

# Integración de pirámides conceptuales e instrumentales en la enseñanza del límite funcional

## *Integration of conceptual and instrumental pyramids in the teachings of the functional limit*

Adriana Díaz Cordero<sup>1\*</sup>, Valentina Badía Albanés<sup>2</sup>

**Resumen** El concepto de límite funcional es fundamental en el análisis de las propiedades de las funciones reales de una variable, por lo que se hace imprescindible que el estudiante alcance una total comprensión del mismo. Este artículo está dedicado a la presentación de una propuesta metodológica basada en la utilización de pirámides conceptuales e instrumentales para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de funciones de variable real. La propuesta metodológica es fundamentada a partir de su contribución al aprendizaje significativo y al desarrollo del pensamiento lógico. La misma consta de cuatro fases: diagnóstico, concepción, aplicación y evaluación de factibilidad, esta última validada mediante la consulta a expertos. Se definen las pirámides conceptuales e instrumentales, se caracterizan las orientaciones metodológicas elaboradas para el trabajo con las pirámides y se discuten las ventajas de la utilización de las mismas. Además, se brinda un ejemplo de pirámide conceptual y se comenta su estructura. Los resultados obtenidos en la valoración de la propuesta sugieren que la aplicación de estas pirámides contribuye al aprendizaje significativo de los conceptos de límite y continuidad de funciones de variable real.

**Palabras Clave:** aprendizaje significativo, mapas conceptuales, pensamiento lógico.

**Abstract** *The concept of functional limit is fundamental in the analysis of the properties of real functions of one variable, so it is essential that the student reaches a full understanding of it. This article is dedicated to the presentation of a methodological proposal based on the use of conceptual and instrumental pyramids for the teaching and learning of the concepts of limit and continuity of functions of real variable. The methodological proposal is based on its contribution to meaningful learning and the development of logical thinking. It consists of four phases: diagnosis, conception, application and feasibility evaluation, the latter validated by consulting experts. Conceptual and instrumental pyramids are defined, the methodological guidelines developed for working with pyramids are characterized and the advantages of using them are discussed. In addition, an example of a conceptual pyramid is given and its structure is discussed. The results obtained in the evaluation of the proposal suggest that the application of these pyramids contributes to the significant learning of the concepts of limit and continuity of real variable functions.*

**Keywords:** *meaningful learning, concept mapping, logical thinking.*

**Mathematics Subject Classification:** 97C70, 97D40, 97D70, 97I40, 97U99.

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: [adriana.diaz@matcom.uh.cu](mailto:adriana.diaz@matcom.uh.cu).

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: [valia@matcom.uh.cu](mailto:valia@matcom.uh.cu).

\*Autor para Correspondencia (*Corresponding Author*)

**Editado por (*Edited by*):** Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

**Citar como:** Díaz Cordero, A., & Badía Albanés, V. (2025). Integración de Pirámides Conceptuales e Instrumentales en la enseñanza del límite funcional. *Ciencias Matemáticas*, 38(2), 11–20. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15873672>. Recuperado a partir de <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/11009>.

### Introducción

Dentro de la Disciplina Matemática del plan de estudios E en la carrera de Química de la Universidad de la Habana

(UH), se encuentra la asignatura “Cálculo de una sola variable” la cual tiene como objeto de estudio a las funciones reales de variable real (FVR). En dicha asignatura, la sólida comprensión del concepto de límite es crucial, ya que constituye

el cimiento sobre el cual se construyen los conceptos fundamentales del Análisis como la continuidad, la derivada y la integral, las aplicaciones y propiedades básicas. Lograr que los estudiantes desarrollen bases sólidas en el entendimiento del límite funcional es, por lo tanto, una necesidad apremiante que justifica la búsqueda continua de acciones didácticas efectivas.

Sin embargo, la realidad es que muchos estudiantes de primer año enfrentan serias dificultades en el análisis, comprensión y aplicación de los conceptos de límite y continuidad de FVR [7, 5]. Esta situación no solo impacta el desempeño académico inmediato del estudiante, sino que también representa un obstáculo significativo para su avance en los estudios superiores y su futura capacidad para aplicar estos conocimientos en el ámbito profesional. Todo lo anterior se manifiesta en un menor aprovechamiento del potencial de los estudiantes, un aumento en las tasas de repetición y abandono, y una limitación en la formación de profesionales competentes en el campo de la Química.

Este trabajo, continuación del artículo “Pirámides instrumentales en la enseñanza y el aprendizaje del límite funcional” [7], y culminación de la investigación llevada a cabo en la tesis de maestría “Propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad mediante pirámides conceptuales e instrumentales” [5], aborda directamente este problema.

Se llevó a cabo una investigación con el objetivo de estudiar el estado actual de las dificultades en el proceso enseñanza - aprendizaje (PEA) de los conceptos de límite y continuidad en la carrera de Química de la UH, y de proponer una metodología innovadora basada en pirámides conceptuales e instrumentales, ya que si bien la literatura reconoce la importancia de los mapas conceptuales como herramientas para el aprendizaje significativo [12], una metodología basada en el empleo de pirámides permite una organización más efectiva de los métodos de trabajo, la creación de una interrelación apropiada entre conceptos y la instrumentación del cálculo algebraico de límites de funciones.

Esta investigación no solo redefine las categorías para el estudio de las dificultades de los estudiantes en el estudio de los conceptos de límite y continuidad [6, 7], sino que también busca llenar el vacío existente en la literatura al ofrecer una propuesta metodológica integral y adaptada a las necesidades actuales de los estudiantes, con el fin último de mejorar significativamente su comprensión y dominio de los conceptos de límite y continuidad.

Así, este artículo tiene como propósito presentar los elementos esenciales de la propuesta metodológica: sus objetivos, su argumentación teórica, las fases y acciones llevadas a cabo, el diseño de las pirámides, las orientaciones metodológicas y la consulta a expertos realizada, con la esperanza de contribuir a una transformación positiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la formación de futuros químicos.

## Relevancia del estudio

La propuesta metodológica en su conjunto es novedosa, ya que el proceso de fundamentación, concepción, definición, diseño y utilización de las pirámides conceptuales e instrumentales en el proceso de enseñanza - aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de funciones reales de variable real constituye un aporte de esta investigación. Se preserva el criterio de consistencia teórica, pues se fundamentan las dimensiones psicológicas, metodológicas y pedagógicas con diferentes teorías desde una única perspectiva filosófica, lo suficientemente amplia y científicamente fundamentada para interpretar e integrar los resultados de corrientes consideradas en esencia no compatibles. Las posiciones teóricas asumidas son consecuentemente aplicadas en el proceso de concepción de la propuesta metodológica. Las dificultades develadas son casos particulares de un problema más general, por lo cual estos estudios tienen potencialidades para su generalización.

Las pirámides conceptuales e instrumentales, acompañadas de la metodología para su diseño y utilización, son un recurso que aporta a la práctica pedagógica al promover el aprendizaje significativo y el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de funciones reales de variable real.

## 1. Metodología

Desde el punto de vista del diseño metodológico, esta investigación sigue el enfoque mixto por etapas, vinculando métodos cualitativos y cuantitativos. En la primera etapa se realiza un diagnóstico de las dificultades presentes en los estudiantes de la carrera Química de la UH, y una caracterización del estado actual del objeto de estudio, así como también se sistematizan las bases teóricas de la investigación. La segunda etapa se centra en la elaboración de la propuesta metodológica, y es donde se desarrollan las pirámides conceptuales e instrumentales y se elaboran las orientaciones metodológicas para el tema “Funciones reales de una variable real. Límite y continuidad” con la incorporación de las pirámides conceptuales e instrumentales.

Esta investigación es exploratoria - descriptiva, teórica y transformadora. Es exploratoria - descriptiva porque describe la evolución del concepto de límite y caracteriza el estado actual de las dificultades de los estudiantes en el PEA de los conceptos de límite y continuidad de FVR, presentando claramente los problemas de carácter cognitivo, conducentes a la investigación y las herramientas para su determinación. Es teórica, pues se definen las categorías a tener en cuenta al realizar un estudio de las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de FVR y también se conceptualizan las pirámides conceptuales e instrumentales. Es transformadora, porque durante la investigación, sobre la base de los problemas detectados, se intenta dar una solución, al menos parcialmente, mediante la elaboración de una metodología que modifique el PEA logrando así

un cambio en la realidad educativa tanto de profesores como de estudiantes.

## 2. Objetivos y fundamentación de la propuesta metodológica

La propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de FVR mediante pirámides conceptuales e instrumentales, para la asignatura “Cálculo de una sola variable” en la carrera de Química de la Universidad de la Habana, tiene los siguientes propósitos:

- **Promover un aprendizaje activo y participativo:** enfatiza la participación activa del estudiante durante la construcción de las pirámides conceptuales relativas a límite y continuidad mediante la visualización de las relaciones entre estos conceptos. Proporciona a los estudiantes todo el sistema de atributos de los conceptos de forma gráfica y organizada jerárquicamente. Incluye a los estudiantes en la elaboración de la base orientadora mediante debates guiados, aumentando así la participación de los estudiantes en conferencias.
- **Fomentar el pensamiento crítico:** promueve un ambiente de aprendizaje que desafíe a los estudiantes a cuestionar, analizar y resolver problemas de manera más efectiva, mediante ejercicios que obliguen al estudiante a utilizar todo el sistema de atributos que conforman el concepto.
- **Adecuar el PEA a las necesidades actuales:** al estudiar las dificultades que presentan los estudiantes actualmente, se busca atenuarlas, fomentando la conexión de los conocimientos previos con la nueva información. La reestructuración de los contenidos para lograr una orientación hacia la esencia y la estructuración algorítmica del cálculo de límites funcionales, pudiera ser una respuesta aceptada a las necesidades de nuestros estudiantes.
- **Crear un material potencialmente significativo:** brinda un material encaminado a desarrollar el pensamiento lógico durante la enseñanza del límite y la continuidad que relacione visualmente los conceptos y su aplicación. Este material delimita el sistema de procedimientos lógicos y el orden consecutivo a seguir, para el logro de habilidades específicas en los estudiantes teniendo en cuenta las etapas de asimilación del conocimiento y los atributos del aprendizaje significativo.

El fundamento **psicológico** de la propuesta metodológica lo constituyen *la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales* de Galperin [8] y *la aplicación práctica de dicha teoría* a la actividad de enseñanza - aprendizaje de Talízina [14]. Talízina considera que, todo control del proceso docente debe ser un control sobre la actividad, por lo cual, al analizar las propiedades de la acción, no solo se debe conocer

la forma, sino que además se deben considerar varios parámetros. Para Talízina [14] se deben analizar cinco *propiedades de la acción*, las cuales son:

1. *El estado o situación:* la forma de la acción (material, perceptiva, verbal externa y mental) [8].
2. *El grado de generalización:* es la relación entre las posibilidades objetivas de la aplicación del conocimiento y las posibilidades subjetivas del individuo en cuanto a dicha aplicación [14, p. 164]; y está determinado por el contenido de la base orientadora de la acción.
3. *El grado de despliegue de la acción:* toda nueva acción debe realizarse primeramente en su forma desplegada y transitar poco a poco a la forma abreviada [14, p. 172].
4. *El grado de independencia:* la acción avanza de la etapa compartida hacia la acción independiente, donde el alumno logra realizar la acción solo [14, p. 175].
5. *El grado de dominio:* es el grado de automatización de la acción, cuando las operaciones que la integran se realizan inconscientemente [14, p. 176].

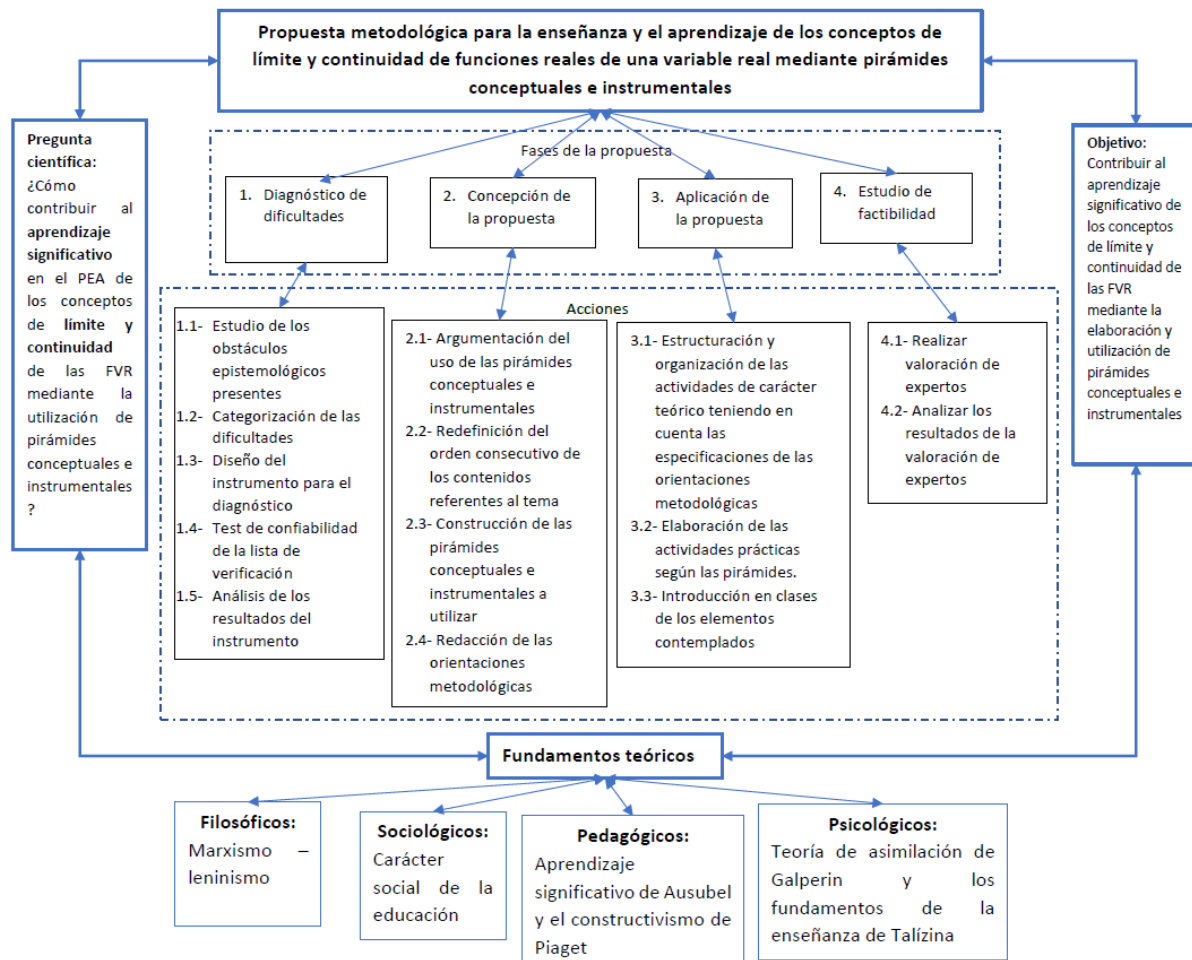
Las propiedades de la acción permiten al profesor poder evaluar correctamente el *grado de asimilación* de los estudiantes, pues en algunos contenidos se necesitará una automatización y en otros será necesario la generalización del contenido. Para Talízina, la acción será más sólida mientras más completo sea el recorrido; si queremos lograr que el estudiante obtenga una habilidad sólida, debemos garantizar la forma, el grado de generalización y el grado de dominio.

En cuanto al fundamento **pedagógico**, la propuesta metodológica está sustentada en *el aprendizaje significativo* de Ausubel, del cual se toma fundamentalmente que este “produce una interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones, de tal modo que estas adquieren un significado y son integradas a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y sustancial” [2].

El aprendizaje significativo depende de: “1) si el estudiante emplea una actitud de aprendizaje significativo y 2) si la tarea de aprendizaje en sí es significativa (si consiste en sí de un material razonable y si puede relacionarse de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva del estudiante particular)” [1, p. 17]. Por *material potencialmente significativo* Ontoria [12, p. 18] entiende al material de aprendizaje que “puede ser puesto en conexión, de modo no arbitrario, superficial y objetivo, con la estructura cognitiva de un determinado individuo”.

## 3. Descripción de la propuesta metodológica

En la Figura 1 se muestra un esquema de la propuesta metodológica. En la misma se observan cada una de sus fases y las acciones correspondientes.



**Figura 1.** Fases y acciones de la propuesta metodológica [Phases and actions of the methodological proposal].

La propuesta metodológica consta de cuatro fases, las cuales son:

- *Diagnóstico de dificultades*, para la caracterización del estado actual de los estudiantes respecto al dominio de los conceptos de límite y continuidad de FVR.
- *Concepción de la propuesta metodológica*, para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad mediante pirámides conceptuales e instrumentales.
- *Aplicación de la propuesta metodológica*, para la modificación de los modos de actuación del profesor y los estudiantes en clases haciendo uso de las pirámides conceptuales e instrumentales construidas.
- *Estudio de factibilidad de la propuesta metodológica*, para llegar a conclusiones acerca de la validez de la propuesta a partir del criterio de expertos.

A continuación, se reporta la ejecución de cada una de las fases y sus respectivas acciones según se desarrolló en la tesis de maestría “Propuesta metodológica para la enseñanza y

aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad mediante pirámides conceptuales e instrumentales” [5].

### 3.1 Diagnóstico de dificultades

El análisis cuantitativo del diagnóstico realizado se describió detalladamente en [6, 7], por lo que en este artículo solo se hará un resumen breve de esta fase. En la *acción 1.1* se realizó un estudio profundo de los obstáculos epistemológicos y una sistematización de las dificultades, usando fuentes primarias para el estudio de los obstáculos epistemológicos presentes en el concepto de límite funcional y, fuentes recientes en el estudio de las dificultades. Esta sistematización permitió realizar una crítica a la categorización de las dificultades encontradas en la revisión bibliográfica y arribar a una categorización propia, análisis que formó parte de la *acción 1.2*. Por lo que, para profundizar en las dificultades que presentan los estudiantes en el concepto de límite, se utilizan cuatro categorías: **conceptual, de trabajo algebraico, de argumentación y formalismo simbólico**, [6, p. 26].

Dicha categorización se utilizó en el diseño del instrumento (*acción 1.3*) para el diagnóstico de las dificultades que presentan los estudiantes en el estudio del concepto de límite

funcional. El instrumento consiste en un **banco de preguntas** (ejercicios y problemas) que permiten establecer la presencia o no de las dificultades según la clasificación realizada. Además, forma parte del instrumento la **lista de verificación**.

El **banco de preguntas** está conformado por: ejercicios de cálculo de límites con trabajo algebraico, de argumentación usando el significado conceptual del límite, de relación de límite y continuidad de una función de una variable real en un punto, y de cambios de contexto, para medir cómo el estudiante cambia de lo algebraico-analítico a lo sintético-geométrico y viceversa.

La **lista de verificación** está constituida por 16 rubros o preguntas, que se usan para calificar las respuestas de los estudiantes en cada examen aplicado, la misma permite tabular y evaluar las respuestas de los estudiantes a cada ejercicio del banco de preguntas, con el objetivo de identificar las dificultades presentes en el trabajo con el concepto de límite funcional.

Antes de usar la lista de verificación se efectuó un **test de confiabilidad** [7, p. 74] para evaluar la confiabilidad del instrumento, que constituye la *acción 1.4*. Por confiabilidad, se entiende, la estabilidad de los resultados que expresen los evaluadores usando la lista de verificación, lo que garantiza la independencia entre las respuestas dadas y el evaluador que las emite.

Para el estudio de las dificultades presentes en los estudiantes de la asignatura “Cálculo de una sola variable” en la carrera de Química de la UH al enfrentarse a los conceptos de límite y continuidad de FVR se realizó un muestreo no probabilístico, específicamente un muestreo intencional homogéneo. De una matrícula de 82 estudiantes, se escogieron 55 estudiantes que tenían los mismos profesores (la profesora de conferencias y la primera autora de esta investigación como profesora de clase práctica).

Al procesar la lista de verificación se observó que muchos estudiantes tienen grandes dificultades en el cálculo de límites: no reconocen las indeterminaciones, desconocen los procedimientos para la eliminación de las mismas, usan mal la simbología correspondiente, presentan errores de tipo algebraico, entre otros. Por otra parte, muchos estudiantes son incapaces de relacionar el resultado de un límite con el comportamiento gráfico de la función alrededor del punto o en el infinito, lo que demuestra las carencias en el tránsito de un registro de representación del conocimiento matemático a otro.

El análisis de la continuidad de las funciones se dificulta a gran número de estudiantes, que son incapaces de relacionar este concepto con el cálculo de límite, al no comprender la necesidad de realizar el cálculo del límite para determinar la continuidad de la función, ni la influencia de la existencia del límite en los diferentes comportamientos gráficos según los tipos de discontinuidades.

En resumen, los resultados evidencian que los estudiantes manifiestan errores de tipos simbólicos, algebraicos, de interpretación geométrica, conceptuales y, sobre todo, que no

tienen incorporados algoritmos correctos para resolver ejercicios relacionados con el análisis de continuidad de funciones. La valoración de los resultados de aplicación del instrumento da por terminada la fase de diagnóstico.

### 3.2 Concepción de la propuesta metodológica

Los mapas conceptuales fueron creados por Novak “como una fórmula para llevar a la práctica las ideas de Ausubel sobre aprendizaje significativo” [12, p. 39]. Según Ontoria [12, p. 33], los mismos proporcionan un resumen esquemático de lo aprendido y la información se ordena de una manera jerárquica, de forma tal que el conocimiento está organizado y representado en todos los niveles de abstracción. Sin embargo, Bermúdez y Rodríguez [3, p. 3] no comparten “la idea de muchos autores de que el mapa conceptual sirva para remodelar de manera resumida los principales puntos de un texto” para ellos “el mapa conceptual es el medio por excelencia para formar cadenas verbales y no para construir conocimientos” [3, p. 6].

Se realizó una amplia consulta bibliográfica referente a mapas conceptuales desde sus creadores Novak y Gowin [11], Cañas y Novak [4], Ontoria [12] hasta trabajos acerca del uso de los mapas conceptuales en la Matemática, como los trabajos de Zapata et al. [15], Pérez [13] y Gordillo et al. [9]. En las investigaciones encontradas sobre el uso de los mapas conceptuales en la Matemática, se apreció que son utilizados para resumir, relacionar una definición con su representación gráfica y para consolidar el tema; pero no se utilizan para instrumentar procedimientos. Quizás pudieran existir más investigaciones al respecto, pero no han sido encontradas.

Sin embargo, para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad, se necesita más que resumir un concepto y poner ejemplos gráficos: es preciso brindar herramientas con vistas a organizar métodos de trabajo, crear en los estudiantes una interrelación entre conceptos e instrumentar el cálculo algebraico de límites de funciones. O sea, es imprescindible construir un conocimiento totalmente nuevo en los estudiantes y hacerlo de manera significativa.

Bermúdez y Rodríguez [3] plantean que es más conveniente, en la formación de conocimientos, el uso de las **pirámides conceptuales e instrumentales** por encima de los mapas conceptuales. Según Bermúdez y Rodríguez [3, p. 6] para lograr que el estudiante construya un conocimiento, este necesita ejecutar instrumentaciones intelectuales como la comparación, la clasificación o la valoración con el nivel de dominio requerido, ninguna de las cuales se pueden lograr con un mapa conceptual.

En su crítica a los mapas conceptuales, estos autores llegan a la conclusión de que las pirámides “al reflejar estructuras organizadas únicamente bajo criterios de clasificación estrictos, devienen medios efectivos tanto para el aprendizaje como para la enseñanza” [3, p. 20]. A “diferencia del mapa, la pirámide impone el acotamiento de sus lados de forma tal que los niveles supraordinados se estrechen a medida que se asciende o, por el contrario, se extiendan los subordinados a medida

que se descende” [3, p. 11]. Además plantean que la estructura reflejada en una pirámide conceptual (o instrumental) responde al carácter clasificatorio de las relaciones que en ella se establecen.

Estas razones justifican que en el estudio teórico de los objetos del Análisis Matemático las autoras consideren más adecuado para lograr el objetivo trazado en esta investigación, el uso de las **pirámides conceptuales**; ya que estas “toleran representaciones que provengan del establecimiento de relaciones clasificatorias consecuentes y coherentes” [3, p. 18].

Además, al enseñar el concepto de límite funcional se debe instrumentar el cálculo algebraico de límites de funciones, concienciar la amplia variedad de posibilidades y métodos de resolución y eliminación de indeterminaciones, desarrollar habilidades en la solución de problemas, relacionar estrategias de trabajo y entrenar el uso de diferentes herramientas, por lo que se considera apropiado introducir el uso de **pirámides instrumentales**.

Bermúdez y Rodríguez [3] introdujeron a las pirámides conceptuales e instrumentales, las caracterizaron, argumentaron su utilidad para promover un aprendizaje significativo y eficaz, ofrecieron guías para su construcción y las ejemplificaron, sin embargo, no realizaron una definición formal de las mismas. Pero, sus aportaciones permitieron a las autoras de este trabajo proponer las siguientes definiciones formales:

Una **pirámide conceptual** es un recurso didáctico derivado de los mapas conceptuales, que constituye un modelo estructurado y jerárquico para la organización del conocimiento de manera lógica y sistemática, donde los conceptos se disponen en niveles de generalidad decreciente, desde las ideas más amplias y fundamentales en la cúspide, hasta los detalles más específicos en la base. Su propósito es la sistematización y comprensión de los aspectos teóricos de un tema y el establecimiento de las relaciones esenciales entre conceptos.

Se distingue por su carácter sistémico, ya que cada nivel se relaciona de manera lógica y coherente con los demás, facilitando una comprensión profunda y organizada del tema en estudio. A diferencia de los mapas conceptuales, la pirámide conceptual enfatiza la jerarquización como principio organizador central, asegurando que el conocimiento se estructure.

Una **pirámide instrumental** es un recurso didáctico derivado de los mapas conceptuales que se caracteriza por estructurar de forma jerárquica un conjunto de instrumentaciones esenciales para la creación de habilidades prácticas específicas y de resolución de problemas relativos a un concepto. Su propósito es la apropiación de algoritmos de trabajo, asegurando la correcta manipulación y conexión entre los conceptos teóricos y su aplicación práctica.

### 3.2.1 Metodología para el diseño de las pirámides

Según Talízina [14, p. 66], la mayoría de las dificultades que se observan dentro de la Matemática tienen su raíz en las dificultades del pensamiento lógico. Es por esa razón que

para la conformación de la propuesta metodológica se tienen en cuenta, además de los aspectos teóricos mencionados, las *estrategias para fomentar el pensamiento lógico* de Nina Talízina.

Las *estrategias para fomentar el pensamiento lógico* consisten, primeramente, en “delimitar el sistema de procedimientos lógicos necesarios” [14, p. 67]. Luego, dentro de un concepto delimitar las características necesarias y suficientes. Por último, instruir al alumno en la selección de uno de los sistemas de propiedades suficientes, ya que, por lo general hay varios equivalentes. Para enseñarle a los alumnos a seleccionar los sistemas de propiedades suficientes debe definirse el orden consecutivo necesario, analizar los objetivos y aplicarlos a las habilidades específicas.

En la propuesta metodológica están presentes estas estrategias a lo largo de las *acciones 2.2, 2.3 y 2.4*. Utilizando dichas estrategias se decidió, primeramente, delimitar los objetivos y habilidades referentes a los conceptos de límite y continuidad en dos aspectos: la imagen heurística de los conceptos (fase material de la propuesta metodológica) y las herramientas necesarias para el cálculo de límites (fase instrumental).

Siguiendo esta delimitación se reestructura la secuencia de actividades para el tema “Funciones reales de una variable real. Límite y continuidad”. Para cada conferencia se analizan las características necesarias y suficientes en la definición de los conceptos, las que pasarán a ser los contenidos de las pirámides conceptuales e instrumentales. Usando la metodología propuesta por Bermúdez y Rodríguez [3, p. 19] se construyeron tres pirámides conceptuales relativas a la segunda conferencia del tema. Las pirámides conceptuales construidas tienen como objetivo formar en el estudiante la **imagen heurística de los conceptos de límite y continuidad** y relacionar los conceptos de forma visual.

### 3.2.2 Metodología para la utilización de las pirámides

Considerar que el estudiante tiene la **imagen heurística del concepto de límite**, implica que le da una interpretación gráfica al concepto, por lo que es capaz de dar el resultado de límites apoyándose en la gráfica de la función y entiende la relación entre el valor del límite con el comportamiento gráfico de la función en una vecindad alrededor del punto. La **imagen heurística del concepto de continuidad en un punto** está formada si el estudiante comprende que para analizar la continuidad de una función en un punto es necesario que exista el límite de la función en el punto y sea igual al valor de esta en dicho punto, que sea capaz de identificar una discontinuidad, diferenciar el comportamiento cualitativo de las funciones para diferentes casos y clasificar los distintos tipos de discontinuidad.

Se considera que después del trabajo con las pirámides conceptuales el estudiante cuenta con la base material necesaria para avanzar a la siguiente fase, la *fase instrumental* del cálculo de límite. Es por esa razón que para la tercera conferencia del tema, se elabora una pirámide instrumental que le permite al estudiante aplicar los conocimientos teóricos y las imágenes heurísticas creadas en la resolución de ejercicios

concretos. Una pirámide de tal tipo posibilita que el estudiante pueda escoger dentro del grupo de herramientas disponibles, la que se ajusta a la resolución de su problema. Entre otras cosas, este enfoque “algorítmico” se logra al poder visualizar el orden consecutivo de interrogantes que debe formularse a sí mismo para elegir la mejor estrategia. Por ejemplo, reconocer los tipos de indeterminaciones, decidir la vía adecuada para su eliminación, implementarla, retroceder en el análisis de ser necesario, e identificar cuándo ha resuelto el problema.

Al usar una pirámide instrumental como herramienta, el estudiante visualiza el sistema de propiedades suficientes para poder escoger un camino de salida hacia el cálculo del límite pedido. La pirámide instrumental que se propone para el cálculo de límites de funciones reales de una variable real se encuentra en “Pirámides instrumentales en la enseñanza y aprendizaje del límite funcional” [7, p. 77]. En la misma, hay un cierto abuso del lenguaje simbólico con vistas a resumir en un espacio reducido, toda la información respecto a los casos posibles al analizar un límite.

Como último paso de la segunda fase de la propuesta metodológica (*acción 2.4*) se elaboraron las orientaciones metodológicas para construir las pirámides con los estudiantes en el aula e integrarlas a los modos de actuación de los estudiantes y los profesores. Las orientaciones metodológicas elaboradas se encuentran en “Propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad mediante pirámides conceptuales e instrumentales” [5], en ellas se explica cómo debe dirigirse el debate para la construcción colectiva de las pirámides, cuáles son las preguntas esenciales, cómo se usan las mismas una vez elaboradas, los tiempos dentro de cada clase dedicados a su construcción y utilización, entre otras cosas.

### 3.3 Aplicación de la propuesta metodológica

El diseño metodológico de las clases teóricas y prácticas para la implementación de la propuesta fue realizado, con lo que las *acciones 3.1* y *3.2* han sido desarrolladas. Las pirámides conceptuales e instrumentales fueron empleadas durante el curso académico 2024-2025, lo que da cumplimiento a la *acción 3.3*.

### 3.4 Estudio de factibilidad de la propuesta metodológica

El estudio de factibilidad de la propuesta se realizó mediante la consulta a expertos, para el diseño teórico de la misma y no para su implementación práctica. El propósito de la consulta a expertos fue determinar la validez de la propuesta metodológica en cuanto al cumplimiento de sus objetivos y realizar una revisión formal de sus componentes, antes de ser aplicada. La consulta a expertos abarcó tres niveles de evaluación: nivel de competencia de los expertos, fiabilidad y consistencia del instrumento y, nivel de consenso de los expertos. Estos niveles de evaluación fueron calculados y analizados según la investigación de Herrera et al. [10].

Para la consulta a expertos se elaboró un listado con los posibles candidatos y en la selección se tuvo en cuenta: la

experiencia laboral, la formación científica y académica, el pensamiento crítico y la solidez de los argumentos esgrimidos al defender sus puntos de vista. Para la selección de los expertos se envió un cuestionario a 30 candidatos, de los cuales se obtuvieron 22 respuestas. Como resultado del análisis de nivel de competencia de los expertos se obtuvo que el 95.45 % de los expertos obtuvo un alto nivel de competencia, por lo cual se decidió utilizar a los 22 expertos que respondieron el cuestionario.

A los expertos se les facilitó un resumen de la propuesta metodológica y los componentes que la conforman. En base a la documentación recibida respondieron un cuestionario de 15 ítems para la valoración de la propuesta metodológica. Con el objetivo de medir la fiabilidad de la prueba se calculó el coeficiente Alpha de Cronbach que analiza la correlación entre todas las preguntas del cuestionario, que resultó ser alto ( $\alpha = 0,95$ ), lo que denota la fiabilidad y consistencia de los juicios de los expertos sobre el cuestionario empleado.

El análisis del nivel de consenso de los expertos arrojó que la mayoría considera correcta la cantidad de fases de la propuesta (86,4%), y reconoce la utilidad de las pirámides conceptuales e instrumentales en la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad (77,3%). El 72,7% de los expertos considera a las pirámides conceptuales e instrumentales como un material potencialmente significativo y, el 90,9% que la propuesta metodológica se podría aplicar.

En consecuencia, la valoración realizada por los expertos acerca de la propuesta metodológica resultó positiva y, por lo tanto, está lista para su implementación.

## 4. Ejemplo de pirámide conceptual

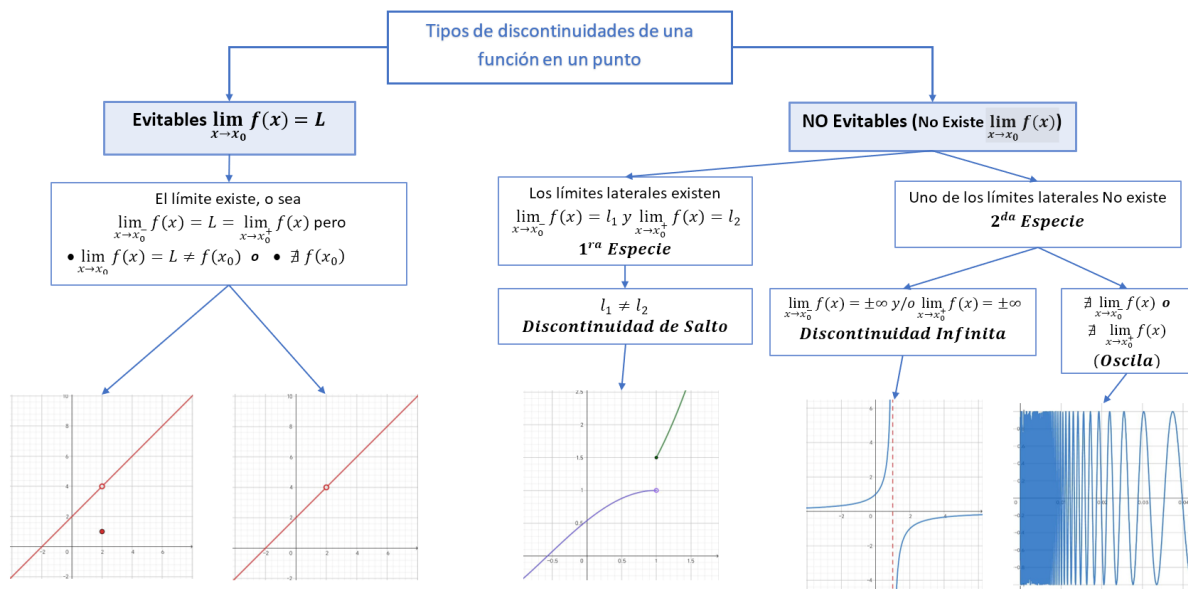
A continuación, se muestra un ejemplo de pirámide conceptual que forma parte de la propuesta metodológica (Figura 2).

Esta pirámide está concebida para el estudio de los conceptos relativos a la clasificación de las discontinuidades de una función en un punto. En ella se puede observar cómo está presente la jerarquía desde un inicio, pues al preocuparse por clasificar los tipos de discontinuidades ya el estudiante identificó que la función no es continua en el punto.

En la pirámide se utiliza el concepto de límite como aspecto fundamental en la clasificación de las discontinuidades, y está presente visualmente al ser el segundo y tercer nivel jerárquico de la pirámide. Por último, la base de la pirámide está conformada por ejemplos gráficos de los distintos tipos de discontinuidades, para que el estudiante pueda relacionar los conceptos de límite y la clasificación de las discontinuidades, con el comportamiento gráfico de una función en la vecindad de un punto.

## 5. Discusión

El uso de pirámides y no de mapas conceptuales en la presente propuesta se fundamenta a partir de los elementos característicos de cada uno, de la naturaleza de las relaciones



**Figura 2.** Pirámide conceptual para la clasificación de los tipos de discontinuidad [Conceptual pyramid for classifying discontinuity types].

entre conceptos matemáticos y de los objetivos específicos que se persiguen al emplear pirámides conceptuales e instrumentales. Más concretamente, puede notarse que:

- Las pirámides conceptuales e instrumentales muestran claramente cuál es el pivote de mayor jerarquía a partir del cual se estructuran, mientras que en los mapas esto no es obligatorio. Sin embargo, para la comprensión de los contenidos matemáticos es vital establecer cuáles son los conceptos básicos o fundamentales y cuáles se van formulando o derivando a partir de los anteriores.
- En el mapa conceptual el uso de “palabras de enlace” implica que se pueda leer todo como una oración. Mientras que en las pirámides conceptuales dichas palabras no son necesarias, ya que se apela en menor grado al uso de la memoria, privilegiando el desarrollo de formas de pensar que involucren la determinación de relaciones jerárquicas, de implicación entre conceptos.
- Los mapas conceptuales pueden cambiar de forma y jerarquía en dependencia de la persona que los construye. Mientras que las pirámides conceptuales, al igual que los conceptos matemáticos donde las relaciones entre los mismos están perfectamente establecidas, mantienen su jerarquía, con independencia de quién las construya.

Ahora bien, ¿cómo la propuesta metodológica asume sus fundamentos? La propuesta metodológica tiene en cuenta la teoría de Galperin [8] y de Talízina [14], específicamente la base orientadora hacia la esencia generalizada, al dedicar conferencias específicas a crear en el estudiante la imagen heurística del concepto como fase material y otras, a la fase instrumental del concepto en sí. También se aplica esta teoría

durante la creación de las clases prácticas, pues se escogen ejercicios que obliguen al estudiante a utilizar todo el sistema de atributos que conforman al concepto; que reflejan los casos más típicos y que tienen el orden consecutivo dado en conferencias al trabajar con las propiedades.

La teoría de Ausubel [2] está presente en la elaboración de un material potencialmente significativo y en la motivación que se pretende lograr en el estudiante. También está presente en el establecimiento de conexiones claras en la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones reales de variable real para facilitar la comprensión y retención de los contenidos por los estudiantes.

Los elementos de la propuesta metodológica presentada que tributan al aprendizaje significativo al asegurar la presencia de los rasgos distintivos que se consideraron indispensables y que contribuyen al cumplimiento de los propósitos y los objetivos de la misma, son:

1. La visualización de las relaciones lógicas entre los conceptos fomenta la creación de conexiones cognitivas esenciales en los estudiantes, permitiendo la fijación de las interrelaciones entre los conceptos.
2. El contenido de las pirámides ayuda a la comprensión, adquisición y utilización de procedimientos algorítmicos, ya que en ellas están creadas sucesiones de operaciones encaminadas a la solución de ejercicios de cálculo de límites y análisis de continuidad.
3. Las pirámides permiten desarrollar habilidades de generalización en los estudiantes, y una vez que estén familiarizados con este método de actuación pueden utilizarlo en otros contenidos y asignaturas, esto es posible ya que los estudiantes participan activamente en la construcción de las pirámides.

4. La estructuración de los algoritmos de trabajo que se presentan en las pirámides propuestas, fomenta la adquisición de métodos de trabajo y procedimientos en la resolución de problemas.
5. Las pirámides promueven el tránsito entre las diferentes formas de representación del conocimiento, particularmente el uso del tránsito de la visualización a lo simbólico y viceversa.
6. El diseño y construcción de las pirámides debe garantizar el tránsito de los estudiantes por las diferentes etapas del proceso de asimilación del conocimiento.
7. En la conformación de las pirámides se pasa desde lo externo, a través del lenguaje oral que se utiliza durante el proceso de elaboración conjunta, hacia el uso de la simbología matemática, que conlleva a un proceso de interiorización.
8. La representación visual de conceptos, relaciones, clasificaciones y casos posibilita que el estudiante comprenda la jerarquía de las preguntas, pasos, interrogantes que se hacen para que lo conduzcan a la resolución del problema.
9. Las pirámides instrumentales ayudan a que el estudiante se ubique rápidamente en qué paso de la resolución del cálculo de límite se encuentra y halle un camino hacia el objetivo final.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se describen los objetivos, la fundamentación teórica, las fases y acciones de una propuesta metodológica basada en el uso de pirámides conceptuales e instrumentales para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de funciones de una variable real en estudiantes de Licenciatura Química.

El análisis de los referentes teóricos abordados, sustentan la incorporación de la propuesta metodológica para contribuir al aprendizaje significativo de los conceptos de límite y continuidad de funciones reales de una variable real mediante pirámides conceptuales e instrumentales en la formación del licenciado en Química.

El proceso de construcción, elaboración y uso de las pirámides conceptuales e instrumentales contribuye a la formación del pensamiento lógico de los estudiantes.

Los resultados mostraron que la utilización de las pirámides conceptuales e instrumentales facilita la organización jerárquica y visual de los conceptos, mejorando la comprensión y el dominio del cálculo de límites y continuidad. La consulta a expertos validó la pertinencia y aplicabilidad de la propuesta, evidenciando su potencial para transformar positivamente el proceso educativo en la formación de futuros químicos.

Como elemento importante del trabajo se destacan las definiciones aportadas de pirámides conceptuales e instrumentales.

En base a los resultados obtenidos, los conocimientos adquiridos y las aspiraciones profesionales de las autoras del presente trabajo, se recomienda extender a otros temas del Análisis Matemático, la metodología para la creación y utilización de pirámides conceptuales e instrumentales.

## Suplementos

Este artículo no contiene información suplementaria.

## Agradecimientos

Agradecemos los críticas constructivas dadas por los revisores de este trabajo, nos ayudaron a crear un mejor artículo.

## Conflictos de interés

Se declara que no existen conflictos de interés. Los autores declaran que no hubo subvenciones involucradas en este trabajo.

## Contribución de autoría

**Conceptualización** A.D.C., V.B.A.

**Análisis formal** A.D.C., V.B.A.

**Investigación** A.D.C., V.B.A.

**Metodología** A.D.C., V.B.A.

**Administración de proyecto** V.B.A.

**Supervisión** V.B.A.

**Validación** A.D.C., V.B.A.

**Visualización** A.D.C.

**Redacción: preparación del borrador original** A.D.C., V.B.A.

**Redacción: revisión y edición** A.D.C., V.B.A.

## Referencias

- [1] Ausubel, D.P.: *Psicología educativa un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, 1976. <https://books.google.com/cu/books?id=I058AQAACAAJ>.
- [2] Ausubel, D.P.: *Teoría del aprendizaje significativo*. Fascículos de CEIF, páginas 1–10, 1983. [https://www.academia.edu/download/36648472/Aprendizaje\\_significativo.pdf](https://www.academia.edu/download/36648472/Aprendizaje_significativo.pdf).
- [3] Bermúdez, R. y Ma. Rodríguez: *Pirámide conceptual contra mapa conceptual: desde lo alto se piensa más lejos*. Revista Pedagogía Universitaria, XII(1):1–20, 2007. <http://docplayer.es/24504765-Piramide-conceptual-contra-mapa-conceptual-desde-lo-alto-se-piensa-mas-lejos.html>.

- [4] Cañas, A. y J. Novak: *Mapas conceptuales: ¿Qué son y cómo elaborarlos?*, 2008. [https://repository.icesi.edu.co/biblioteca\\_digital/bitstream/10906/85728/1/canas\\_mapas\\_conceptuales\\_2018.pdf](https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/85728/1/canas_mapas_conceptuales_2018.pdf).
- [5] Díaz Cordero, A.: *Propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad mediante pirámides conceptuales e instrumentales*. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad de La Habana, La Habana, 2024. <https://accesoabierto.uh.cu/scripitorium/item/2192225#lg=1&slide=0>.
- [6] Díaz Cordero, A. y V. Badía Albanés: *Dificultades en la comprensión del concepto límite funcional en estudiantes de Química*. *Alternativas*, 23(3):21–30, 2022. <https://editorial.ucsg.edu.ec/alternativas/alternativas/article/view/412>.
- [7] Díaz Cordero, A. y V. Badía Albanés: *Pirámides instrumentales en la enseñanza y aprendizaje del límite funcional*. *Ciencias Matemáticas*, 36(Único):71–78, 2024. <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/9454>.
- [8] Galperin, P.Y.: *La formación de la acción mental*. Universidad de La Habana, La Habana, 1983.
- [9] Gordillo, W., W.J. Pinzón y J.H. Martínez: *Los Mapas Conceptuales: una Técnica para el Análisis de la Noción de Derivada en un Libro de Texto*. *Formación universitaria*, 10(2):57–66, 2017, ISSN 0718-5006. [http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0718-5006201700200007&lng=en&nrm=iso&tlng=en](http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-5006201700200007&lng=en&nrm=iso&tlng=en).
- [10] Herrera Masó, J.R., J.L. Calero Ricardo, M.Á. González Rangel, M.I. Collazo Ramos y Y. Travieso González: *El método de consulta a expertos en tres niveles de validación*. *Revista Habanera de Ciencias Médicas*, 21(1):1–11, 2022, ISSN 1729-519X. [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1729-519X2022000100014&lng=es&nrm=iso&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1729-519X2022000100014&lng=es&nrm=iso&tlng=es).
- [11] Novak, J. y B. Gowin: *Aprendiendo a aprender*. Ediciones Martínez Roca, S.A., 1988, ISBN 84-270-2911-X.
- [12] Ontoria, A.: *Mapas conceptuales: una técnica para aprender*. NARCEA, S.A. de Ediciones Madrid, 1993, ISBN 978-84-277-0996-6.
- [13] Pérez Flores, R.: *Mapas conceptuales y aprendizaje de matemáticas*. En *Proc. of the Second Int. Conference on Concept Mapping*, páginas 1–8, San José, Costa Rica, 2006.
- [14] Talízina, N.: *Conferencias sobre "Los fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior"*. Departamento de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior, La Habana, 1984.
- [15] Zapata, S.M., C.M. Jaramillo López y E. Sucerquia Vega: *Las Matemáticas y los Mapas Conceptuales*. En *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*, páginas 569–576, México DF, 2009. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/taianacan-items/32454/1212018/ZapataLasmatem25C325AlticasALME2010.pdf>.

