Ciencias Matemáticas, Vol. 30, No. 2, Pag. 73-78, 2016
Recibido 11-2016

Asignación de proyectos a estudiantes utilizando un operador FOWA de máxima entropía y el Método Húngaro
Assigning projects to students using a maximal entropy FOWA operator and the Hungarian Method

Greneter Cordoves Delgado[1]*, Boris Pérez Cañedo[2], Eduardo R. Concepción Morales[1]

Resumen En este artículo se presenta un modelo matemático para la asignación de proyectos a estudiantes. Los estudiantes son evaluados en las características de los proyectos utilizando una escala lingüística. La semántica de los términos de la escala utilizada es expresada mediante números borrosos triangulares definidos sobre el intervalo $[0,1]$. Se utiliza un operador FOWA de máxima entropía para agregar las evaluaciones y determinar una medida de calificación de los estudiantes para la ejecución de los proyectos. El modelo maximiza la calificación total sujeto a las restricciones del problema clásico de asignación lineal y es resuelto utilizando el Método Húngaro.

Abstract This paper presents a mathematical model for the assignment of projects to students. The students are evaluated in the characteristics of the projects using a linguistic scale. The semantics of the terms in the scale is expressed by means of triangular fuzzy numbers on the interval $[0,1]$. A maximal entropy FOWA operator is used to aggregate the evaluations and thus determine a measure of the students' qualification for the execution of the projects. The model maximizes the total qualification subject to the constraints of the classic linear assignment problem and it is solved using the Hungarian Method.

Palabras Clave
Asignación de proyectos — número borroso — operador FOWA — método húngaro

[1] *Departamento de Informática, Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos, Cuba, gcordoves@ucf.edu.cu, econcep@ucf.edu.cu*
[2] *Departamento de Matemática, Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos, Cuba, bpcanedo@ucf.edu.cu*
***Autor para Correspondencia**

Introducción

La asignación de proyectos a estudiantes es común en las universidades, sin embargo, las condiciones y criterios pueden diferir ampliamente. Según estas condiciones y criterios existen diferentes modelos y métodos de solución. En este artículo se toma como estudio de caso la asignación de proyectos de tesis a estudiantes de la carrera Ingeniería Informática de la Universidad de Cienfuegos. Es conocido el conjunto de características de los proyectos disponibles. Estas características están en correspondencia con el plan de estudio de la carrera, por ejemplo, con habilidades, objetivos y contenidos de las asignaturas. Los estudiantes son evaluados cualitativamente en las características que presentan los proyectos. El resultado de estas evaluaciones aporta una medida de calificación o aptitud que poseen los estudiantes para la ejecución de proyectos que presenten las características evaluadas. Un proyecto es asignado a un único estudiante y a un estudiante le es asignado un único proyecto.

Un criterio de asignación, desde el punto de vista productivo, es asignar a cada estudiante el proyecto para el cual esté mejor calificado. Otro criterio, desde un punto de vista docente, es asignar a cada estudiante el proyecto para el cual esté menos calificado, con el objetivo de potenciar áreas de conocimiento donde presente más dificultades. La asignación con este criterio debe considerar que la complejidad del proyecto tiene que estar al alcance de las posibilidades del estudiante que lo va ejecutar.

Considerando que las evaluaciones son expresadas cualitativamente se utiliza un enfoque lingüístico borroso. Este enfoque es una técnica aproximada basada en la teoría de los conjuntos borrosos [?][?], que permite representar los aspectos cualitativos de los problemas mediante variables lingüísticas cuyos valores no son números sino términos lingüísticos [?]. Por ejemplo, para describir cualitativamente la altura de las personas pueden utilizarse los términos lingüísticos baja, media y alta. La teoría de los conjuntos borrosos permite tratar adecuadamente la imprecisión inherente de conceptos que involucran el razonamiento humano y el lenguaje natural [?]. Una forma de generar los valores posibles de una variable lingüística consiste en definir un conjunto de términos con cardinalidad impar, generalmente 5, 7 ó 9, donde el término central representa una valoración de aproximadamente 0.5 y el resto se distribuye simétricamente a ambos lados del mismo. La semántica de estos términos es comúnmente expresada mediante números borrosos triangulares o trapezoidales definidos en el intervalo $[0,1]$ [?, ?, ?].

La calificación de un estudiante para ejecutar un proyecto depende de las evaluaciones que ha recibido el estudiante en las características del proyecto. Un proceso de agregación de la información [?] permite reducir el conjunto de evaluaciones dadas en las diferentes características que presenta el proyecto a una evaluación representativa de este conjunto, que mida la calificación del estudiante para la ejecución del proyecto. Para la agregación pueden utilizarse operadores Media Ponderada Ordenada (OWA, Ordered Weighted Averaging) [?]. Los operadores OWA han sido extendidos para tratar con información en un contexto lingüístico [?]. Considerando el enfoque lingüístico borroso, la calificación de un estudiante para ejecutar un proyecto puede obtenerse agregando los números borrosos que expresan la semántica asociada de los términos lingüísticos. Para la agregación de números borrosos se define en [?] el operador Media Ponderada Ordenada Borrosa (FOWA, Fuzzy Ordered Weighted Averaging), que utiliza aritmética borrosa [?]. El resultado de la agregación es un número borroso entre el mínimo y el máximo de los valores agregados.

El problema de asignación de proyectos es un tipo especial de problema de asignación lineal. Se busca una asignación factible que maximice la calificación total. En el caso de una matriz de calificaciones con elementos reales, un algoritmo diseñado especialmente para resolver este tipo de problema es el Método Húngaro [?]. En este artículo, la calificación es calculada mediante un operador FOWA, por lo tanto, los elementos de la matriz de calificaciones en la función objetivo son números borrosos. Se trata de un problema de programación lineal borrosa (PLB). Varias metodologías han sido propuestas para resolver modelos de PLB [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]. Se sigue la metodología utilizada en [?] para la solución de problemas de asignación lineal con matriz de calificaciones borrosa. La metodología consiste, esencialmente, en defusificar los elementos de la matriz de calificaciones calculando su rango[1], lo que permite expresar la función objetivo en términos de una nueva matriz con elementos reales.

El objetivo de este artículo es modelar matemáticamente el estudio de caso y resolverlo utilizando la teoría de los operadores FOWA y el Método Húngaro, para obtener una asignación óptima desde el punto de vista productivo.

El resto del artículo se organiza como sigue: La sección 1 presenta definiciones básicas de la teoría de los números borrosos y los operadores FOWA; en la sección 2 se presenta el modelo matemático del problema de asignación de proyectos; en la sección 3 se resuelve el caso planteado y en la sección 4 se presentan las conclusiones e ideas para trabajos posteriores.

1. Preliminares

Definición 1. [?] La función característica μ_A de un conjunto clásico $A \subseteq X$ asigna el valor 0 ó 1 a cada elemento de X. Esta función puede ser generalizada a una función $\mu_{\widetilde{A}}$ de modo que el valor asignado a cada elemento del conjunto universo X pertenezca al intervalo $[0,1]$, esto es, $\mu_{\widetilde{A}} : X \to [0,1]$. El valor asignado indica el grado de pertenencia del elemento al conjunto A. La función $\mu_{\widetilde{A}}$ se llama función de pertenencia y el conjunto $\widetilde{A} = \left\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) : x \in X\right\}$ definido por $\mu_{\widetilde{A}}$ para cada $x \in X$ es llamado conjunto borroso.

Definición 2. [?] Un conjunto borroso $\widetilde{A}$ definido sobre el conjunto universo de los números reales $\mathbb{R}$ es un número borroso si su función de pertenencia posee las siguientes características:

- $\mu_{\widetilde{A}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ es continua.
- $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0$ para todo $x \in (-\infty, a] \cup [d, +\infty)$
- $\mu_{\widetilde{A}}$ is estrictamente creciente en $[a,b]$ y estrictamente decreciente en $[c,d]$.
- $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$ para todo $x \in [b,c]$, donde $a \leq b \leq c \leq d$.

Hacer $b = c$ y utilizar funciones lineales en los intervalos resultantes conduce a la siguiente definición:

Definición 3. Un número borroso $\widetilde{A} = (a,b,c)$ es un número borroso triangular si su función de pertenencia está dada por:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

Definición 4. [2] [?] Sean $\widetilde{A}_1 = (a,b,c)$ y $\widetilde{A}_2 = (e,f,g)$ dos números borrosos triangulares, las operaciones de adición, sustracción y multiplicación por un escalar no negativo sobre $\widetilde{A}_1$ y $\widetilde{A}_2$ están definidas respectivamente por:

$$\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 = (a+e, b+f, c+g) \tag{2}$$

$$\widetilde{A}_1 - \widetilde{A}_2 = (a-g, b-f, c-e) \tag{3}$$

$$w \times \widetilde{A}_1 = (w \cdot a, w \cdot b, w \cdot c) \quad w \in \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{4}$$

[1] Entiéndase rango en el sentido de la fórmula (5) y no en el sentido usual del número de filas o columnas linealmente independientes de una matriz.

[2] La definición ha sido adaptada de la referencia dada.

Definición 5. [2] [**?**] Sea $\widetilde{A}=(a,b,c)$ un número borroso triangular, se definen: Rango (R), Moda (M) y Divergencia (D) por:

$$R(\widetilde{A})=\frac{(a+2b+c)}{4} \tag{5}$$

$$M(\widetilde{A})=b \tag{6}$$

$$D(\widetilde{A})=c-a \tag{7}$$

Definición 6. [2] [**?**] Sean $\widetilde{A}=(a,b,c)$ y $\widetilde{B}=(d,e,f)$ dos números borrosos triangulares; los siguientes pasos comparan $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$:

Paso 1: Calcular $R(\widetilde{A})$ y $R(\widetilde{B})$:
- **Caso a:** Si $R(\widetilde{A})>R(\widetilde{B})$ entonces $\widetilde{A}\succ\widetilde{B}$
- **Caso b:** Si $R(\widetilde{A})<R(\widetilde{B})$ entonces $\widetilde{A}\prec\widetilde{B}$
- **Caso c:** Si $R(\widetilde{A})=R(\widetilde{B})$ hacer Paso 2.

Paso 2: Calcular $M(\widetilde{A})$ y $M(\widetilde{B})$:
- **Caso a:** Si $M(\widetilde{A})>M(\widetilde{B})$ entonces $\widetilde{A}\succ\widetilde{B}$
- **Caso b:** Si $M(\widetilde{A})<M(\widetilde{B})$ entonces $\widetilde{A}\prec\widetilde{B}$
- **Caso c:** Si $M(\widetilde{A})=M(\widetilde{B})$ hacer Paso 3.

Paso 3: Calcular $D(\widetilde{A})$ y $D(\widetilde{B})$:
- **Caso a:** Si $D(\widetilde{A})>D(\widetilde{B})$ entonces $\widetilde{A}\succ\widetilde{B}$
- **Caso b:** Si $D(\widetilde{A})<D(\widetilde{B})$ entonces $\widetilde{A}\prec\widetilde{B}$
- **Caso c:** Si $D(\widetilde{A})=D(\widetilde{B})$ entonces $\widetilde{A}=\widetilde{B}$

Definición 7. [2] [**?**] Sea $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ un conjunto de números borrosos a agregar, entonces el operador FOWA, F, es definido por:

$$F(A)=W\times B^T \tag{8}$$

donde $B=[b_1,b_2,\ldots,b_n]$ es un vector asociado a A, tal que b_j es el j-ésimo más grande de los números borrosos a_i. $W=[w_1,w_2,\ldots,w_n]$ es un vector de pesos, tal que:

$$w_i\in[0,1] \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i=1 \tag{10}$$

Para el ordenamiento de números borrosos se han propuesto varios métodos [**?**, **?**, **?**, **?**]. En este artículo se utiliza el método definido en 6.
El vector de pesos W modela los criterios de decisión. El criterio optimista, $max\{a_i\}$, se obtiene con $W=[1,0,\ldots,0]$; el pesimista, $min\{a_i\}$, con $W=[0,0,\ldots,1]$ y el de Laplace, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$, con $W=[\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}]$.

Dos medidas definidas en [**?**] para caracterizar W son:

El grado de optimismo de W:

$$\text{orness}(W)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)w_i \tag{11}$$

La entropía de W:

$$H(W)=-\sum_{i=1}^{n} w_i\ln(w_i) \tag{12}$$

La entropía mide hasta qué grado W toma en cuenta toda la información en el proceso de agregación.

En este artículo, W se obtiene mediante el método de la máxima entropía [**?**] con la solución analítica de Fullér y Majlender [**?**]. Este enfoque se basa en la solución del problema de optimización siguiente:

$$\text{Maximizar} \quad H(W) \tag{13}$$

$$\text{s.a:} \quad \text{orness}(W)=\alpha \quad \alpha\in[0,1] \tag{14}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i=1 \tag{15}$$

$$w_i\in[0,1] \tag{16}$$

La solución analítica de este problema, obtenida en [**?**], está dada por:

$$\ln w_i=\frac{i-1}{n-1}\ln w_n+\frac{n-i}{n-1}\ln w_1 \tag{17}$$

$$w_i=\sqrt[n-1]{w_1^{n-i}w_n^{i-1}} \tag{18}$$

$$w_n=\frac{((n-1)\alpha-n)w_1+1}{(n-1)\alpha+1-nw_1} \tag{19}$$

$$w_1[(n-1)\alpha+1-nw_1]^n = ((n-1)\alpha)^{n-1}[((n-1)\alpha-n)w_1+1] \tag{20}$$

Definición 8. Sea $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ un conjunto de números borrosos a agregar, α el grado de optimismo del decisor, entonces el operador FOWA de máxima entropía, H_α, es definido por:

$$H_\alpha(A)=W\times B^T \tag{21}$$

donde $B=[b_1,b_2,\ldots,b_n]$ es un vector asociado a A, tal que b_j es el j-ésimo más grande de los números borrosos a_i y W es la solución del problema definido por (13), (14), (15) y (16).

2. Modelo matemático del problema de asignación de proyectos

Sea $S=\{1,\ldots,n;n\geq2\}$ un conjunto de estudiantes, $P=\{1,\ldots,n;n\geq2\}$ un conjunto de proyectos y $C=\{1,\ldots,u\}$ un conjunto de características. Se denota $C_j\subseteq C$ con $|C_j|\geq 1$ al conjunto de características presentes en el proyecto j. Los estudiantes son evaluados en las características utilizando la escala lingüística $T=$ {Mal (M), Regular (R), Bien (B), Muy bien (MB), Excelente (E)}. La semántica de estos términos lingüísticos es expresada mediante los números borrosos del cuadro 1. e_{ik} es la representación borrosa del término lingüístico de T utilizado para evaluar el estudiante $i\in S$ en la característica $k\in C$. La calificación del estudiante i para ejecutar el

Cuadro 1. Números borrosos triangulares asociados a los términos lingüísticos de T

Término	Número borroso triangular
M	(0, 0, 0.25)
R	(0, 0.25, 0.5)
B	(0.25, 0.5, 0.75)
MB	(0.5, 0.75, 1)
E	(0.75, 1, 1)

proyecto j se denota $\widetilde{b}_{ij}$ y se obtiene mediante (22) agregando e_{ik} solo para las características presentes en el proyecto j. En consecuencia se obtiene la matriz de calificaciones $\widetilde{B} = [\widetilde{b}_{ij}]$ cuyos coeficientes son números borrosos triangulares.

$$\widetilde{b}_{ij} = H_\alpha\left(\{e_{ik} : k \in C_j\}\right) \tag{22}$$

Una asignación factible es aquella donde a cada estudiante le es asignado un único proyecto y a cada proyecto un único estudiante. Se busca una asignación factible que maximice la calificación total. La formulación de programación matemática para este problema está dada por:

$$\text{Maximizar} \quad \textstyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in P} \widetilde{b}_{ij} \times X_{ij} \tag{23}$$

$$\text{s.a:} \quad \textstyle\sum_{j \in P} X_{ij} = 1 \quad \forall i \in S \tag{24}$$

$$\textstyle\sum_{i \in S} X_{ij} = 1 \quad \forall j \in P \tag{25}$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in S,\, \forall j \in P \tag{26}$$

donde $X_{ij} = \{1$, si al estudiante i se le asigna el proyecto j; 0, en otro caso$\}$.
Con (24) se garantiza que a cada estudiante sea asignado exactamente un proyecto y con (25) que un proyecto sea asignado solo a un estudiante.

La solución se obtiene en dos pasos. Inicialmente se defusifican los elementos de $\widetilde{B}$ calculando su rango mediante (5) para obtener la matriz $B = [b_{ij}]$ cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Esto permite escribir la función objetivo en términos de B. Posteriormente se resuelve el problema definido por (24), (25), (26) y (27) utilizando el Método Húngaro [**?**].

$$B = R(\widetilde{B})$$

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{i \in S} \sum_{j \in P} b_{ij} \cdot X_{ij} \tag{27}$$

3. Estudio de caso

Se presenta un problema de asignación de proyectos con 17 estudiantes y 17 proyectos correspondiente al curso 2015-2016. El conjunto de características es C = {Interfaz Web (IW), Interfaz de Escritorio (IE), Lenguaje Java (LJ), Lenguaje Python (LP), Lenguaje PHP (PHP), Bases de Datos (BD), Redes y Protocolos (RP), Análisis Estadístico (AE), Técnicas de Inteligencia Artificial, Programación Matemática (IA)}. La presencia de estas características implica que el proyecto requiere:

IW: El diseño de interfaces web cumpliendo con los estándares de diseño para tal propósito.
IE: Diseño de interfaces de escritorio cumpliendo con los estándares de diseño para tal propósito.
LJ, LP, PHP: La aplicación completa o alguna de sus partes sea codificada en estos lenguajes de programación.
BD: El diseño y/o utilización de bases de datos.
RP: Desarrollo de servicios y la implementación y/o utilización de protocolos de red.
AE: Procesamiento estadístico de datos.
IA: Utilización de modelos matemáticos, algoritmos clásicos de optimización y/o meta-heurísticas o técnicas de clasificación.

El cuadro 2 muestra las características que presentan los proyectos, donde 1 indica presencia. El cuadro 3 muestra las evaluaciones que reciben los estudiantes en estas características utilizando la escala lingüística T = {Mal (M), Regular (R), Bien (B), Muy bien (MB), Excelente (E)}. Las calificaciones de los estudiantes para ejecutar los proyectos se obtienen mediante (22) con $\alpha = 0.6$. Se sigue el procedimiento de solución descrito en la sección 2; la matriz de calificaciones defusificada se muestra en el cuadro 5, la asignación óptima obtenida, con valor de la función objetivo 13.26, se muestra en el cuadro 4.

Cuadro 2. Características presentes en los proyectos

	Características								
	IW	IE	LJ	LP	PHP	BD	RP	AE	IA
P_1			1			1		1	1
P_2	1		1		1	1			
P_3	1				1	1		1	
P_4		1	1			1		1	
P_5	1				1	1		1	
P_6		1	1					1	1
P_7				1		1	1		
P_8	1				1	1		1	
P_9	1				1	1	1	1	
P_{10}	1				1	1			
P_{11}	1				1	1		1	
P_{12}	1				1	1			
P_{13}	1				1	1			
P_{14}	1		1			1		1	
P_{15}	1	1	1			1		1	1
P_{16}				1		1	1		
P_{17}		1		1		1			

4. Conclusiones y trabajo futuro

La metodología utilizada para resolver el problema de asignación de proyectos garantiza que el criterio de decisión

Cuadro 3. Evaluaciones de los estudiantes

	Características								
	IW	IE	LJ	LP	PHP	BD	RP	AE	IA
E_1	R	B	E	B	R	B	B	B	R
E_2	MB	B	MB	MB	B	B	R	B	B
E_3	R	R	MB	M	R	MB	M	MB	E
E_4	E	E	E	M	E	MB	M	R	R
E_5	E	E	E	R	E	MB	M	E	E
E_6	E	B	E	B	E	MB	M	B	R
E_7	B	E	B	B	B	B	MB	B	B
E_8	MB	MB	E	R	E	E	M	MB	MB
E_9	B	MB	E	E	B	MB	E	B	MB
E_{10}	MB	B	MB	E	B	MB	E	B	B
E_{11}	B	B	B	B	B	B	B	B	R
E_{12}	R	E	B	B	R	B	B	MB	B
E_{13}	R	R	B	M	R	R	B	B	R
E_{14}	E	B	E	B	E	MB	M	B	R
E_{15}	MB	MB	E	M	E	E	R	MB	MB
E_{16}	E	B	B	M	E	MB	R	R	R
E_{17}	E	B	E	B	E	MB	M	B	R

Cuadro 4. Asignación óptima

E_1 P_4	E_2 P_{14}	E_3 P_1	E_4 P_{10}	E_5 P_{15}	E_6 P_{13}	E_7 P_{17}	E_8 P_8	E_9 P_7	E_{10} P_{16}	E_{11} P_5
E_{12} P_6	E_{13} P_9	E_{14} P_2	E_{15} P_{11}	E_{16} P_{12}	E_{17} P_3					

sea empleado de forma óptima. El modelo presentado puede generalizarse para considerar el grado de complejidad de las características presentes en los proyectos, lo que, en un trabajo posterior, permitiría resolver situaciones como la siguiente:

Debe decidirse, entre dos estudiantes, cuál es el más calificado para ejecutar un proyecto con las características C_1, C_2 y C_3. El estudiante E_1 ha sido evaluado de E, E y MB en las características respectivamente y el estudiante E_2 ha sido evaluado de E, MB y E en las características respectivamente. Con la formulación actual ambos tienen la misma calificación porque se agrega el mismo conjunto de evaluaciones. Sin embargo, si se conoce que las características C_1 y C_2 tienen un grado de complejidad elevado y C_3 un grado de complejidad bajo, entonces E_1 es el más calificado para ejecutar el proyecto. Debe definirse formalmente un conjunto de términos lingüísticos y su semántica asociada para representar la complejidad de las características.

El modelo presentado maximiza la calificación total. Desde el punto de vista docente, puede pensarse que minimizar la calificación total permite potenciar el desarrollo de los estudiantes en las características donde presentan mayores dificultades. En este caso es necesario que el criterio empleado considere la relación existente entre la complejidad de las características de los proyectos y las posibilidades que tienen los estudiantes para ejecutarlos.

Un trabajo posterior analizará la posibilidad de resolver el problema de asignación de proyectos sin defusificar la matriz de calificaciones. En este sentido, debe extenderse el Método Húngaro para que opere con números borrosos. En [**?**] se propone una versión borrosa del Método Húngaro; sin embargo, el resultado del ejemplo tratado en [**?**] puede obtenerse mediante la metodología adoptada en el presente artículo; además, la comparación en [**?**] del resultado de este ejemplo con el obtenido en [**?**] es incorrecta por un error de [**?**] en el cálculo del rango de uno de los números borrosos. En consecuencia, la conclusión a la que se arribó en [**?**, p. 34], en cuanto a la superioridad del método propuesto, es falsa, y por ambos métodos se obtiene el mismo resultado al menos para el ejemplo presentado. Tanto en [**?**] como en [**?**] se utiliza solo el criterio del rango para la comparación de números borrosos. La ventaja fundamental del enfoque completamente borroso es que permite la utilización de la aritmética borrosa y podría incorporar el procedimiento de comparación de números borrosos, descrito en la definición 6, en los pasos del Método Húngaro. El resultado sería una asignación óptima que toma en cuenta, además del rango, la moda y la divergencia de los números borrosos en la matriz de calificaciones. Se supone que de esta manera se obtendría un método competitivo.

Anexos

Cuadro 5. Matriz de calificaciones defusificada

0,610	0,557	0,405	0,652	0,405	0,610	0,500	0,405	0,429	0,360	0,405	0,360	0,360	0,610	0,552	0,500	0,500
0,587	0,655	0,587	0,587	0,587	0,587	0,550	0,587	0,540	0,610	0,587	0,610	0,610	0,655	0,614	0,550	0,610
0,815	0,560	0,560	0,666	0,560	0,732	0,364	0,560	0,488	0,469	0,560	0,469	0,469	0,666	0,683	0,364	0,424
0,625	0,906	0,783	0,783	0,783	0,676	0,364	0,783	0,682	0,893	0,783	0,893	0,893	0,783	0,755	0,364	0,668
0,906	0,906	0,906	0,906	0,906	0,938	0,424	0,906	0,796	0,893	0,906	0,893	0,893	0,906	0,918	0,424	0,713
0,678	0,906	0,824	0,720	0,824	0,610	0,505	0,824	0,721	0,893	0,824	0,893	0,893	0,824	0,716	0,505	0,610
0,500	0,500	0,500	0,652	0,500	0,652	0,610	0,500	0,572	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,608	0,610	0,692
0,866	0,906	0,866	0,866	0,866	0,815	0,507	0,866	0,760	0,893	0,866	0,893	0,893	0,866	0,835	0,507	0,713
0,773	0,720	0,587	0,773	0,587	0,773	0,893	0,587	0,685	0,610	0,587	0,610	0,610	0,720	0,740	0,893	0,832
0,655	0,708	0,655	0,655	0,655	0,587	0,893	0,655	0,733	0,690	0,655	0,690	0,690	0,708	0,657	0,893	0,773
0,458	0,500	0,500	0,500	0,500	0,458	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,474	0,500	0,500
0,587	0,405	0,492	0,720	0,492	0,720	0,500	0,492	0,501	0,360	0,492	0,360	0,360	0,545	0,634	0,500	0,692
0,405	0,337	0,337	0,405	0,337	0,405	0,315	0,337	0,381	0,250	0,337	0,250	0,250	0,405	0,364	0,315	0,205
0,678	0,906	0,824	0,720	0,824	0,610	0,505	0,824	0,721	0,893	0,824	0,893	0,893	0,824	0,716	0,505	0,610
0,866	0,906	0,866	0,866	0,866	0,815	0,507	0,866	0,784	0,893	0,866	0,893	0,893	0,866	0,835	0,507	0,668
0,492	0,824	0,783	0,545	0,783	0,405	0,424	0,783	0,706	0,893	0,783	0,893	0,893	0,678	0,603	0,424	0,505
0,678	0,906	0,824	0,720	0,824	0,610	0,505	0,824	0,721	0,893	0,824	0,893	0,893	0,824	0,716	0,505	0,610