Solución de un problema de contorno de gran complejidad para ecuaciones de tipo hiperbólico: casos de índices positivos y negativos.

Solution of a boundary problem VERY COMPLEX for hyperbolic equations: CASE positive and negative INDEX

Dr. Lorgio F. Batard Martínez
MSc. Yanelis Estrada Hernández
Departamento de Matemática, Universidad Central Marta Abreu de Las Villas, Santa Clara, Villa Clara, Cuba

Resumen

En el presente trabajo se aborda un problema hiperbólico con condiciones de contorno de gran complejidad, que es reducido mediante el operador de Fourier, a un Problema de Contorno de Riemann con solución conocida. A partir de la solución del Problema de Riemann se obtiene la solución en cuadraturas del problema hiperbólico inicialmente planteado para casos de índice distinto de cero, que son importantes en las aplicaciones. Los casos de índice cero fueron ya resueltos en un artículo anterior de los autores.

Abstract

In this paper a hyperbolic problem with complex boundary conditions has been transformed into a Riemann boundary problem of known solution, by means of the Fourier operator. From the Riemann problem solution, is obtained the solution in quadratures of the initial hyperbolic problem in some cases of nonzero index, which are important in the applications. The cases of zero index have been already solved in a previous paper of the authors.

Introducción

En el presente artículo se plantea el problema general, consistente en encontrar la solución a una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico con condiciones de fronteras muy generales. La misma se buscará en una cierta clase de funciones de amplia aplicación práctica; damos un resumen de cómo reducimos nuestro problema a un Problema de Contorno de Riemann, cuya solución es conocida mediante la técnica de Chersky [ver 3], ya visto en el artículo anterior de los autores; para ello usamos el operador de Fourier y finalmente encontramos una ecuación funcional que constituye un Problema de Riemann. Luego recordamos las condiciones de solubilidad del Problema de Riemann y los diferentes casos de índice a los cuales llegamos en el artículo anterior.

Por último se determina la solución del problema en cuadraturas para los casos de índices positivos y negativos y se establecen condiciones para que el problema esté correctamente planteado, todo ello se recoge en una serie de teoremas que resumen los resultados.

1.1 Planteamiento del problema de contorno general de tipo hiperbólico

En este epígrafe procederemos a realizar el planteamiento del problema de contorno general de tipo hiperbólico con condiciones de contorno complejas:

Dada la ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + a_0 u(x,y) = g(x,y), a_0 \neq 0 \tag{1.1.1}$$

en la banda

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < +1\} \tag{1.1.2}$$

y las condiciones de contorno

$$\alpha_0 u(x,1^-) + \alpha_1 u_y(x,1^-) + \alpha_2 u_x(x,1^-) = g_{10}(x) \tag{1.1.3}$$

$$\beta_0 u(x,0^+) + \beta_1 u_y(x,0^+) + \beta_2 u_x(x,0^+) = g_{11}(x),\ x < 0 \tag{1.1.4}$$

$$\gamma_0 u(x,0^+) + \gamma_1 u_y(x,0^+) + \gamma_2 u_x(x,0^+) = g_{12}(x),\ x > 0 \tag{1.1.5}$$

donde α_i, β_i y γ_i; $i = 0,1,2$; son números reales

$g(x,y) \in L_{2x}(\mathbb{R})$, $g_{10}(x) \in L_{2x}(\mathbb{R})$, $g_{11}(x) \in L_{2x}(-\infty,0)$ y $g_{12}(x) \in L_{2x}(0,+\infty)$

Se desea encontrar condiciones sobre los elementos conocidos de **(1.1.1)**, **(1.1.3) - (1.2.5)** para que la ecuación **(1.1.1)** tenga solución única en la región **(1.2.2)**, que satisfagan las condiciones **(1.1.3)- (1.1.5)** y que pertenezcan a la clase.

$$\begin{aligned} S = \{u \in F(D) : u_{xx} \in L_{2x}(\mathbb{R}), \\ u_{yy}(\mathbb{R}) u \in L_{2x}(\mathbb{R}), 0 < \text{y} < +1\} \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

donde *F(D)* es la clase de funciones que están definidas sobre la banda infinita D y $L_{2x}(\mathbb{R})$ es la clase $L_2(\mathbb{R})$ con respecto a la variable x (ver [9])

El problema está bien planteado porque el número de condiciones de contorno (3) es igual al orden de la ecuación diferencial con respecto a y (2), por el número de regiones (1), más uno (ver [3]).

La clase $L_2(\mathbb{R})$ está definida en el artículo anterior (ver [9]).

1.2 Solucion transformada

Utilizando la técnica de Chersky obtenemos la solución transformada

$$U(x,y) = C_1(x) e^{-\sqrt{(a_0 - x^2)}y} + C_2(x) e^{\sqrt{(a_0 - x^2)}y} + V(x,y) \tag{1.2.1}$$

donde *V(x,y)* la solución particular de **(1.2.1)**

siendo

$$C_1(x) = \begin{vmatrix} H_2(x) + F^+(x) & P_2(x) \\ H_1(x) \quad e^{\sqrt{a_0 - x^2}} & P_1(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)},$$

$$C_2(x) = \begin{vmatrix} H_1(x) \quad e^{-\sqrt{a_0 - x^2}} & \overline{P_1}(x) \\ H_2(x) + F^+(x) & \overline{P_2}(x) \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta(x)}$$

donde

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0 - x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0 - x^2}} \overline{P_1}(x) \\ P_2(x) & \overline{P_2}(x) \end{vmatrix},$$

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ixa_2,$$

$$\overline{P_1}(x) = \alpha_0 - \alpha_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ixa_2,$$

$$P_2(x) = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\beta_2,$$

$$\overline{P_2}(x) = \beta_0 - \beta_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ix\beta_2,$$

$$H_1(x) = G_{10}(x) - \alpha_0 V(x,1^-) - \alpha_1 \frac{dV}{dy}(x,1^-) + ixa_2 V(x,1^-) \text{ y}$$

$$H_2(x) = G_{11}^-(x) - \beta_0 V(x,0^+) - \beta_1 \frac{dV}{dy}(x,0^+) + ix\beta_2 V(x,0^+)$$

Trabajándo algebraicamente obtenemos el siguiente problema de Riemann, visto en al artículo anterior de los autores

$$F^-(x) = D(x) F^-(x) + H(x) \tag{1.2.2}$$

donde

$$D(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)},\ H(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)} H_1(x) - H_2(x) + \frac{\Delta(x)}{\Delta_1(x)} H_3(x),$$

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} P_2(x) & P_3(x) \\ \overline{P_2}(x) & \overline{P_3}(x) \end{vmatrix},\ \Delta_1(x) = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{a_0 - x^2}} P_1(x) & e^{-\sqrt{a_0 - x^2}} P_3(x) \\ P_1(x) & P_3(x) \end{vmatrix} \text{ y}$$

$$P_3(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ixy,$$

$$\overline{P_3}(x) = \gamma_0 - \gamma_1 \sqrt{a_0 - x^2} - ixy_2$$

siendo

$$\frac{e^{2\sqrt{a_0 - x^2}} [A(a_0 - x^2) + B\sqrt{a_0 - x^2} + Cx^2 + D +}{e^{2\sqrt{a_0 - x^2}} [A_1(a_0 - x^2) + B_1\sqrt{a_0 - x^2} + C_1 x^2 + D_1 +}$$

$$D = \frac{+ix(E\sqrt{a_0 - x^2} + F)] - A(a_0 - x^2) + B\sqrt{a_0 - x^2} -}{+ix(E_1\sqrt{a_0 - x^2} + F_1)] - A_1(a_0 - x^2) + B_1\sqrt{a_0 - x^2}}$$

$$\frac{-Cx^2 - D - ix(-E\sqrt{a_0 - x^2})}{-C_1 x^2 - D_1 - ix(-E_1\sqrt{a_0 - x^2} + F_1)}$$

donde

$A = \alpha_1 \beta_1$	$A_1 = \alpha_1 \gamma_1$
$B = -\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0$	$B_1 = -\alpha_0 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_0$
$C = -\alpha_2 \beta_2$	$C_1 = -\alpha_2 \gamma_2$
$D = \alpha_0 \beta_0$	$D_1 = \alpha_0 \gamma_0$
$E = \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2$	$E_1 = \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2$
$F = -\alpha_0 \beta_2 - \alpha_2 \beta_2$	$F_1 = -\alpha_0 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_0$

1.3 Condiciones de solubilidad del Problema de Riemann obtenido a partir de un problema hiperbólico complejo. Diferentes casos de índice. Solución del Problema de Riemann para los casos de índices positivos y negativos.

En un artículo anterior de los autores se plantearon las condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de (1.1.1), (1.1.3), (1.1.4) y (1.1.5), para que el coeficiente y el término independiente de (1.2.2) satisfagan las condiciones correspondientes al problema de Riemann, las cuales se recojen en los siguientes teoremas:

Teorema 1:

La expresión de *D(x)*, no tiene ni ceros ni polos si se cumplen las condiciones:

$B^2-4(A-C)(Ca_0+D)<0, A\neq C$ y $E\neq 0$

$B_1^2-4(A_1-C_1)(C_1a_0+D_1)<0, A_1\neq C_1$ y $E_1\neq 0$

Teorema 2:

Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1**, entonces $\lim_{|x|\to+\infty} D(x)=1$.

Teorema 3:

Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** y **Teorema 2** entonces $D(x)-1)\in L_{2x}^{A}$.

Teorema 4:

Si se cumplen las condiciones del **Teorema 1** y suponiendo que $V(x,1-)$, $\frac{dV}{dy}(x,1^-)$, $V(x,0^+)$ y $\frac{dV}{dy}(x,0^+)$ pertenezcan a $L_{2x}(\mathbb{R})$ entonces se cumple que $H(x)\in L_{2x}(\mathbb{R})$.

Ellos condujeron a los diferentes casos de índices:

Casos de índice cero:

Caso 1:

$\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=0$ (Solamente $A\neq 0$ y $A_1\neq 0$)

Caso 2:

$\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0$ y $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}=\frac{\beta_0}{\beta_1}=\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$ (Solamente $A\neq 0, A_1\neq 0, D\neq 0$ y $D_1\neq 0$)

Caso 3:

$\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=0$

(Solamente $C\neq 0, C1\neq 0, D_1\neq 0, F\neq 0$ y $A\neq 0$)

Por lo que nuestro problema de contorno se reduce a:

Dada la ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico

$u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)+a_0u(x,y)=0, a_0\neq 0$

en la banda

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y<+1\}$

y las condiciones de contorno

$\alpha_0u(x,1^-)+\alpha_1u_y(x,1^-)+\alpha_2u_x(x,1^-)=g_{10}(x)$

$\beta_0u(x,0^+)+\beta_1u_y(x,0^+)+\beta_2u_x(x,0^+)=g_{11}(x), x<0$

$\gamma_0u(x,0^+)+\gamma_1u_y(x,0^+)+\gamma_2u_x(x,0^+)=g_{12}(x), x>0$

Además el coeficiente del Problema de Riemann queda de la forma:

$$D(x)=\frac{[Cx^2+D+ixF]}{[C_1x^2+D_1+ixF_1]}$$

Por lo tanto las raíces del numerador (denominador) serían:

$$x_{1,2}=\frac{-iF\pm\sqrt{-F^2-4DC}}{2C}\left(x_{1,2}=\frac{-iF\pm\sqrt{-F_1-4D_1C_1}}{2C_1}\right)$$

Tanto el numerador como el denominador de *D(x)* son polinomios de segundo grado. La solución del Problema de Riemann depende del índice del coeficiente *D(x)* y para nuestro problema solo tenemos los siguientes casos: casos de índice cero, casos de índice positivos: uno y dos y casos de índice negativo: menos uno y menos dos, para todos estos casos $\Delta_2(x)=0$.

3-a) $F=0(F_1=0)\Rightarrow -\frac{\alpha_0}{\alpha_2}=\frac{\beta_0}{\beta_2}=\frac{\gamma_0}{\gamma_2}$

3-b) $D=0(D_1=0)\Rightarrow \alpha_0=0\ o\ \beta_0=\gamma_0=0$

3-b.1) $sgF\neq sgC$

3-b.2) $sgF=sgC$

3-c) $sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|>$
$>F^2(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|>F_1^2)$
$\mathrm{Re}a>0$, $\mathrm{Re}a=-\mathrm{Re}b$, $\mathrm{Re}c>0$,
$\mathrm{Re}c=-\mathrm{Re}d$ y $\mathrm{Im}a=\mathrm{Im}b>0$, $\mathrm{Im}c=\mathrm{Im}b>0$.

3-d) $sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|<$
$<F(sgC1\neq sgD1, sgF1\neq sgC1, |4D1C1|<$
$<F_1^2, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1}>F_1^2)$,
$a>0,2,c>0$ y $d>0$

3-e) $sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|<F^2, \sqrt{-F^2-4DC}>$
$>F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|<$
$<F_1^2, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1}>F_1)$,
$a>0, b<0, c>0$ y $d<0$

3-f)
$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| >$
$> F^2(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$
$\mathrm{Re}a > 0, \mathrm{Re}a = -\mathrm{Re}b, \mathrm{Re}c > 0, \mathrm{Re}c = -\mathrm{Re}d$ y
$\mathrm{Im}a = \mathrm{Im}b < 0, \mathrm{Im}c = \mathrm{Im}b < 0$

3-g)
$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2-4DC} >$
$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| <$
$< F_1^2, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} < F_1^2, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1}) > F_1)$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-h)
$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| <$
$< F^2, \sqrt{-F^2-4DC} < F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 =$
$= sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1})$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-i)
$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| <$
$< F^2, \sqrt{-F^2-4DC} > F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq$
$\neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} > F_1)$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-j)
$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2-4DC} >$
$> F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} > F_1)$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-k)
$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F^2-4DC} >$
$> F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} > F_1)$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-l)
$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2-4DC} <$
$< F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} < F_1)$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-m)
$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2-4DC} >$
$> F(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 = sgC_1, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} > F_1)$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-n)
$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F^2-4DC} >$
$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| <$
$< F_1^2 \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} > F_1)$
$a > 0, b < 0, a = -b, c > 0$ y $d < 0, c = -d$

3-o)
$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| >$
$> F^2(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} < F_1)$
$\mathrm{Re}a > 0, \mathrm{Re}a = -\mathrm{Re}b, \mathrm{Im}a - \mathrm{Im}b > 0$

3-p)
$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F_1-4DC} <$
$< F^2(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$
$a < 0, b < 0$ y $\mathrm{Re}a > 0, \mathrm{Re}c > 0,$
$\mathrm{Re}c = -\mathrm{Re}d, \mathrm{Im}c = \mathrm{Im}d < 0$

Casos que fueron resueltos en el artículo anterior de los autores, titulado: "Solución de un problema de contorno de gran complejidad para ecuaciones de tipo hiperbólico: caso índice cero".

1.3.1 Casos de índices positivos

1.3.1.1 Casos de índice uno

1.3.1.1 a)

$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| >$
$> F^2(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1 \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} > F_1)$
$\mathrm{Re}a > 0, \mathrm{Re}a = -\mathrm{Re}b, \mathrm{Im}a = \mathrm{Im}b > 0, c > 0, d < 0$

Dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano superior y un polo imaginario en el semiplano inferior.

1.3.1.1 b)

$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| >$
$> F^2(sgC_1 = sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1 \sqrt{-F_1^2-4D_1C_1} > F_1)$
$\mathrm{Re}a > 0, \mathrm{Re}a = -\mathrm{Re}b, \mathrm{Im}a = \mathrm{Im}b > 0, c > 0, d < 0$

Dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano superior y un polo imaginario en el semiplano inferior.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-ci)(x-di)}H_3(x)$$

donde $\Delta_2(x) = 0$

Como estamos buscando funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ prolongables analíticas al semiplano superior e inferior obtenemos:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)}F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)}F^-(x) - \frac{(x-di)}{(x-b)}H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-ci)}$$

llegamos al Problema de Salto:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)}F^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)}F^-(x) + H_4(x) \qquad (1.3.1)$$

donde

$$H_4(x) = \frac{(x-di)}{(x-b)}H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-ci)}H_3(x)$$

que es de $L_{2x}(\Re)$ si $a_0 < 0$ y $V(x,y), xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$. Luego aplicando el Operador Proyección a $H_4(x)$ nos queda

$$H_4(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x) \qquad (10)$$

donde $\psi^\pm(x) = P^\pm(H_4(x))$, o sea $\psi^\pm(x) = (VoT^\pm oV^{-1})H_4(x)$

de donde $\psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h_4(t)e^{ixt}dt$ y

$\psi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} h_4(t)e^{ixt}dt$, siendo

$$h_4(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_4(t) e^{ixt} dt \qquad (1.3.2)$$

Luego sustituyendo **(1.3.2)** en **(1.3.1)** nos queda:

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) - \psi^-(x)$$

Aplicando el Teorema de Prolongación Analítica y el Teorema Generalizado de Liouville tenemos

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{(x-a)}{(x-ci)} F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{x-b} \ , c_1$$

es una constante arbitraria.

Luego

$$\frac{(x-di)}{(x-b)} F^+(x) - \psi^+(x) = \frac{c_1}{x-b}$$

$$F^+(x) = \frac{(x-b)}{(x-di)} \psi^+(x) + \frac{c_1}{x-b} \qquad (1.3.3)$$

$$F^-(x) = \frac{(x-b)}{(x-di)} \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-a)(x-b)}$$

Al tener $F^+(x)$ dado por la expresión (1.3.3) entonces $U(x,y)$ queda determinado, siendo

$$F^+(x) = \frac{(x-b)}{(x-di)} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} h_4(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{x-di} \qquad (1.3.4)$$

y se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5:

Si $a_0 < 0$ y $V(x,y), xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces el problema **(1.1.1)-(1.1.5)** para estos casos tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase **(1.1.6)** y viene dada por las expresiones **(1.2.1)** y **(1.3.4)** (Demostración similar al **Teorema 6** del caso parabólico, publicado en esta revista.)

Si la ecuación del problema original es homogénea, es decir, si $V(x,y) \equiv 0$ podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5´:

Si $a_0 < 0$, entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para estos casos tiene solución única en la clase **(1.1.6)** dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

1.3.1.1 c)

$sgC = sgD, sgF \neq sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} >$
$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$
$a > 0, b < 0$ y $\operatorname{Re} c = -\operatorname{Re} d, \operatorname{Im} c = \operatorname{Im} d < 0$

Un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario puro y dos polos complejos en el semiplano inferior.

1.3.1.1 d)

$sgC = sgD, sgF = sgC, \sqrt{-F^2 - 4DC} >$
$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$
$a > 0, b < 0$ y $\operatorname{Re} c = -\operatorname{Re} d, \operatorname{Im} c = \operatorname{Im} d < 0$

Un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario puro y dos polos complejos en el semiplano inferior.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} F^-(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} H_3(x)$$

donde $\Delta_2(x) = 0$.

Como estamos buscando funciones $F^+(x)$ y $F^-(x)$ prolongables analíticas al semiplano superior e inferior obtenemos:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) - \frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x)$$

llegamos al Problema de Salto:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) = F^-(x) + H_5(x)$$

donde

$$H_5(x) = -\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} H_2(x) + H_3(x)$$

donde utilizando una teoría similar al caso anterior obtenemos:

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-ai)(x-bi)} F^+(x) - \psi^+(x) = F^-(x) - \psi^-(x) = \frac{c_1}{(x-ai)}$$

de donde

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} \psi^+(x) + \frac{(x-bi)}{(x-c)(x-d)} c_1$$

siendo

$$F^+(x) = \frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-c)(x-d)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h_5(t) e^{ixt} dt + \frac{(x-bi)}{(x-c)(x-d)} c_1$$

Luego podemos enunciar teoremas similares a los **Teorema 5** y **Teorema 5´** con h_5 y H_5 en lugar de h_4 y H_4.

1.3.1.1 e)

$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} <$
$< F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 = sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} > F_1)$
$a > 0, b > 0$ y $c > 0, d < 0$

Dos ceros y un polo imaginarios puros en el semiplano superior y un polo en el semiplano inferior imaginario puro.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)-H_{2}(x)+\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_{3}(x)$$

donde $\Delta_{2}(x)=0$.

Como estamos buscando funciones $F^{+}(x)$ y $F^{-}(x)$ prolongables analíticas al semiplano superior e inferior obtenemos:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)-H_{2}(x)+\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_{3}(x)$$

llegamos al Problema de Salto:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)+H_{6}(x)$$

donde $H_{6}(x)=-H_{2}(x)+\dfrac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_{3}(x)$

donde utilizando una teoría similar al caso anterior obtenemos:

$$F^{+}(x)-\psi^{+}(x)+\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)-\psi^{-}(x)=\frac{c_{1}}{(x-di)}$$

de donde

$$F^{+}(x)=\psi^{+}(x)+\frac{c_{1}}{(x-di)}\ \text{y}$$

$$F^{-}(x)=\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-ai)(x-bi)}\psi^{-}(x)+\frac{(x-ci)}{(x-ai)(x-bi)}c_{1}$$

siendo $F^{+}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}h_{6}(t)e^{ixt}dt+\dfrac{c_{1}}{(x-di)}$

Luego podemos enunciar teoremas similares a los **Teoremas 5** y **Teorema 5´** con h_6 y H_6 en lugar de h_4 y H_4.

1.3.1.1 f)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|<F^{2}, \sqrt{-F^{2}-4DC}>$

$>F(sgC_{1}=sgD_{1}, sgF_{1}=sgC_{1}, \sqrt{-F_{1}^{2}-4D_{1}C_{1}}<F_{1})$

$a>0, b<0$ y $c<0$ y $d<0$

Un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

1.3.1.1 g)

$sgC=sgD, sgF=sgC, \sqrt{-F_{1}-4DC}>$

$>F(sgC_{1}\neq sgD_{1}, sgF_{1}=sgC_{1}, |4D_{1}C_{1}|<F_{1}^{2}\sqrt{-F_{1}^{2}-4D_{1}C_{1}}<F_{1})$

$a>0, b<0, c<0$ y $d<0$

Un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

Por lo que el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}F^{-}(x)-H_{2}(x)+\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}H_{3}(x)$$

donde $\Delta_{2}(x)=0$.

Como estamos buscando funciones $F^{+}(x)$ y $F^{-}(x)$ prolongables analíticas al semiplano superior e inferior obtenemos:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)}F^{+}(x)=F^{-}(x)-\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)}H_{2}(x)+H_{3}(x)$$

llegamos al Problema de Salto:

$$\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)}F^{+}(x)=F^{-}(x)+H_{7}(x)$$

donde

$$H_{7}(x)=-\frac{(x-ci)(x-di)}{(x-bi)(x-ai)}H_{2}(x)+H_{3}(x)\ \text{y}$$

$$F+(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}\psi^{+}(x)+\frac{(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}c_{1}$$

siendo

$$F^{+}(x)=\frac{(x-ai)(x-bi)}{(x-ci)(x-di)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}h_{7}(t)e^{ixt}dt+\frac{(x-bi)c_{2}}{(x-ci)(x-di)}$$

Luego podemos enunciar teoremas similares a los **Teoremas 5** y **Teorema 5´** con h_7 y H_7 en lugar de h_4 y H_4.

1.3.1.2 Casos de índice dos

1.3.1.2 a)

$sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|>$

$>F^{2}(sgC_{1}\neq sgD_{1}, sgF_{1}=sgC_{1}, |4D_{1}C_{1}|>F_{1}^{2})$

$\operatorname{Re}a>0, \operatorname{Re}a=-\operatorname{Re}b, Ima=Imb>0$ y

$\operatorname{Re}c=\operatorname{Re}d, Imc=Imd<0$

Dos ceros complejos en el semiplano superior y dos polos complejos en el semiplano inferior.

1.3.1.2 b)

$sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|>$

$>F^{2}(sgC_{1}=sgD_{1}, sgF_{1}=sgC_{1}, \sqrt{-F_{1}^{2}-4D_{1}C_{1}}<F_{1})$

$\operatorname{Re}a>0, \operatorname{Re}a=-\operatorname{Re}b, Ima=Imb>0$ y $c<0, d>0$

Dos ceros complejos en el semiplano superior y dos polos imaginarios puros en el semiplano inferior.

1.3.1.2 c)

$sgC\neq sgD, sgF\neq sgC, |4DC|<F^{2}, \sqrt{-F_{1}-4DC}<$

$<F(sgC_{1}\neq sgD_{1}, sgF_{1}=sgC_{1}, |4D_{1}C_{1}|<F_{1}^{2}, \sqrt{-F_{1}^{2}-4D_{1}C_{1}}<F_{1})$

$a>0, b>0, c<0$ y $d>0$

Dos ceros en el semiplano superior imaginarios puros y dos polos en el semiplano inferior imaginarios puros.

1.3.1.2 d)

$sgC=sgD, sgF\neq sgC, \sqrt{-F_{1}-4DC}<$

$<F(sgC_{1}\neq sgD_{1}, sgF_{1}=sgC_{1}, |4D_{1}C_{1}|<F_{1}^{2}, \sqrt{-F_{1}^{2}-4D_{1}C_{1}}<F_{1})$

$a>0, b>0, c<0$ y $d>0$

Dos ceros en el semiplano superior imaginarios puros y dos polos en el semiplano inferior imaginarios puros.

El problema de Riemann para estos casos quedaría de la siguiente manera:

$$F^+(x)=\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}F^-(x)-H_2(x)+\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}H_3(x)$$

nos queda

$$F^+(x)=\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}F^+(x)=F^-(x)+H_8(x)$$

$$H_8(x)=-\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2}H_2(x)+\frac{(x-b)^2}{(x-a)^2}H_3(x)$$

Tomando la misma idea de demostración de los casos de índice uno pero ahora el orden del polo es dos, obtenemos:

$$\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}F^+(x)-\psi^+(x)=F^-(x)-\psi-(x)$$

Aplicando el Teorema de Prolongación Analítica y el Teorema Generalizado de Liouville tenemos

$$\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}F^+(x)-\psi^+(x)=F^-(x)-\psi^-(x)=\frac{c_1}{x-b}+\frac{c_2x}{(x-b)^2}$$

c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Luego

$$F^+(x)=\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}\psi^+(x)+\frac{c_1}{x-b}+\frac{c_2x}{(x-b)^2} \qquad (1.3.5)$$

Al tener dado por la expresión **(1.3.5)** entonces *U(x,y)* queda determinado por las expresiones **(1.2.1)** y **(1.3.5)** siendo

$$F^+(x)=\frac{(x-a)^2}{(x-b)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h_8(t)e^{ixt}dt+\frac{c_1}{x-b}+\frac{c_2x}{(x-b)^2} \qquad (1.3.6)$$

se puede enunciar los siguientes teoremas:

Teorema 6:

Si $a_0 < 0$ y $V(x,y), xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2r}(\mathbb{R})$, entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para el caso de índice dos tiene solución única que depende de dos constante arbitraria y en la clase **(1.1.6)** y viene dada por las expresiones **(1.2.1)** y **(1.3.6)**.

Para el caso homogéneo queda el siguiente teorema:

Teorema 6´:

Si $a_0 < 0$, entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para los casos de índices dos tiene solución única que depende de dos constante arbitraria c_1 y c_2 en la clase **(1.1.6)** y viene dada por $u(x,y)=V^{-1}[U(x,y)]$, donde *U(x,y)* se define por las expresiones **(1.2.1)** y **(1.3.6)**.

1.3.2 Casos de índice negativos

1.3.2.1 Casos de índice menos uno

1.3.2.1 a)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|<F^2, \sqrt{-F-4DC}<$

$<F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|<F_1^2, \sqrt{-F_1-4D_1C_1}>F_1^2)$

$a<0, b<0, c>0$ y $d<0$

Un polo imaginario puro en el semiplano superior, dos ceros y un polo imaginarios puros en el semiplano inferior.

1.3.2.1 b)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|>$

$>F^2(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|<F_1^2, \sqrt{-F_1-4D_1C_1}>F_1^2)$

$\mathrm{Re}a>0, \mathrm{Re}a=-\mathrm{Re}b, \mathrm{Im}b<0$ y $c>0, d<0$

Un polo imaginario en el semiplano superior y dos ceros complejos y un polo imaginario en el semiplano inferior.

En estos casos el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^+(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F^-(x)-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

nos queda

$$\frac{(x-d)}{(x-b)}F^+(x)=\frac{(x-a)}{(x-c)}F^-(x)-\frac{(x-d)}{(x-b)}H_2(x)+\frac{(x-a)}{(x-c)}H_3(x)$$

haciendo

$$F_1^+(x)=\frac{(x-d)}{(x-b)}F^+(x),\ F_1^-(x)=\frac{(x-a)}{(x-c)}F^-(x) \text{ y}$$

$$H_9(x)=-\frac{(x-d)}{(x-b)}H_2(x)+\frac{(x-a)}{(x-c)}H_3(x)$$

nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^+(x)-F_1^-(x)=H_9(x) \qquad (1.3.7)$$

Podemos enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 7:

Si $a_0 < 0$ y $V(x,y), xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2r}(\mathbb{R})$, entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para estos casos tiene solución única en la clase **(1.1.6)** dada por $u(x,y)=V^{-1}[U(x,y)]$. donde *U(x,y)* está dada por las fórmulas **(1.2.1)** y

$$F^+(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(x-b)}{(x-d)}\int_0^{+\infty}h_9(t)e^{ixt}dt \qquad (1.3.8)$$

siendo $h_9=V^{-1}[H_9]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_0^{+\infty}\frac{H_9(\tau)}{\tau-a}d\tau=0 \qquad (1.3.9)$$

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, solo nos ocuparemos de la necesidad de la expresión **(1.3.9)**.

En efecto, como la solución del Problema de Riemann se expresa por **(1.3.8)** y tenemos que

$$F^{-}(x) = -\frac{x-c}{x-a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} h_9(t)\, e^{ixt}\, dt$$

tiene un polo de orden uno en $x = a$, por lo tanto, se requiere para que el problema de salto **(1.3.7)** tenga solución única, que $\int_{-\infty}^{0} h_9(t)\, e^{ixt}\, dt$ tenga un cero de igual orden en dicho punto. Como por la relación entre las Integrales de tipo Cauchy y de Fourier se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{H_9(\tau)}{\tau - a}d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h_9(t)\, e^{izt}\, dt$$

si $\operatorname{Im} z < 0$, entonces, desarrollando la primera de las integrales anteriores en serie de potencias de $(z-a)$ e igualando a cero el coeficiente del término de grado cero del desarrollo, se obtiene **(1.3.9)** con lo cual se elimina el polo de $F^{-}(x)$. En el caso homogéneo nos queda:

Teorema 7´:

Si $a_0 < 0$ entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para estos casos tiene solución única en la clase **(1.1.6)** dada por .

$u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

1.3.2.1 c)

$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| <$

$< F^2, \sqrt{-F_1 - 4DC} > F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| > F_1^2)$

$a > 0, b < 0\ y\ \operatorname{Re} c = -\operatorname{Re} d, \operatorname{Im} c = \operatorname{Im} d > 0$

Un cero imaginario puro y dos polos complejos en el semiplano superior y un cero en el semiplano inferior imaginario puro.

1.3.2.1 d)

$sgC \neq sgD, sgF \neq sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F^2 - 4DC} >$

$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1^2 - 4D_1C_1} < F_1)$

$a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$

Un cero y dos polos imaginarios puros en el semiplano superior y y cero imaginario puro en el semiplano inferior.

1.3.2.1 e)

$sgC \neq sgD, sgF = sgC, |4DC| < F^2, \sqrt{-F - 4DC} >$

$> F(sgC_1 \neq sgD_1, sgF_1 \neq sgC_1, |4D_1C_1| < F_1^2, \sqrt{-F_1 - 4D_1C_1} < F_1^2)$

$a > 0, b < 0, c > 0$ y $d > 0$

Dos polos imaginarios puros en el semiplano superior y un cero imaginario puro en el semiplano superior y un cero imaginario puro en el semiplano inferior.

En estos casos el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F^{-}(x) - H_2(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

nos queda

$$\frac{(x-d)}{(x-b)}F^{+}(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)}F^{-}(x) - \frac{(x-d)}{(x-b)}H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)}H_3(x)$$

haciendo

$F_1^{+}(x) = \frac{(x-d)}{(x-b)}F^{+}(x),\ F_1^{-}(x) = \frac{(x-a)}{(x-c)}F^{-}(x)$ y

$$H_{10}(x) = -\frac{(x-d)}{(x-b)}H_2(x) + \frac{(x-a)}{(x-c)}H_3(x)$$

nos queda el Problema de Salto:

$$F_1^{+}(x) - F_1^{-}(x) = H_{10}(x) \tag{4}$$

Podemos enunciar entonces el siguiente teorema:

Teorema 8:

Si $a_0 < 0$ y $V(x,y), xV(x,0^+)$, y $\frac{dV(x,0^+)}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para estos casos tiene solución única en la clase **(1.1.6)** dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$. Donde $U(x,y)$ está dada por las fórmulas **(1.2.1)** y

$$F^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(x-b)}{(x-d)}\int_{0}^{+\infty} h_{10}(t)\, e^{ixt}\, dt \tag{1.3.11}$$

siendo ; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_{10}(\tau)}{\tau - d}d\tau = 0 \tag{1.3.12}$$

La primera parte de la demostración es evidente por las técnicas de trabajo mostradas anteriormente, luego, solo nos ocuparemos de la necesidad de la expresión **(1.3.12)**.

En efecto, como la solución del Problema de Riemann se expresa por **(1.3.11)** y tenemos que

$$F^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(x-b)}{(x-d)}\int_{0}^{+\infty} h_{10}(t)\, e^{ixt}\, dt$$

tiene un polo de orden uno en $x = d$, por lo tanto, se requiere, para que el problema de salto **(1.3.10)** tenga solución única, que $\int_{0}^{+\infty} h_{10}(t)\, e^{ixt}\, dt$ tenga un cero de igual orden en dicho punto. Como por la relación entre las Integrales de tipo Cauchy y de Fourier se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_{10}(\tau)}{\tau-d}d\tau=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}h_{10}(t)\,e^{izt}dt$$

si $\mathrm{Im}>z$, entonces, desarrollando la primera de las integrales anteriores en serie de potencias de $(z-e)$ e igualando a cero el coeficiente del término de grado cero del desarrollo, se obtiene **(1.3.12)** con lo cual se elimina el polo de $F^{+}(x)$.

En el caso homogéneo nos queda:

Teorema 8´:

Si $a_0 < 0$ entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.4)** para estos casos tiene solución única en la clase **(1.1.6)** dada por $u(x,y)=V^{-1}[U(x,y)]$.

1.3.2.2 Casos de índice menos dos

1.3.2.2 a)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|>$
$>F^{2}(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|>F_1^{2})$
$\mathrm{Re}\,a>0, \mathrm{Re}\,a=-\mathrm{Re}\,b, \mathrm{Im}\,a=\mathrm{Im}\,b<0$ y
$\mathrm{Re}\,c>0, \mathrm{Re}\,c=-\mathrm{Re}\,d, \mathrm{Im}\,c=\mathrm{Im}\,d>0$

Dos polos complejos en el semiplano superior y dos ceros complejos en el semiplano inferior.

1.3.2.2 b)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|<F^{2}, \sqrt{-F_1-4DC}<$
$<F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|>F_1^{2})$
$a<0, b<0$ *y* $\mathrm{Re}\,c>0, \mathrm{Re}\,c=-\mathrm{Re}\,d, \mathrm{Im}\,c=\mathrm{Im}\,d>0$

Dos polos complejos en el semiplano superior y dos ceros imaginarios puros en el semiplano inferior.

1.3.2 2 c)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|<$
$<F^{2}(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|>F_1^{2}, \sqrt{-F_1^{2}-4D_1C_1})$
$\mathrm{Re}\,a>0, \mathrm{Re}\,a=-\mathrm{Re}\,b, \mathrm{Im}\,a=\mathrm{Im}\,b<0$ *y* $c>0, d>0$

Dos polos imaginarios en el semiplano superior y dos ceros complejos en el semiplano inferior.

1.3.2.2 d)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|<$
$<F^{2}(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|<F_1^{2})$
$a<0, b<0$ y $c>0, d>0$

Dos polos en el semiplano superior imaginarios puros y dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros.

1.3.2.2 e)

$sgC\neq sgD, sgF=sgC, |4DC|<F^{2}, \sqrt{-F-4DC}<$
$<F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|<F_1^{2}, \sqrt{-F_1-4D_1C_1}<F_1^{2}$
$a<0, b<0$ *y* $c>0, d>0$

Dos polos en el semiplano superior imaginarios puros y dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros.

1.3.2.2 f)

$sgC=sgD, sgF=sgC, \sqrt{-F_1-4DC}<$
$<F(sgC_1\neq sgD_1, sgF_1\neq sgC_1, |4D_1C_1|<F_1^{2})$
$a<0, b<0$ *y* $c>0, d>0$

Dos ceros en el semiplano inferior imaginarios puros y dos polos en el semiplano superior imaginarios puros.

En estos casos el problema de Riemann queda de la siguiente manera:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

Nos queda:

$$F^{+}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F^{-}(x)-H_2(x)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}H_3(x)$$

donde haciendo
$F_1^{+}(x)=F^{+}(x)$
$F_1^{-}(x)=\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}F^{-}(x)$ y
$H_{11}(x)=-H_2(x)+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$

Nos queda un problema de salto de la forma:
$F_1^{+}(x)-F_1^{-}(x)=H_{11}(x)$

pero ahora al obtener la solución del problema se obtiene $F^{-}(x)$ con polos de orden uno en $x=a$ y $x=b$.

Luego se puede enunciar un teorema similar al **Teorema 8** con las condiciones $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_{10}(\tau)}{\tau-a}d\tau=0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_{11}(\tau)}{\tau-a}d\tau=0$.

Caso 1.3.2 $\alpha_1=\beta_0=\beta_2=\gamma_0=\gamma_2=0$ (solamente B $\neq$ 0 y E $\neq$ 0)

1.3.2 a) Caso de índice cero

$\frac{B}{E}>0$ y $\frac{B_1}{E_1}>0$ o $\frac{B}{E}<0$ y $\frac{B_1}{E_1}<0$

Resuelto en el artículo anterior de los autores.

1.3.2 b) Caso de índice uno

$\frac{B}{E} > 0$ y $\frac{B_1}{E_1} < 0$

El Problema de Riemann quedaría de la forma

$$F^{+}(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^{-}(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

donde $\Delta_2 = 0, a > 0$ y $b < 0$

donde tenemos que si:

$$F_1^{+}(x) = F^{+}(x)$$

$$F_1^{-}(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^{-}(x)$$

$$H_{12}(x) = -H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

nos queda el Problema de Salto (hay un polo en $x-bi$ de $F^{-}(x)$ o en $x-ai$ de $F^{+}(x)$ si pasamos el coeficiente del Problema de Riemann para el otro miembro:

$$F_1^{+}(x) - F_1^{-}(x) = H_{12}(x)$$

Luego aplicando el Operador Proyección a $H_{12}(x)$ nos queda

$$H_{12}(x) = \psi^{+}(x) - \psi^{-}(x) \tag{1.3.13}$$

donde

$$\psi^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} h_{12}(t) e^{ixt} dt$$

$$\psi^{-}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} h_{12}(t) e^{ixt} dt$$

siendo $h_{12}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{12}(t) e^{ixt} dt$

Luego nos queda:

$$F^{+}(x) - \psi^{+}(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^{-}(x) - \psi^{-}(x)$$

Aplicando el Teorema de Prolongación Analítica y el Teorema Generalizado de Liouville tenemos

$$F^{+}(x) - \psi^{+}(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^{-}(x) - \psi^{-}(x) = \frac{c_1}{x-bi}$$

c_1 es una constante arbitraria.

Luego

$$\frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^{-}(x) - \psi^{-}(x) = \frac{c_1}{x-bi}$$

$$F^{+}(x) = \psi^{+}(x) + \frac{c_1}{x-bi} \tag{1.3.14}$$

$$F^{-}(x) = \frac{(x-bi)}{(x-ai)} \psi^{-}(x) + \frac{c_1}{(x-ai)}$$

Al tener $F^{+}(x)$ dado por la expresión **(1.3.14)** entonces $U(x,y)$ queda determinado, siendo

$$F^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} h_{12}(t) e^{ixt} dt + \frac{c_1}{x-bi} \tag{1.3.15}$$

y se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 9:

Si $a_0 < 0$ y $V(x,y), xV(x,0^{+})$, y $\frac{dV(x,0^{+})}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para este caso tiene solución única que depende de una constante arbitraria c_1 en la clase **(1.1.6)** y viene dada por las expresiones **(1.2.1)** y **(1.3.15)**.

En el caso homogéneo nos queda:

Teorema 9´:

Si $a_0 < 0$ entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para el este caso tiene solución única en la clase (1.1.6) dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

1.3.2 c) Caso de índice menos uno

$\frac{B}{E} < 0$ y $\frac{B_1}{E_1} > 0$

El Problema de Riemann quedaría de la forma

$$F^{+}(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^{-}(x) - H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

donde $\Delta_2 = 0, a < 0$ y $b < 0$

donde tenemos que si:

$$F_1^{+}(x) = F^{+}(x)$$

$F_1^{-}(x) = \frac{(x-ai)}{(x-bi)} F^{-}(x)$ y

$$H_{13}(x) = -H_2(x) + \frac{(x-ai)}{(x-bi)} H_3(x)$$

nos queda el Problema de Salto

$$F_1^{+}(x) - F_1^{-}(x) = H_{13}(x)$$

Teorema 10:

Si $a_0 < 0$ y $V(x,y), xV(x,0^{+})$, y $\frac{dV(x,0^{+})}{dy}$ pertenecen a $L_{2x}(\mathbb{R})$, entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para este caso tiene solución única en la clase (1.1.6) dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$. Donde $U(x,y)$ está dada por las fórmulas **(1.2.1)** y $F^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} h_{13}(t) e^{ixt} dt$ siendo $h_{13} = V^{-1}[H_{13}]$; si se cumple la condición adicional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_{13}(\tau)}{\tau - ai} d\tau = 0 \tag{1.3.16}$$

Condiciones que ya han sido demostradas en las técnicas de trabajo mostradas anteriormente.

En el caso homogéneo nos queda:

Teorema 10':

Si $a_0 < 0$ entonces el problema **(1.1.1) – (1.1.5)** para este caso tiene solución única en la clase **(1.1.6)** dada por $u(x,y) = V^{-1}[U(x,y)]$.

Conclusiones

A partir de las condiciones impuestas en cada caso estudiado, hemos encontrado la solución en cuadraturas de un problema hiperbólico con condiciones de contorno complejas, tanto para una ecuación homogénea como para una no homogénea. Es interesante la técnica utilizada consistente en reducir el problema original a un Problema de Riemann, con el auxilio de la Transformada de Fourier. Hemos limitado el estudio a casos de índice distinto de cero, por haber sido abordado el caso de índice cero en un artículo anterior de los autores.

Los resultados constituyen inobjetablemente un aporte teórico a la teoría de los Problemas de Contorno de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues no existen técnicas analíticas en la actualidad, que aborden problemas de esta naturaleza donde las condiciones de contorno difieren en diferentes partes del eje.

La solución obtenida mediante integrales de tipo Fourier permite que los profesionales que utilizan modelos hiperbólicos puedan encontrar la solución con relativa facilidad con la ayuda de un paquete matemático adecuado, sin que sea necesario que posean un dominio profundo de la teoría antes expuesta.

Bibliografía

[1] MEDEROS, O. B. y BATARD, L. F. “El problema de Riemann con parámetro pequeño en el espacio ”. Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[2] BATARD, L. F. “Las ecuaciones diferenciales y el Problema de Riemann con parámetro pequeño”. Tesis de Doctorado. 1990.

[3] MEDEROS, O. B. y BATARD, L. F. “Reducción de una clase de problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales con parámetro pequeño al Problema de Riemann”. Revista Ciencias Matemáticas No 3. 1990.

[4] GAJOV, F.D. y CHERSKY, YU.I. “Ecuaciones de tipo Convolución”. Moscú. Ciencia.1978.

[5] TIJONOV. SAMARSKI. “Ecuaciones de la Física Matemática”

[7] GAJOV, F.D. “Problemas de Contorno”

[8] BUDAK, SAMARSKI. “Problemas de la Física Matemática”

[9] 2012 LORGIO F. BATARD MARTÍNEZ, YANELIS ESTRADA HERNÁNDEZ. “Solución de un problema de contorno de gran complejidad para ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico: caso índice cero”. Revista Ciencias Matemáticas. Aceptado para su publicación

[10] 2012 LORGIO F. BATARD MARTÍNEZ, YANELIS ESTRADA HERNÁNDEZ. “Solución de un problema de contorno de gran complejidad para ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico: caso índices diferentes de cero”. Revista Ciencias Matemáticas. Aceptado para su publicación

[11] R. A. ADAMS, Sobolev Spaces, Academic Press, 1976.

[12] S. AGMON, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, 1965.

[13] J.P. AUBIN, Approximation of Elliptic Boundary Value Problems, Wiley, 1972.

[14] H. BREZIS, Operateurs Maximaux Monotones, North-Holland Math. Studies 5, 1973.

[15] F.E. BROWDER, Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces, Proc. Symp. Pure Math., 18, part 2, Amer. Math. Soc., 1976.

[16] P. BUTZER AND H. BERENS, Semi-groups of Operators and Approximations, Springer, 1967.

[17] A. CARASSO AND A. STONE (editors), Improperly Posed Boundary Value Problems, Pitman, 1975.