahora cómo procede el docente para trabajar los tres niveles semánticos a través de la solución de este ejercicio que, para muchos estudiantes que aún no han trabajado con la función valor absoluto, puede constituir un problema.

a) Es menester que el docente realice las siguientes preguntas: ¿Por qué la relación dada es una función?, ¿qué significa definida en **R**?, ¿qué significa $f(-3)$? Proceder al cálculo sin hacer una discusión de estas preguntas sería correr un gran riesgo: mecanizar el proceso y perder el encanto de pensar. Es claro que las respuestas de estas preguntas se enmarcan en el 1er nivel semántico.

Debe hacerse hincapié en la lectura de la expresión $f(-3)$. En lugar de leer “f de –3 o f en –3” debe inculcarse en los estudiantes la expresión “*la imagen del* –3 *por la función* f”. Una vez concluido este análisis se procede al cálculo: $f(-3)=|-3+2|=|-1|=1$

b) Aquí veremos elementos del primer y del segundo nivel semántico. Al igual que en el caso anterior el docente debe dirigir el proceso del pensamiento de los estudiantes a través de preguntas muy bien estructuradas. Entre otras: ¿Qué significa representar gráficamente una función de variable real?, ¿cuáles son los elementos de una función?, según el resultado obtenido en el literal anterior, ¿ya tenemos algún par ordenado que pertenezca a la función, por qué?

Hasta este momento solo hemos trabajado el 1er nivel semántico. Debe insistirse en el significado del resultado $f(-3)=1$ obtenido anteriormente, es decir, esto es equivalente a la expresión $(-3;1)\in f$.

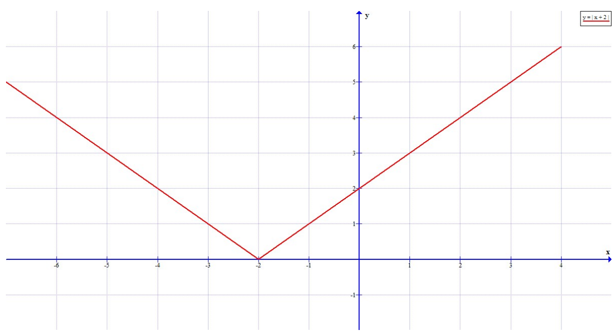
Ahora surge la idea (natural) de continuar encontrando puntos, situarlos en el plano cartesiano para obtener una idea del gráfico de f. Esto, desde luego, puede hacerse y es un recurso válido. Sin embargo, por ser un proceso inductivo no siempre nos dará la certeza del gráfico que queremos encontrar. También pueden usarse las TIC y determinar el gráfico a través de un software, pero esto último acabaría con las ilusiones del pensamiento. Por ello, podemos usar un conocido principio heurístico y preguntar: ¿Podemos encontrar el gráfico de f usando los gráficos de funciones conocidas (las lineales)?, ¿cómo hacerlo?

Ya en este punto, entramos al 2do nivel semántico porque necesariamente debemos hacer una transformación o reformulación de la estructura de la ecuación que describe la función. Además, ahora establecemos nexos con otras estructuras semánticas. Vale la pena preguntar: ¿Qué significa $|x|$ y $|x+2|$? En una conversación con los estudiantes se concluye que:

$$y = |x+2| = \begin{cases} x+2 \text{ si } x+2 \geq 0 \\ -x-2 \text{ si } x+2 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = |x+2| = \begin{cases} x+2 \text{ si } x \geq -2 \\ -x-2 \text{ si } x < -2 \end{cases} \quad (2)$$

Tenemos pues, una vía para obtener el gráfico de la función dada: representar dos funciones lineales, en los dominios indicados.



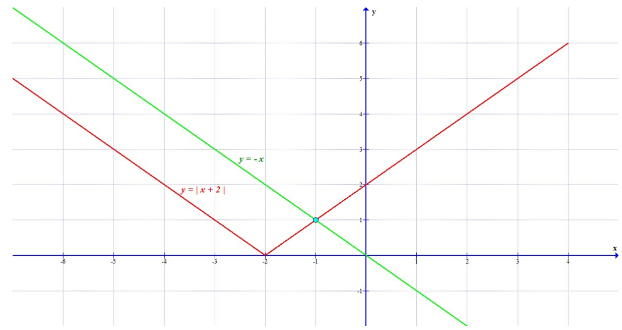
c) ¿Por qué $f(x) = -x$ es una ecuación?, ¿qué significa la expresión $f(x) = -x$? Al establecer nexos entre dos elementos semánticos de contextos diferentes, estamos en el 3er nivel. Queda claro que existe una intención natural por parte del alumno (también por parte del profesor) de reemplazar $f(x)$ por $|x+2|$ y resolver la ecuación con valor absoluto, lo cual es correcto. Sin embargo, no nos piden la o las soluciones de la ecuación, solo nos piden cuántas y, por otro lado, se perdería la gran oportunidad de ampliar los horizontes del poder semántico de los estudiantes.

Por todo lo anterior, en ejercicios como estos, se recomienda resolver algebraicamente la ecuación planteada solo al final, después de seguir el proceso que se indica a continuación.

En cada uno de los niveles es primordial e indispensable la lectura semántica de las diferentes expresiones involucradas. En este caso nos podemos preguntar ¿de cuántas formas diferentes puede leerse la igualdad anterior? Aquí se exponen dos de ellas:

- Debemos encontrar los valores reales tales que su imagen por la función f den como resultado su opuesto (2do nivel semántico).
- Dadas las funciones $y = |x+2|$ e $y = -x$ debemos encontrar los valores de x para los cuales se obtienen las mismas imágenes por ambas funciones (3er nivel semántico puesto que elevamos el nivel de interpretación y significación en otros contextos).

Aprovechamos esta última lectura pues nos sugiere la idea de graficar en el mismo plano la función $y = -x$ y verificar



gráficamente la cantidad de puntos donde se intersectan ambos gráficos.

Ahora debe dirigirse el análisis gráfico de la siguiente manera:

El gráfico de la función descrita $y = |x+2|$ consta de dos semirrectas. Es claro que la semirrecta de la derecha se intersecta en un solo punto con el gráfico de la función $y = -x$ y por ello, podemos decir que la ecuación planteada ya tiene aquí una solución debido a que dos rectas coplanares no coincidentes tienen, a lo sumo, un punto de intersección. Sin embargo, ¿podemos asegurar que la otra semirrecta (a la izquierda del punto –2) no se intersecta con el gráfico de $y = -x$? Efectivamente, no se intersectan, ¿por qué?

Esta última pregunta debe provocar un análisis gráfico que concluye tanto la recta $y = -x$ como la semirrecta $y = -x-2$, descrita en el intervalo $(-\infty; -2]$, son paralelas pues tienen la misma pendiente. Finalmente, podemos asegurar que la ecuación dada tiene solución única: $x = -1$. Este resultado debe corroborarse a través del cálculo pues, además, genera otra posibilidad para sistematizar el concepto de función y estrecha los vínculos entre el álgebra y la geometría.

Como puede apreciarse, el trabajo en los tres niveles semánticos, requiere de una exquisita preparación docente, tanto metodológica como científica pues aquí el profesor como director del proceso es quien dirige el pensamiento de los estudiantes hacia la semántica. Es justo decir que también requiere de tiempo, pero bien vale la pena. Cabe destacar que en el aula de clases, a raíz de las preguntas casuales de los estudiantes, se presentan habitualmente muchas oportunidades para trabajar con los niveles semánticos, lo cual ha podido comprobar el autor a lo largo de su experiencia docente.

1.3 La semántica como principio heurístico

Si convenimos que el objetivo principal de la enseñanza de la Matemática Superior en los tiempos actuales es enseñar a pensar para que el futuro profesional se enfrente con éxito a los crecientes y complejos problemas del mundo científico y tecnológico, entonces estamos obligados a realizar constantes menciones a la heurística como método y como ciencia del descubrimiento. Han sido muchos los investigadores de este método, pero el autor se siente identificado especialmente con George Polya [8] y Horst Müller [7], porque particularmente ellos elevaron el papel de la heurística y demostraron su existencia como método científico.

Pero la heurística sin la semántica no existe, porque precisamente, la búsqueda de ideas en la resolución de problemas está directamente relacionada con la capacidad de interpretación de los discentes, con el poder semántico que hayan desarrollado. El Dr. García la Rosa expresa: *En la búsqueda de la vía de solución a los problemas geométricos el estudiante debe realizar una serie de actividades muy movidas que no solo requieren del pensamiento lógico, sino también del pensamiento lateral... donde se ponga de manifiesto su creatividad, fantasía e imaginación que le permita no solo seguir un camino formalmente lógico sino, hacer conjeturas hipotéticas sobre posibles vías de solución* [5].

El autor considera importante el planteamiento del Dr. García porque no solo es válido para Geometría, sino para la ciencia Matemática en general. La semántica matemática, porque su carácter, juega un papel decisivo en el desarrollo del pensamiento lateral y este a su vez, contribuye de manera especial al desarrollo de la creatividad y la fantasía.

Cabe destacar que la heurística, como metodología científica, es aplicable a cualquier ciencia e incluye la elaboración de medios auxiliares, principios, reglas, estrategias y programas que faciliten la búsqueda de vías de solución a problemas. Según Müller, los procedimientos heurísticos como método científico pueden dividirse en principios, reglas y estrategias. Particularmente, otorga un papel predominante a los principios heurísticos debido a que este tipo de procedimiento nos brinda la idea de la solución de un problema determinado [7]. El autor asume la definición que ofrece Müller sobre principio heurístico.

- **Principios heurísticos:** constituyen sugerencias para encontrar —directamente— la idea de solución; posibilita determinar, por tanto, a la vez, los medios y la vía de solución.

Tomando como base el precepto de que esta definición es válida se puede asegurar que la semántica matemática puede considerarse un principio heurístico. La razón principal: el uso adecuado y creativo del poder semántico favorece la generación de ideas que brindan los medios y las vías de solución de diversos problemas. Específicamente, el uso de la semántica matemática está directamente relacionado con algunos conocidos principios heurísticos, tales como la analogía, la variación de condiciones, el análisis de casos particulares y la reducción.

A través de un ejemplo se puede apreciar como el uso del poder semántico genera directamente la idea de la solución de un problema de demostración.

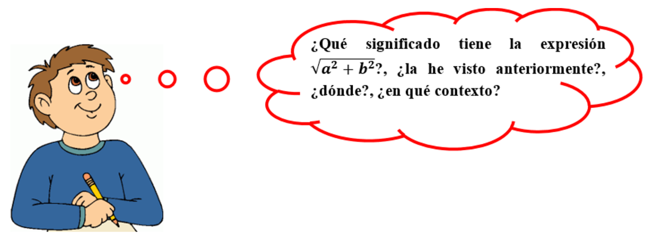
Ejemplo 2: Demuestra que para todo número real x se cumple que

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{x^2+(x+1)^2} \geq 2 \tag{3}$$

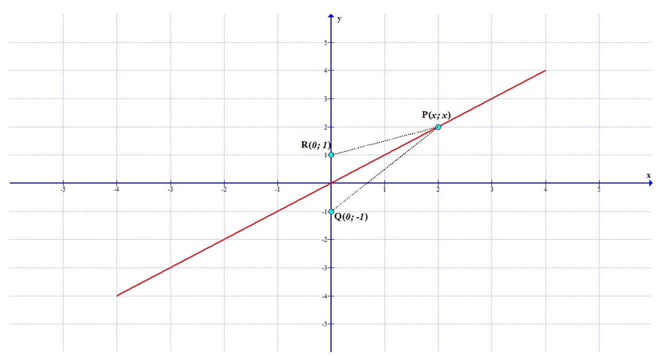
Análisis del trabajo del docente en el aula de clases:

Primero, es prudente aclarar qué conoce el estudiante al enfrentarse a este ejercicio de demostración. Hasta ahora conoce los elementos básicos del cálculo aritmético y algebraico, además de conocimientos básicos de geometría euclidiana. De cualquier manera, el docente debe dirigir la atención del alumnado y motivarlos para que observen, una y otra vez, antes de escribir porque esta es una característica inherente al poder semántico.

Por supuesto, en la compleja trama del pensamiento matemático nada aparece aislado. En especial, la aplicación de la semántica está ligada a la aplicación de otras reglas y principios heurísticos. En este caso, el docente debe guiar la observación del estudiante hacia la forma de los elementos que intervienen en el enunciado dado. El siguiente esquema proporciona una representación de lo que debe lograrse:



Es claro que, luego de algunas reflexiones y usando la analogía, surja la idea de *distancia* entre dos puntos. De igual forma, analizando toda la expresión, no es difícil concluir que se trata de la suma de dos distancias, del mismo punto de coordenadas (x,x) a otros dos puntos. Aquí, de forma natural, debe surgir la idea de representar en el plano cartesiano la problemática planteada. Otra vez la semántica para reconocer que el punto de coordenadas (x,x) es uno de los infinitos puntos de la recta $y=x$. A partir de aquí, los otros dos puntos se determinan sin mayores dificultades.



La demostración de la desigualdad planteada concluye en otro análisis semántico: Los puntos R y Q son fijos y siempre formarán un triángulo con el punto móvil P, excepto que P sea el origen de coordenadas. Ahora asociamos:

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2}=|\overline{PR}|;\sqrt{x^2+(x+1)^2}=|\overline{PQ}|;|\overline{RQ}|=2 \tag{4}$$

Entonces, podemos escribir lo siguiente:

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{x^2+(x+1)^2} \geq 2 = |\overline{PR}|+|\overline{PQ}| \geq |\overline{RQ}| \tag{5}$$

Recordando propiedades básicas referidas a los lados de un triángulo, recordamos la desigualdad triangular, que nos garantiza la última desigualdad y con ello queda probada la desigualdad. Solo nos faltaría el caso particular en que P coincida con el origen de coordenadas. En este último caso se cumpliría la igualdad.

Es obvio que esta desigualdad puede demostrarse de otras formas, comenzando por la consabida vía algebraica donde, elevamos al cuadrado y vamos trabajando hacia adelante buscando alguna desigualdad conocida. Pero en estos casos la semántica también está presente de una u otra forma pues, por ejemplo, la acción de elevar al cuadrado los miembros de una desigualdad implica el conocimiento de la significación de las bases; si son positivas, negativas, si se mantiene el orden de la desigualdad, etc.

1.4 La semántica matemática: una herramienta insustituible para la docencia

Las discusiones teóricas y ejemplos analizados anteriormente muestran la importancia de la semántica en la formación del pensamiento en general y del pensamiento matemático en particular. De igual forma, se ha comprobado una estrecha relación entre el poder semántico, el desarrollo del pensamiento lateral y la heurística. Todo esto hace que la semántica matemática se convierta en una herramienta insustituible para la docencia.

Podemos resumir un espectro de elementos del aprendizaje que la semántica matemática favorece, fortalece y ayuda a potenciar. Entre otros se pueden citar los siguientes:

- Ayuda al razonamiento, lo mejora y resulta indispensable para la sistematización de los contenidos matemáticos.
- Por su estrecha relación con el pensamiento lateral, fomenta la creatividad y la fantasía.
- Incrementa el acervo cultural y la riqueza del lenguaje natural.
- Facilita la comprensión, ayudando directamente a manipular y sustituir tesis en la resolución de problemas.
- Facilita la búsqueda de estrategias y vías para resolver problemas, generando en no pocas ocasiones la idea principal.
- Contribuye de manera especial al crecimiento personal e interpersonal.
- Ayuda directamente en la traducción e interpretación de situaciones disímiles en otras ciencias y contextos académicos diferentes.
- El uso sistemático de la semántica matemática desarrolla el hábito de formar y comprender nuevos conceptos.

No caben dudas que la situación típica de la enseñanza de la matemática que más se beneficia con el uso de la semántica es la formación de conceptos, aspecto esencial en la formación de un profesional porque sin una sólida base conceptual es imposible lograr que nuestros futuros graduados se enfrenten con éxito a los problemas de la ciencia y la tecnología. Es por ello que los docentes deben prestar especial atención a la formación de conceptos. En especial, el docente debe prestar mucha atención en la selección de ejercicios que coadyuven al desarrollo del poder semántico.

En los estudios de tercer nivel se hace fundamental el concepto de función y todos los conceptos básicos afines al mismo. A manera de ejemplo, el autor expone aquí un ejercicio tipo que sistematiza este tipo de contenidos y donde el estudiante de forma directa o indirecta desarrolla su poder semántico.

Ejercicio: Sean dados los conjuntos $A = \{1,2,3,\dots,50\}$ y N el conjunto de los números naturales. Sea la función f definida de A en N tal que a cada elemento x de A se le hace corresponder la suma de las cifras de x. Por ejemplo, $f(34) = 3+4 = 7$

1. Fundamenta por qué f es una función.
2. Halla $f(27)$
3. ¿Cuántos elementos tiene el rango de f?
4. ¿Tiene la función f valores extremos?, ¿cuál o cuáles?
5. Analiza la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función f
6. Resuelve la ecuación $f(x) = 10$
7. ¿Tiene ceros la función f?
8. ¿Es creciente la función f?, ¿por qué?
9. ¿Es cierto que $(53,8) \in f$? Justifica tu respuesta
10. Usando el mismo dominio A, ¿puedes construir una función g que sea biyectiva?

2. Conclusiones

Hoy día, cuando no es posible enseñar al estudiante universitario toda la obra matemática que le antecede, se hace necesario enseñar a pensar y para ello, la semántica matemática constituye una poderosa herramienta que el docente debe usar como un principio heurístico, para generar ideas y buscar vías de solución en múltiples problemas, no solo de la Matemática, sino de la ciencia en general.

Por la amplitud y el alcance de sus aplicaciones, es conveniente estructurar los niveles de la semántica, lo que facilita el trabajo de tratamiento metodológico que realiza el profesor. El autor ha establecido tres niveles que están estrechamente ligados con los procedimientos heurísticos y el pensamiento lateral.

Para desarrollar el poder semántico en los estudiantes universitarios es imprescindible un cuidadoso manejo metodológico en la formación de conceptos, así como la sistematización de propiedades afines a estos conceptos. Solo así los procedimientos matemáticos tienen sentido y servirán de guía para encontrar vías de solución a los problemas, así como nuevos conocimientos a través de la investigación científica.

Referencias

[1] Calderón, R. M. (1996). *Tesis doctoral: La enseñanza del cálculo integral. Una alternativa basada en el enfoque histórico cultural y de la actividad.* La Habana.

[2] *Etimologías.* (s.f.). Obtenido de www.etimologías.dechile.net

[3] Faustino, A. (2016). *La semántica desde una perspectiva matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje.* Obtenido de Monografías: http://www.monografias.com/trabajos95/semantica-perspectiva-matematica-proceso-ensenanza-aprendizaje/semantica-perspectiva-matematica-proceso-ensenanza-aprendizaje.shtmlixzz3vXX41cuM

[4] Faustino, A., del Pozo Gutiérrez, E., Rodríguez, O. A. (2012). *Fundamentos epistemológicos que intervienen en el desarrollo de la comunicación matemática.*

[5] García La Rosa, J. E. (2011). Propuesta metodológica para el tratamiento a la resolución de problemas geométricos de cálculo y demostración. *Universidad Pedagógica Frank País*, 2.

[6] Martí, J. (1883). *Obras completas.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

[7] Müller, H. (1987). *Métodos Heurísticos.* La Habana: Edición mimeografiada del ISP.

[8] Polya, G. (1957). *"How to solve it"(Traducción al español: Çómo plantear y resolver problemas"*. México: Editorial Trillas.

[9] Schleicher, A. (2014). *¿Quiénes son los profesores de América Latina y el Caribe? Informe al Banco Mundial de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.*

[10] Vygotski, L. S. (1997). *La historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores.* Habana: Editorial Ciencias Sociales.