UNA VARIANTE DEL MÉTODO DE LINEALIZACIÓN LOCAL PARA LA INTEGRACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS CON RESPECTO A SEMIMARTINGALAS

Luis A. Salomón Hernández[1], Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de la Habana, Facultad de Matemática y Computación
Rolando J. Biscay Lirio[2], Instituto de Cibernética, Matemática y Física (ICIMAF)

RESUMEN
El método de Linealización Local para la integración numérica (en sentido fuerte) de ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido de Wiener es extendido al caso de ecuaciones diferenciales con respecto a semimartingalas. Se demuestra además la convergencia ucp (uniforme sobre compactos en probabilidad) de la solución aproximada a la solución exacta.

Palabras clave: Semimartingalas, Linealización Local, Convergencia ucp.

ABSTRACT
The Local Linearization (LL) method for the integration (in the strong sense) of stochastic differential equations with Wiener noise is extended to equations driven by additive semimartingales. Furthermore, it is proved the convergence in ucp (uniform on compacts in probability) of the approximate solution to the exact one.

1. INTRODUCCIÓN

El método de Linealización Local (LL) para la solución numérica de ecuaciones diferenciales se basa en la solución explícita, mediante exponenciales matriciales, de ecuaciones lineales que localmente aproximan a la ecuación original.

El método LL ha sido desarrollado para ecuaciones diferenciales ordinarias (Jiménez **et al.**, 2002), ecuaciones diferenciales estocásticas de Ito (Ozaki, 1992; Biscay **et al.**, 1996; Jiménez y Biscay, 2002; Jiménez y Carbonell, 2005) y ecuaciones diferenciales aleatorias (Carbonell **et al.**, 2005). Resultados teóricos y de simulación han mostrado que este enfoque logra buenas propiedades dinámicas con bajo costo computacional, en comparación con los métodos implícitos de solución.

Sin embargo, el método LL no ha sido aún formulado para el caso más general de ecuaciones diferenciales estocásticas con respecto a semimartingalas. Como es sabido, las semimartingalas incluyen no solo al movimiento Browniano sino también a los procesos de Poisson y los procesos de Lévy estables, y constituyen los procesos estocásticos más generales que se han considerado como integradores estocásticos (Protter, 1995). Para este tipo de ecuaciones el único enfoque numérico de solución que ha sido usado hasta el momento es el método de Euler. Esto es así tanto para soluciones en sentido fuerte (Protter, 1985; Karandikar, 1991; Kohatsu-Higa and Protter, 1991; Kurtz and Protter, P. 1991; Janicki **et al.**, 1993.) como para soluciones en sentido débil (Janicki y Weron, 1995; Janicki **et al.**, 1996; Protter y Talay, 1997; Jacod y Protter, 1998; Jacod et al., 2005).

El objetivo de este trabajo es extender el método LL a ecuaciones diferenciales estocásticas con respecto a semimartingalas en caso de ruido aditivo.

El trabajo está organizado del modo siguiente. En la Sección 2 se compendian conceptos y resultados básicos sobre integración estocástica que serán usados posteriormente. En la Sección 3 se define una variante del método LL para ecuaciones diferenciales con respecto a semimartingalas de tipo ruido aditivo. Para la realización computacional del método, se supone que las integrales estocásticas con respecto a la semimartingala pueden simularse con la precisión deseada. El resultado teórico principal obtenido es el

E-mail: [1]salo@matcom.uh.cu
[2]biscay@icmf.inf.cu

teorema de convergencia ucp (uniforme sobre compactos en probabilidad) de la aproximación LL, el cual se demuestra en la Sección 4. Se concluye con algunos comentarios finales la Sección 5.

2. PRELIMINARES

Por completitud, recordaremos aquí algunos conceptos y resultados básicos de la teoría general de procesos que usaremos a través de este trabajo. Para más información, ver e.g. Protter (1995).

Una filtración $(F_t)_{t\geq 0}$ con las hipótesis usuales sobre un espacio de probabilidad completo (Ω,F,P) es una familia de σ-álgebras contenidas en F, creciente, continua por derecha y tal que F_0 contiene todos los conjuntos P-nulos de F. Un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$ se dice adaptado si X_t es F_t medible para todo $t \geq 0$.

Un tiempo de parada T es una variable aleatoria no negativa tal que $\{T < t\}$ pertenece a F_t para todo $t \geq 0$. Si X es un proceso y T un tiempo de parada, el proceso X parado en el tiempo T se define como $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$.

Dada una sucesión finita de tiempos de parada $0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_{n+1} < \infty$, diremos que H es un proceso predecible simple si tiene la representación:

$$H_t = H_{\{0\}}1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i 1_{(T_i,T_{i+1}]}(t), \quad (t),$$

para ciertas variables aleatorias $|H_i| < \infty$. A la familia de los procesos predecibles simples se le denotará por S.

Un proceso se dice *càdlàg* (respectivamente, *càglàd*) si casi seguramente (c.s.) sus trayectorias son continuas por derecha (resp. por izquierda) y con límites por izquierda (resp. por derecha) finitos. Denotamos por L (resp. D) al espacio de los procesos adaptados y càdlàg (resp., *càglàd*). Dado un proceso X, denotaremos por X_- al proceso definido por el límite por izquierda de X en cada punto.

Un proceso X adaptado y real se dice una *martingala* con respecto a la filtración $(F_t)_{t\geq 0}$ si cumple:

i) $E(|H_t|) < \infty$

ii) Si $s \leq t$ entonces $E(X_t / F_s) = X_s$ c.s.

Un proceso *càdlàg* y adaptado X es una *martingala* local si existe una sucesión creciente de tiempos de parada T_n con $\lim_n T_n = \infty$ c.s. tales que, para cada n, $\{X_{t\wedge T_n} 1_{\{T_n > 0\}}\ t \geq 0\}$ es una familia de variables aleatorias uniformemente integrable y es una martingala.

Sea L^0 el espacio de variables aleatorias finitas dotado de la topología definida por la convergencia en probabilidad. Dado un proceso X en D, definimos el operador $JX(H):S \to D$ mediante:

$$J_X(H) = H_0X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i(X^{T_{i+1}} - X^{T_i}).$$

Diremos que un proceso $(H^n)_{n\geq 1}$ converge a un proceso H uniformemente sobre compactos en probabilidad (ucp) si para cada $t > 0$ se cumple que $\sup_{0\leq s\leq t} |H_s^n - H_s|$ converge a 0 en probabilidad.

Denotaremos por S_{ucp} y D_{ucp} a los espacios S y D con la topología ucp. Existen dos definiciones equivalentes del concepto de *semimartingala*. Sea X un proceso càdlàg y adaptado. Entonces X es una semimartingala (en sentido clásico) si puede descomponerse en la forma $X_t = X_0 + M_t + A_t$, donde M es una martingala local y A es un proceso creciente de variación acotada. Equivalentemente, X es una semimartingala si el operador J_X es una aplicación continua de S_{ucp} en D_{ucp}.

Sea X una semimartingala. El operador lineal continuo J_X de S_{ucp} en D_{ucp} tiene una extensión única a un operador de L en D. Para H en L, a $J_X(H)$ se le llama integral de H con respecto a X y se denota por $H \cdot X = \int H_s dX_s$.

Una *semimartingala d-dimensional* es un proceso con valores en el espacio euclideano d-dimensional tal que sus componentes son semimartingalas. Análogamente se extienden para procesos multidimensionales (vectoriales y matriciales) los espacios L y D, así como la integral estocástica.

Sea f una función continua de $\Re_+ \times \Re^d$ en $\Re^d$, G una función continua $\Re_+ \times \Re^d$ en $\Re^{d\times m}$, Z_t una semimartingala m-dimensional y X_0 un vector aleatorio d-dimensional F_0-medible. Si f(t,x) y G(t,x) son funciones de Lipschitz con respecto a x entonces existe una única semimartingala X que satisface la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_{s-})\,ds + \int_0^t G(s, X_{s-})\,dZs.$$

Tal proceso X se dice una *solución fuerte* de esta ecuación. Aquí la primera integral se entiende en sentido de Riemann y la segunda en sentido de integral estocástica con respecto a una semimartingala Z. Además, X_{s-} denota el límite por la izquierda del proceso X en el tiempo s. En la primera integral, X_{s-} puede sustituirse por X_s pues es sabido que el conjunto de puntos de discontinuidad de una semimartingala es a lo sumo numerable.

En el presente trabajo trataremos con EDE de tipo ruido aditivo; es decir, de la forma:

$dX_t = f(t, X_t)dt + G(t)dZ_t$,

con condición inicial $X_{t_0} = X_0 \in \Re^d$, o equivalentemente,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\,ds + \int_0^t G(s)\,dZ_s. \qquad (1)$$

Para uso posterior, enunciaremos a continuación una de las versiones usuales del lema de Gronwall.

Lema 1 (Gronwall). Sea α(t) una función de $\Re^+$ en $\Re^-$ y supongamos que además se cumple que:

$$\alpha(t) \le c + k\int_0^s \alpha(u)du < \infty,$$

para $0 \le s \le t$. Entonces $\alpha(t) \le c \cdot e^{k\,t}$.

3. EL MÉTODO DE LINEALIZACIÓN LOCAL

Consideremos una ecuación diferencial estocástica de tipo ruido aditivo con respecto a una semimartingala m-dimensional Z, i.e. de la forma (1).

Para su solución numérica, introduzcamos una sucesión de particiones de la recta numérica, $0 \le T_1^N \le \ldots \le T_{k_N}^N \le \infty$ (N = 1,2,…) formada por tiempos de parada T_n^N tales que c.s. $T_{k_N}^N$ tiende a infinito y máx. $(T_{n+1}^N - T_n^N)$ tiende a cero cuando N crece. Para simplificar la notación, escribiremos eventualmente T_n en lugar de T_n^N.

Definiremos una aproximación $Y = T^N$ de X recursivamente sobre los sucesivos intervalos $]T_n,T_{n+1}]$, partiendo de $Y_0 = X_0$. Supongamos para esto definida X_t para $t \le T_n$. Entonces sobre el intervalo $]T_n,T_{n+1}]$ consideremos la siguiente linealización de la ecuación (1)

$$Y_t = Y_t + \int_{T_n}^{t} f^N(Y)_{s-} ds + \int_{T_n}^{t} G(s) dZ_s \qquad (2)$$

donde

$$f^N(T)_{s-} = f(\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) + \frac{\partial f}{\partial f} (\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) (s - \sigma_{s-}) \circ \sigma_{s-}) + \frac{\partial f}{\partial f} (\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) (Y_{s-} - Y \circ \sigma_{s-}) .$$

Como $\sigma_{s-} = T_n$ para s en $]T_n, T_{n+1}]$ la ecuación (2) es lineal en este intervalo, y por tanto tiene solución explícita en función de exponenciales matriciales (ver, e.g., Protter, 1995). Específicamente:

$$Y_t = Y_{T_n} + \int_{T_n}^{t} \exp\left((t - T_n) \frac{\partial f(T_n, Y_{T_n})}{\partial y} \right) \left\{ f(T_n, Y_{T_n}) + \frac{\partial f(T_n, Y_{T_n})}{\partial y} (s - T_n) \right\} ds + \xi_{n,t}, \qquad (3)$$

donde

$$\xi_{n,t} = \int_{T_n}^{t} \exp\left((t - T_n) \frac{\partial f(T_n, Y_{T_n})}{\partial y} \right) G(s) dZ_s .$$

Nótese además que la aproximación así obtenida satisface la ecuación

$$Y_t = X_0 + \int_{0}^{t} f^N(Y)_s - ds + \int_{0}^{t} G(s) dZ_s, \qquad (4)$$

para todo $t \geq 0$. La aproximación LL queda así definida por (3), o equivalentemente por (4). Su cálculo requiere de la simulación de la variable aleatoria $\xi_{n,t}$. Supondremos en lo que sigue que ello es factible desde el punto de vista computacional (ver también comentarios en la Sección 5).

4. CONVERGENCIA

Para demostrar la convergencia ucp de la aproximación LL a la solución exacta supondremos que se satisfacen las siguientes condiciones:

(H1) $f \in C^{1,1}(\Re_+ \times \Re^d, \Re^d)$ y $G \in C^1(\Re_+ \times \Re^d, \Re^{d \times m})$.

(H2) X_0 es F_0 medible.

(H3) Existe una constante $K < \infty$ tal que $\left\| \frac{\partial f}{\partial f}(t, x) \right\| < K$, $\forall t \in \Re_+$ y $x \in \Re^d$.

(H4) $\forall t_0 \in \Re_+$, existe una constante $K_1 = K_1(t_0) < \infty$ tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) \right\| < K_1 \| x - y) \|, \forall t \in [0, t_0] \text{ y } \forall x,y \in \Re^d.$$

(H5) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$ es continua.

Para facilitar la demostración de la convergencia utilizaremos el lema siguiente.

Lema 2. Supóngase que se cumplen las condiciones (H1)-(H5). Entonces la aproximación LL Y^N (definida por (4)) cumple que existe una sucesión de tiempos de parada π_j^N tales que P - $\lim_j \pi_j^N = \infty$ uniforme con respecto a N y $\| Y_{t-}^N \| \leq j$ para todo $0 < t \leq \pi_j^N$.

Demostración: Por simplicidad, escribase Y en lugar de Y^N.

A partir de la ecuación (4) podemos asegurar que

$$\|Y_t\| \le \|Y_0\| + \int_0^t \left\| f^N(Y)_{s-} \right\| ds + \left\| \int_0^t G(s) dZ_s \right\| \qquad (5)$$

Por definición de f^N,

$$\left\| f^N(Y)_{s-} \right\| \le \| f(\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) \| + \left\| \frac{\partial f}{\partial y} (\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) \right\| \| s - \sigma_{s-} \| + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} (\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) \right\| \| Y_s - Y \circ \sigma_{s-} \|.$$

Usando las condiciones (H1) y (H3) podemos decir que:

$$\| f(\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) \| \le \| f(\sigma_{s-}, 0 \| + \| f(\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) - f(\sigma_{s-}, 0) \| \le c_0 + K \| Y \circ \sigma_{s-}) \|,$$

con $0 \le s \le t_0$ para un t_0 fijo.

Utilizando un razonamiento similar, pero a partir de las condiciones (H1) y (H4), podemos asegurar que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y} (\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) \right\| \le c_1 + K_1 \| Y \circ \sigma_{s-} \|$$

Y por (H3) se tiene además que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y} (\sigma_{s-}, Y \circ \sigma_{s-}) \right\| \le K .$$

A partir de las desigualdades anteriores y a partir de un $t_0 > 0$, podemos asegurar que existen constantes b_{01}, b_{02} y b_{03} tales que si definimos $\beta_t = \sup_{0 \le s \le t} \| Y_s \|$, entonces

$$\beta_t \le \| X_0 \| + \int_0^t (b_{01} + b_{02} \| s - \sigma_{s-} \| + b_{03} \beta_s) ds + \eta_t$$

.

Por lo que para ciertas constantes a_0 y b_0 se tiene que:

$$\beta_t \le \| X_0 \| + a_0 + b_0 \int_0^t \beta_s \, ds + \eta_t, \qquad (6)$$

donde $\eta_t = \sup_{0 \le s \le t} \left\| \int_0^t G(s) dZ_z \right\|$.

Además, β_t es finito porque Y_t es una semimartingala. Y η_t es una variable aleatoria finita por ser $\left(\int_0^t G(s) dZ_s \right)_{t \ge 0}$ una semimartingala.

Luego (6) implica por el lema de Gronwall:

$$\beta_t \le \| X_0 \| + a_0 + \eta_t + (\| X_0 \| + a_0 + \eta_t)(e^{b_0 t} - 1) \quad \forall\ 0 \le t \le t_0.$$

En particular $\forall\ t_0 \in \Re_+$, podemos encontrar una cota que no dependa de la partición:

$$\beta_{t_0} \le \| X_0 \| + a_0 + \eta_{t_0} + (\| X_0 \| + a_0 + \eta_{t_0})(e^{b_0 t_0} - 1). \tag{7}$$

Definamos $\pi_j^N = \inf\{t : \| Y_t \| > j\}$, para j =1,2,…, entonces se tiene que $\| Y_t \| \le j\ \forall 0 < t < \pi_j^N$ y además $\forall 0 < t < \pi_j^N\ P(\pi_j^N \le t_0) \le P(\beta_{t_0} > j)$, donde $P(\beta_{t_0} > j)$ tiende a 0 cuando j tiende a infinito, de modo uniforme con respecto a la partición N; pues el miembro derecho de (7) es una variable aleatoria finita que no depende de la partición N. ∎

En estos momentos estamos en condiciones de enunciar el teorema de convergencia del método del LL.

Teorema 1. Supóngase que se cumplen las condiciones (H1)-(H5). Entonces la aproximación LL T^N (definida por (4)) tiende a la solución exacta X de la ecuación (1) cuando $N \to \infty$, en el sentido de convergencia ucp.

Demostración:

a) Sea

$$X_t - Y_t = \int_0^t f(s, X_{s-}) - f^N(Y)_{s-} ds$$

$$= \int_0^t f(s, X_{s-}) - f^N(Y)_{s-} ds + \int_0^t f^N(X)_{s-} - f^N(Y)_{s-} ds.$$

Por tanto,

$$\| X_t - Y_t \| \le \int_0^t \left\| f(s, X_{s-}) - f^N(X)_{s-} \right\| ds + \int_0^t \left\| f^N(X)_{s-} - f^N(X)_{s-} \right\| ds.$$

Si se define $\varphi_t = \sup_{0 \le s \le t} \| X_s - Y_s \|$, podemos rescribir la expresión anterior como sigue:

$$\varphi_t \le \int_0^t \left\| f(s, X_{s-}) - f^N(X)_{s-} \right\| ds + \int_0^t \left\| f^N(X)_{s-} - f^N(Y)_{s-} \right\| ds. \tag{8}$$

Sea ahora $t_0 > 0$ un tiempo arbitrario, y $\tau_{0j} = \pi_j^N \wedge t_0 \wedge \zeta_j$, donde $\zeta_j = \inf\{t : \| X_t \| > j\}$ y $a \wedge b$ denota el mínimo entre a y b. Como X es semimartingala entonces es localmente acotada, i.e.,

$$\| X_t \| \le j\ \ \forall 0 < t < \zeta_j \text{ y } \lim_j \zeta_j = \infty \text{ c.s.}$$

Para todo $s \le \tau_{0j}$, utilizando la fórmula de los incrementos finitos, las condiciones (H3), (H4) y (H5), se puede afirmar que:

$$\left\| f^N(X)_{s-} - f^N(Y)_{s-} \right\| \le K \| X \circ \sigma_{s-} - Y \circ \sigma_{s-} \| + K \| X_{s-} - Y_{s-} \| + K \| Y \circ \sigma_{s-} - X \circ \sigma_{s-} \| +$$

$$+ M_0 \| X \circ \sigma_{s-} - Y \circ \sigma_{s-} \| \ \| X_{s-} - X \circ \sigma_{s-} \| + K_1 \| X \circ - \sigma_{s-} - Y \circ \sigma_{s-} \| \ \| s - \sigma_{s-} \|.$$

A partir de esta desigualdad, de (8) y de la acotación $\| X_t \| \leq j$ para $\forall 0 < t < \tau_{0j}$, podemos asegurar que existe una constante ρ_{0j} tal que $\forall t \leq \rho_{0j}$, se cumple que:

$$\varphi_t \leq \rho_{0j} \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^{\tau_{0j}} \left\| f(s, X_{s-}) - f^N(X)_{s-} \right\| ds . \tag{9}$$

Denotemos

$$R(\tau_{0j}) = \int_0^{\tau_{0j}} \left\| f(s, X_{s-}) - f^N(X)_{s-} \right\| ds.$$

Entonces por (9) y el lema de Gronwall se obtiene que

$$\varphi_{\tau_{0j}} \leq R(\tau_{0j}) + R((\tau_{0j}) (e^{p_{0j} t_0} - 1)$$

b) Por otra parte, $\forall s \in \Re_+$ se cumple que

$$\left\| f(s, X_{s-}) - f^N(X)_s \right\| = \left\| f(s, X_{s-}) - f(\sigma_{s-}, X \circ \sigma_{s-}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma_{s-}, X \circ \sigma_{s-})(X_{s-} - X \circ \sigma_{s-}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma_{s-}, X \circ \sigma_{s-})(s - \sigma_{s-}) \right\| .$$

Como X tiene límite por la izquierda, entonces, para cada partición N, $X \circ \sigma_{s-}$ tiende a X_{s-} para cada $s \in \Re_+$ y $\omega \in \Omega$. Además σ_{s-} tiende a s para cada $s \in \Re_+$ y $\omega \in \Omega$. Luego a partir de (H1), podemos decir que

$$\left\| f(s, X_{s-}) - f^N(X)_s \right\| \xrightarrow[N]{} 0,$$

para cada $s \in \Re_+$ y $\omega \in \Omega$.

Además por ser $\| X_{s-} \| \leq j$ para todo $0 < \sigma_{s-} \leq s \leq t_0$, a partir de (H1) se obtiene que existe una constante M_{0j} tal que $\left\| f(s, X_{s-}) - f^N(X)_s \right\| \leq M_{0j}$, $\forall 0 < s \leq \tau_{0j}$ y $\omega \in \Omega$.

Entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se cumple que: $R(\tau_{0j})$ tiende a cero c.s. cuando la partición se hace más fina (N tiende a infinito). Luego podemos afirmar que $\lim_j \varphi_{\tau_{0j}} = 0$ casi seguramente cuando N tiende a infinito.

c) Además $\forall r > 0$ se tiene que:

$$P(\varphi_{t_0} > r) \leq P(\varphi_{t_0} > r,\ \varphi_{\tau_{0j}} > t_0) + P(\tau_{0j} < t_0) \leq P(\varphi_{t_{0j}} > r) + P(\tau_{0j} < t_0)$$

Por lo demostrado en c) podemos asegurar que para j, uniformemente con respecto a N, $P(\varphi_{\tau_{0j}} > r)$ tiende a cero cuando r crece. Y por el hecho de que $\tau_{0j} \to \infty$ c.s. cuando j aumenta entonces $P(\tau_{0j} < t_0)$ tiende a cero cuando j crece. Luego $\lim_j \varphi_{t_0} = 0$ en probabilidad cuando N tiende a infinito, que es lo que se quería demostrar. ĵ

5. CONCLUSIONES

Hemos definido una generalización del método LL para el caso de ecuaciones diferenciales estocásticas en las que la integración es con respecto a semimartingalas. Estas ecuaciones tienen gran generalidad porque, como es sabido, las semimartingalas incluyen todos los procesos con respecto a los cuales (como diferenciales) se ha trabajado hasta el momento.

No obstante deben destacarse algunas limitaciones del trabajo realizado.

En primer lugar, nos hemos restringido a ecuaciones diferenciales con ruido de tipo aditivo. De otro modo no hubiéramos contado con expresiones explícitas para las ecuaciones lineales locales que sirven de base al enfoque LL.

En segundo lugar, el cálculo de la aproximación LL propuesta requiere de la simulación de las variables aleatorias $\xi t = \int_0^t G(s)dZ_s$. Ello puede realizarse de modo relativamente simple en casos; por ejemplo, cuando la semimartingala Z es un proceso de Lévy alfa-estable, en cuyo caso estas variables tienen distribuciones estables conocidas. Pero para semimartingalas más generales la simulación de tales variables puede resultar costosa o incluso impracticable.

El desarrollo de otras variantes del método LL que superen estas limitaciones es objeto de trabajos en curso por los autores.

REFERENCIAS

BISCAY, R. J.; J.C. JIMÉNEZ; J. RIERA and VALDÉS, P. (1996). “Local linearization method for the numerical solution of stochastic differential equations”. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, 48, 631-644.

CARBONELL, F.; J.C. JIMÉNEZ; R.J. BISCAY and CRUZ, H. de la (2005): “The Local Linearization method for numerical integration of random differential equations”. **BIT Numerical Mathematics**, 45, 1-14.

JACOD, J.; T.G. KURTZ; S. MELEARD and P. PROTTER (2005): “The approximate Euler method for Levy driven stochastic differential equations”. **Ann. I. H. Poincaré-PR**, 41, 523-558.

JACOD, J., and P. PROTTER (1998): “Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations”. **The Annals of Probability**, 26, 267-307.

JANICKI, A.; Z. MICHNA and A. WERON (1996): “Approximations of stochastic differential equations driven by alpha-stable Levy motion”. **Applicationes Mathematicae**, 24, 149-168.

JANICKI, A.; K. PODGÓRSKI and A. WERON (1993): “Computer simulation of α-stable Ornstein-Uhlenbeck process”. In: **Stochastic Processes. A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur**, 161-170. S Cambanis et al. (eds.) Springer-Verlag: Berlin.

JANICKI, A. and A. WERON (1995): “Computer investigation of chaotic behaviour of stationary α-stable process”. **Probability and Mathematical Statistics**, 15, 385-395.

JIMÉNEZ, J.C. and R.J. BISCAY (2002): “Approximation of continuous time stochastic processes by the local linearization revisited”. **Stochastic Analysis and its Applications**, 20, 105-121.

JIMÉNEZ J.C.: C.M. MORA and R.J. BISCAY (2002): “Properties of a Local Linearization scheme for the numerical integration of ordinary differential equations”. **Applied Mathematics and Computation,** 126, 63-80.

JIMÉNEZ, J.C. and F. CARBONELL (2005): “Rate of convergence of local linearization schemes for initial-value problems”. **Applied Mathematics and Computation**, 171, 1282-1295.

KARANDIKAR, R.L. (1991): “An almost sure convergence of modified Euler-Peano approximation of solution to an SDE driven by semimartingales”. In: **Séminaire de Probabilités** XXV, 113-120. J. Azema **et al**. (eds.). Springer Verlag: Berlin.

KOHATSU-HIGA, A. and PROTTER, P. (1991): “The Euler scheme for SDE’s driven by semimartingales”. In: **Stochastic Analysis on Infinite Dimensional Spaces**, 141-151. H. H. Kuo (ed.). Longman Scientific and Technical: England.

KURTZ, T. and P. PROTTER (1991): “Wonk Zakai corrections, random evolutions and simulation schemes for SDE’s”. In: **Stochastic Analysis. Liber Amicorum for Moshe Zakai**, 331-346. E. Mayer-Wolt **et al**. (eds.)

OZAKI, T. (1992): “A bridge between nonlinear time series models and nonlinear stochastic dynamical systems: a local linearization approach”. **Statistica Sinica**, 2, 113-135.

PROTTER, P. (1985): Approximations of solutions of stochastic differential equation driven by semimartingales”. **The Annals of Probability**, 13, 716-743.

____________ (1995): **Stochastic Differential Equations: Theory and Applications**. John Wiley & Songs: New York.

PROTTER, P. and D. TALAY (1997); “The Euler scheme for Levy driven stochastic differential equations”. **The Annals of Probability**, 25, 393-423.